成人(网络)教育系列规划教材

CHENGREN (WANGLUO) JIAOYU XILIE GUIHUA JIAOCAI

荣获全国高校现代远程教育协作组评比“网络教育教材建设金奖”

高等数学（第二版）

GAODENG SHUXUE

主　编 孙云龙

副主编 孙疆明　骆川义　戴岱

西南财经大学出版社

Southwestern University of Finance & Economics Press

成人(网络)教育系列规划教材
CHENGREN (WANGLUO) JIAOYU XILIE GUIHUA JIAOCAI

高等数学（第二版）

GAODENG SHUXUE

主　编 孙云龙
副主编 孙疆明　骆川义　戴岱

西南财经大学出版社
Southwestern University of Finance & Economics Press

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/孙云龙主编．—2 版．—成都：西南财经大学出版社，2012.12

ISBN 978－7－5504－0792－3

Ⅰ.①高… Ⅱ.①孙… Ⅲ.①高等数学—成人高等教育—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 185119 号

高等数学(第二版)

主　编:孙云龙

副主编:孙疆明　骆川义　戴　岱

责任编辑:李　雪

封面设计:杨红鹰

责任印制:封俊川

出版发行	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街 55 号)
网　　址	http://www.bookcj.com
电子邮件	bookcj@foxmail.com
邮政编码	610074
电　　话	028－87353785　87352368
照　　排	四川胜翔数码印务设计有限公司
印　　刷	四川森林印务有限责任公司
成品尺寸	185mm×260mm
印　　张	11
字　　数	230 千字
版　　次	2013 年 1 月第 2 版
印　　次	2013 年 1 月第 1 次印刷
印　　数	1—6000 册
书　　号	ISBN 978－7－5504－0792－3
定　　价	23.00 元

第二版说明

我们在对数年来使用本教材的经验进行总结的基础上，广泛征求和吸收读者的意见，并参考国内外相关教材，决定对原版进行修订。

本次修订大体保持了原版的风格，只在以下几方面进行了改进：

1. 对第一版编写及排版中的疏漏进行了修正；
2. 对部分例题的书写格式进行了改进，使其更符合读者的书写和阅读习惯；
3. 对部分章节进行删改，力图将概念和理论描述得清晰易懂；
4. 适当增加了部分例题和习题。

为了帮助读者抓住要点，提高学习质量与效率，本书还配有“高等数学习题解答”，供读者选用。

书中错误与不妥之处，恳请读者批评指正。

编者

2012 年 7 月

前言

本书是为成人高等教育而编写的一本高等数学（微积分）教科书，内容包括：一元函数微积分、多元函数微积分、概率论简介。

高等数学（微积分）是高等教育财经类各专业的一门必修的公共基础课。通过本课程的学习，一方面，能使学生系统地获得必要的微积分基本知识及常用的数学方法；另一方面，通过各个教学环节，逐步培养学生具有比较熟练的基本运算能力和自学能力、初步抽象概括问题的能力以及一定的逻辑推理能力、用定性与定量相结合的方法处理经济问题的初步能力。通过对该教材的学习可以为学生学习后续课程和进一步获得经济管理技术知识奠定必要的数学基础。

为了符合成人教育的实际要求，贯彻“少而精”的原则，做到突出重点、详略得当、通俗易懂，在本书的编写过程中，我们做了以下一些尝试：

(1) 努力突出微积分的基本思想和基本方法。本书注意对基本概念、基本定理和重要公式的几何背景和实际应用背景的介绍，以加深学生对它们的理解和印象；注重分析基本理论的实际意义及各部分内容的内在联系，以便学生在学习过程中能较好地认识基本概念和基本方法，从总体上把握微积分的思想方法。

(2) 按照适当介绍和循序渐进的原则，在定理与性质的讨论中，尽量从简单、低维入手，适度推广，在没有削弱对极限作为微积分基本方法的论述的同时，适度削弱一些定理与性质的讨论与证明，避免内容过深而脱离成人学生的实际。

(3) 参照教育部《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲（专科起点升本科）高等数学（二）》的要求，本书增加了概率论初步的内容，供任课教师及参加专升本考试的学生选用。

(4) 课后习题题量适当、题型丰富。每一章结束后，附有相关习题，包括填空、选择、计算、证明、应用、讨论等题型，书后附有答案。

本书虽经过认真编写和修改，但限于作者水平所限，加上时间紧迫，不妥之处在所难免，恳请读者不吝指正。

编者

2009 年 5 月

目录

第一章 极限与连续

极限理论与连续理论是微积分的两个基础理论．极限不仅是研究变量变化趋势的重要工具，而且也是微积分中其他许多概念与性质的基础；连续函数，特别是初等函数为微积分的重要研究对象．

本章在复习中学的函数理论的基础上，建立函数极限与连续的概念，分析讨论函数极限与连续的性质与计算．

第一节 函数

一、函数概念

函数是对现实世界中各种变量之间相互依存关系的一种抽象．比如：商品需求是商品价格的函数，企业的生产成本是产量的函数等等．

(一) 函数的定义

定义 1.1 设 D 是一个非空实数集合，若有一个对应规则 f，使 $\forall x \in D$，都有一个确定的实数 y 与之对应，则称这个对应规则 f 是定义在集合 D 上的一个**函数**，或称 y 是 x 的函数，记为：$y = f(x)$.

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**．D 称为**定义域**，也可记为 $D(f)$.

若 $x_0 \in D$，则 x_0 对应的 y 值称为**函数值**，记为 y_0，或 $f(x_0)$，或 $y|_{x=x_0}$. 全体函数值的集合称为值域，记为 $f(D)$.

注：$\forall$ 为全称量词，读作："所有的"；$\exists$ 为存在量词，读作："存在".

例 1.1.1 设 $f(x) = 3x - 5 + 2^x$，求 $f(0)$, $f(1)$.

解 $f(0) = 3 \times 0 - 5 + 2^0 = -4$

$f(1) = 3 \times 1 - 5 + 2^1 = 0$

分段函数是指将函数的定义域分成若干区间，每个区间上函数表达式各不相同．

例 1.1.2 设 $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 0 \\ x, & 0 \leqslant x < 1 \\ x^2 + 1, & x \geqslant 1 \end{cases}$，求 $f(0)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(3)$.

解 $f(0) = 0$

$$f(-1)=2\times(-1)-1=-3$$
$$f(1)=1^2+1=2$$
$$f(3)=3^2+1=10$$

（二）函数定义域

函数定义域即为函数自变量的取值范围，它可分为两种形式．一种是根据实际应用，事先给定自变量取值范围；另一种是自变量取值范围事先未给定，称为自然定义域．一般来说，求定义域是指求自然定义域．

例 1.1.3　求函数 $y=\dfrac{1}{\lg(3x-2)}$ 的定义域．

解　给定函数的定义域须满足要求：

$$3x-2>0 \text{ 且 } 3x-2\neq 1$$

即 $x>\dfrac{2}{3}$ 且 $x\neq 1$

得：函数的定义域为：$x\in(\dfrac{2}{3},1)\cup(1,+\infty)$

例 1.1.4　求函数 $y=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\ln(x-2)}$ 的定义域．

解　由

$$\begin{cases} x^2-1\geqslant 0 \\ x-2>0 \\ \ln(x-2)\neq 0 \end{cases}$$

得：$x\in(2,3)\cup(3,+\infty)$．

例 1.1.5　设 $f(x)=\begin{cases} x\sin x, & 0\leqslant x<1 \\ x-\ln(2+x), & x<0 \end{cases}$，求 $f(x)$ 的定义域．

解　在函数的第一段上，函数表达式为 $x-\ln(2+x)$，自变量的取值范围包括该段自变量取值范围及表达式中自变量取值范围两个方面，即

$$\begin{cases} x<0 \\ 2+x>0 \end{cases}，\text{即：}-2<x<0$$

在函数的第二段上，函数表达式为 $x\sin x$，自变量的取值范围为

$$0\leqslant x<1$$

所以，定义域为

$$D=[0,1)\cup(-2,0)=(-2,1)$$

（三）函数的表示法

函数的表示法有多种形式，常用的有四种。

解析法：也叫公式法，指通过数学符号表示对应关系的函数表示法，是微积分讨论的主要函数形式．例 1.1.1、例 1.1.2 中的函数表示都属于解析法．

列表法:指通过列表方式反映对应关系的函数表示法. 例如:某商品的售价与月销售量如下表:

售价(元)	20	18	17	15	14	13	11
销售量(件)	55 182	60 985	64 112	70 855	74 488	78 307	86 543

图示法:指通过图形方式反映对应关系的函数表示法. 例如:股市的走势图反映了股价、成交量随时间变化的函数关系.

描述法:通过描述反映对应关系的函数表示法. 在解决实际问题的过程中,有时会遇到已知两变量之间有确定的对应关系,但具体对应规则不十分清楚,这时可通过说明或用抽象符号 $f(x)$ 来反映对应关系.

(四) 建立函数关系

在解决实际应用问题时,常常需要建立数学模型,其基本方法就是建立函数关系.

例 1.1.6　某运输公司规定货物的运价为:在 a 千米内,每千米 k 元;超过部分每千米 $\frac{4}{5}k$ 元. 求运价 m 和里程 s 之间的函数关系.

解　在 a 千米内,每千米 k 元

$$m = kx$$

超过部分每千米 $\frac{4}{5}k$ 元

$$m = ka + \frac{4}{5}k(s - a)$$

即

$$m = \begin{cases} kx, 0 \leqslant s \leqslant a \\ ka + \frac{4}{5}k(s - a), s > a \end{cases}$$

运价 m 和里程 s 的函数关系是分段函数,定义域为 $(0, \infty)$.

例 1.1.7　某工厂生产某产品,每日最多生产 100 单位. 它的日固定成本为 130 元,生产一单位产品的可变成本为 6 元. 求该厂日总成本函数及平均单位成本函数.

解　设日总成本函数为 C,平均单位成本为 $\bar{C}$,日产量为 x.

日总成本函数为固定成本与可变成本之和为

$$C = C(x) = 130 + 6x, x \in [0, 100]$$

平均单位成本函数为:

$$\bar{C} = \frac{130 + 6x}{x} = \frac{130}{x} + 6, x \in [0, 100]$$

二、函数的性质

(一) 单调性

定义 1.2 设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义，若 $\forall x_1 < x_2, x_1, x_2 \in D$，恒有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 D 上**单调增加**；若恒有 $f(x_1) > f(x_2)$ 则称 $f(x)$ 在区间 D 上**单调减少**.

函数单调性为函数的局部性质.

若函数在定义域上单调增加或单调减少，则称此函数为单调函数. 如 $y = \dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上都是单调减少函数，但在定义域上不是单调减少函数，所以此函数不是单调函数.

例 1.1.8 判断函数 $y = \sqrt{x}$ 的单调性.

解 函数定义域为 $[0, \infty)$

在 $[0, \infty)$ 内，$\forall x_1, x_2$，若 $x_1 < x_2$ 则 $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$

因此，$y = \sqrt{x}$ 在 $[0, \infty)$ 内单调增加.

(二) 奇偶性

定义 1.3 设 $f(x)$ 的定义域为 D，若 $\forall x \in D$ 恒有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；若对任意 $x \in D$ 恒有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**；否则称 $f(x)$ 为**非奇非偶函数**.

奇、偶函数定义域是关于原点对称的集合. 偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称.

函数奇偶性为函数的整体性质.

例如 $x, \sin x, x^3, \sqrt[3]{x}$ 等为奇函数 $x^2, |x|, \cos x$ 等为偶函数.

例 1.1.9 证明 $f(x) = a^x - a^{-x}$ 为奇函数.

证 $f(-x) = a^{-x} - a^{-(-x)}$

$$= -(a^x - a^{-x}) = -f(x)$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

例 1.1.10 设 $f(x)$ 在 $(-l, l)$ 上有定义，证明 $f(x) + f(-x)$ 为 $(-l, l)$ 上的偶函数.

证 设 $F(x) = f(x) + f(-x)$，则

$$F(-x) = f(-x) + f[-(-x)]$$

$$= f(-x) + f(x) = F(x)$$

所以 $F(x)$ 也即 $f(x) + f(-x)$ 为 $(-l, l)$ 上的偶函数.

(三) 周期性

定义 1.4 设 $f(x)$ 的定义域为 D，a 为非零常数，若 $\forall x \in D$ 恒有 $f(x+a) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，如果 a 中存在最小的正数 T，则称 T 为函数 $f(x)$ 的周期.

函数周期性为函数的整体性质.

例如:三角函数 $\sin x$、$\cos x$、$\tan x$、$\cot x$ 都是周期函数,它们的周期分别为 2π、2π、π、π

例 1.1.11　证明 $D(x)=\begin{cases}1, x\text{ 为有理数}\\0, x\text{ 为无理数}\end{cases}$ 为周期函数,但函数周期不存在.

证　设 $a\neq 0$ 为有理数,对任意实数 x,若 x 为有理数,则 $x+a$ 为有理数,有

$$D(x+a)=1=D(x)$$

若 x 为无理数,则 $x+a$ 为无理数,有

$$D(x+a)=0=D(x)$$

所以 $D(x)$ 为周期函数

由于有理数中不存在最小的正数,因此,$D(x)$ 不存在函数周期.

(四) 有界性

定义 1.5　设 $f(x)$ 在区间 D 上有定义,如果$\exists$常数 M, $\forall x\in D$ 恒有 $f(x)\leqslant M$,则称 $f(x)$ 在区间 D 有**上界**,M 为 $f(x)$ 在区间 D 上的一个上界;如果$\exists$常数 m, $\forall x\in D$ 恒有 $f(x)\geqslant m$,则称 $f(x)$ 在区间 D 上有**下界**,m 为 $f(x)$ 在区间 D 上的一个下界;如果 $f(x)$ 在区间 D 上既有上界、又有下界,即:$\exists M>0$, $\forall x\in D$ 恒有 $|f(x)|\leqslant M$,则称在区间 D 上 $f(x)$ 有界.

函数有界性为函数的局部性质.

若函数在定义域上有界,则称此函数为有界函数.

例 1.1.12　证明 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 有界.

证　因为 $1+x^2\geqslant 2|x|$,所以

$$|f(x)|=\frac{|x|}{1+x^2}\leqslant\frac{1}{2}$$

故　$f(x)$ 有界.

三、复合函数与反函数

(一) 复合函数

定义 1.6　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 U,函数 $u=g(x)$ 的定义域为 X,且 $g(X)\subset U$,则 $y=f(g(x))$ 是定义在 X 上的函数,称为 f 与 g 的复合函数,也可记为 $f\circ g$ 或 $f\circ g(x)$, $x\in X$.

其中:$u=g(x)$ 称为中间变量或内函数,f 称为外函数.

例 1.1.13　若 $f(x)=e^x-1$, $\varphi(x)=2-x$,求 $f[\varphi(x)]$.

解　$f[\varphi(x)]=e^{\varphi(x)}-1=e^{2-x}-1$

(二) 反函数

定义 1.7　设 $y=f(x)$ 是定义在 D 上的函数,值域为 $Y=f(D)$. 若 $\forall y\in Y$, $\exists$唯一 $x\in D$ 使得 $y=f(x)$,于是就得到一个以 Y 为定义域,y 为自变量,x 为因变量,D 为值域的

新的函数关系,称为 $y=f(x)$ 的**反函数**,记为

$$x=f^{-1}(y)\quad y\in Y=f(D).$$

习惯上,x 为自变量,y 为因变量,于是 $y=f(x)$ 的反函数通常记为

$$y=f^{-1}(x)\quad x\in Y.$$

函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的两条曲线.

例 1.1.14 求 $y=\dfrac{x}{1+x}$ 的反函数.

解 由 $y=\dfrac{x}{1+x}$,得

$$y(1+x)=x$$

$$x(1-y)=y$$

$$x=\frac{y}{1-y}$$

所以 $y=\dfrac{x}{1+x}$ 的反函数为 $y=\dfrac{x}{1-x}\quad(x\neq 1)$.

四、初等函数

(一)基本初等函数

基本初等函数是指中学数学中常见的六种函数,包括:常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数.

1. 常数函数

$$y=c$$

例如:$y=0$,$y=4$,…,(见图 1-1).

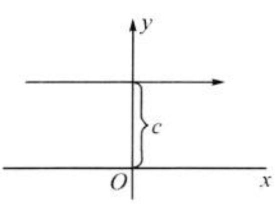

图 1-1

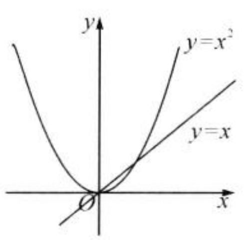

图 1-2

2. 幂函数

$$y=x^{\alpha},(\alpha\neq 0)$$

例如:$y=x$,$y=x^2$,$y=x^3$,$y=\dfrac{1}{x}=x^{-1}$,$y=\sqrt{x}=x^{1/2}$…,见图 1-2、图 1-3、图 1-4.

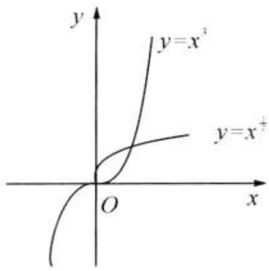

图 1 - 3

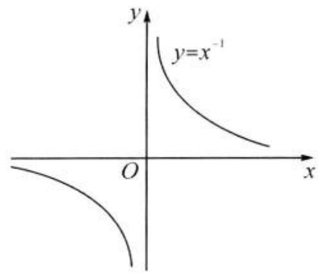

图 1 - 4

3. 指数函数

$$y = a^x, (a > 0, a \neq 1)$$

例如:$y = 2^x, y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, y = e^x, \cdots$,见图 1 - 5.

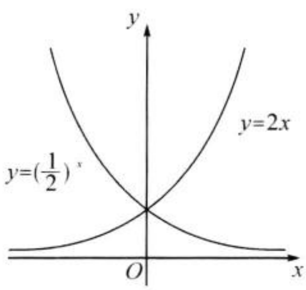

图 1 - 5

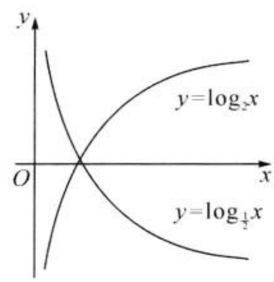

图 1 - 6

4. 对数函数

$$y = \log_a x, (a > 0, a \neq 1)$$

例如:$y = \log_2 x, y = \log_e x = \ln x, y = \log_{10} x = \lg x, \cdots$,见图 1 - 6.

5. 三角函数

三角函数包括:正弦 $y = \sin x$,余弦 $y = \cos x$,正切 $y = \tan x$,余切 $y = \cot x$,见图 1 - 7、图 1 - 8.

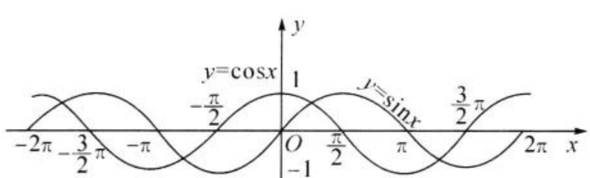

图 1 - 7

6. 反三角函数

反三角函数包括:反正弦 $y = \arcsin x$,反余弦 $y = \arccos x$,反正切 $y = \arctan x$,反余切 $y = \operatorname{arccot} x$.

(二) 初等函数

定义 1.8　由基本初等函数通过有限次四则运算或有限次复合得到的函数称为初等

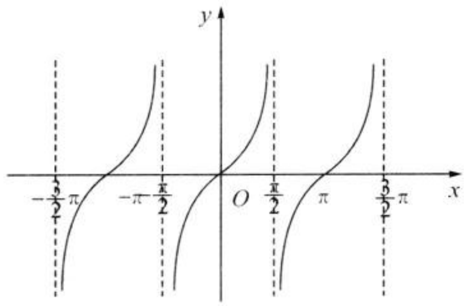

图 1 - 8

函数.

例 1.1.15 函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 是否为初等函数,若是,请指出函数是怎样由基本初等函数通过四则运算或复合得到的.

解 将函数按四则运算或复合分解:

$$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1}) \xrightarrow{\text{复合}} \begin{cases}\ln v \\ v=x+\sqrt{x^2+1} \xrightarrow{\text{加}} \begin{cases} x \\ \sqrt{x^2+1} \xrightarrow{\text{复合}} \begin{cases} u=x^2+1 \xrightarrow{\text{加}} \begin{cases} x^2 \\ 1 \end{cases} \\ \sqrt{u} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

所以,函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 为初等函数.

(三) 特殊函数

1. 绝对值函数

$$y=|f(x)|$$

由于 $y=|x|$ 是由 $|x|=\sqrt{x^2}$ 由 $\sqrt{u}$ 与 $u=x^2$ 复合得到,所以 $|x|$ 为初等函数.

2. 幂指函数

$$y=[f(x)]^{g(x)}$$

由于 $y=x^x=e^{\ln x^x}=e^{x\ln x}$ 由 e^u 与 $u=x\ln x$ 复合而成,$u=x\ln x$ 由 x 与 $\ln x$ 乘积而成,所以 x^x 为初等函数.

3. 分段函数

若一个函数的定义区间可以分成几个部分,每一部分中函数表达式各不相同,则称此函数为分段函数.

分段函数一般不是初等函数.

第二节　函数的极限

一、数列的极限

(一) 数列

按顺序排列的数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，称为数列，记为 $\{a_n\}$. 数列中的每一个数均称为该数列的一项，其中 a_n 称为数列的通项或一般项.

例 1.2.1　写出下列数列的前五项.

(1) $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$;　(2) $\{(-1)^n\}$;　(3) $\left\{\dfrac{2n+1}{n^2}\right\}$;　(4) $\left\{\dfrac{1+(-1)^n}{n}\right\}$.

解　(1) $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}$;

(2) $-1, 1, -1, 1, -1$;

(3) $3, \dfrac{5}{4}, \dfrac{7}{9}, \dfrac{9}{16}, \dfrac{11}{25}$;

(4) $0, 1, 0, \dfrac{1}{2}, 0$.

例 1.2.2　根据所给数列前几项，写出下列数列的一般项 a_n.

(1) $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \cdots$;　(2) $\dfrac{1}{4}, \dfrac{4}{9}, \dfrac{9}{16}, \dfrac{16}{25}, \dfrac{25}{36}, \cdots$;

(3) $2, -\dfrac{4}{2}, \dfrac{8}{3}, -\dfrac{16}{4}, \dfrac{32}{5}, \cdots$;　(4) $\dfrac{4}{2}, \dfrac{8}{6}, \dfrac{16}{24}, \dfrac{32}{120}, \dfrac{64}{720}, \cdots$.

解　(1) $a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}, n = 1, 2, 3, \cdots$;

(2) $a_n = \dfrac{n^2}{(n+1)^2}, n = 1, 2, 3, \cdots$;

(3) $a_n = (-1)^{n-1}\dfrac{2^n}{n}, n = 1, 2, 3, \cdots$;

(4) $a_n = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}, n = 1, 2, 3, \cdots$.

(二) 数列的极限

考察数列 $\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$:

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \cdots, \frac{101}{100}, \cdots, \frac{1001}{1000}, \cdots, \frac{n+1}{n}, \cdots$$

容易看出，在项数 n 沿着自然数 $1, 2, \cdots$ 的顺序无限增大的过程中(记作 $n \to \infty$)，数列的各项无限接近 1，我们将这一变化趋势称为极限.

定义 1.9(描述性定义) 当 n 无限增大时，数列 $\{a_n\}$ 无限接近常数 a，则称数列 $\{a_n\}$ **收敛**于 a，或**极限**存在，**极限值**为 a. 记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ 或 } a_n \to a \ (n \to \infty)$$

否则称数列 $\{a_n\}$ **发散**，或无极限. 例如

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

为了精确地表明"无限增大时"或"无限接近"的含义，我们进一步考察数列 $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$的各项与 1 的距离 $|a_n - 1| = \left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n}$.

当 $n = 1,2,3,4,\cdots,100,\cdots,1000,\cdots,n,\cdots$，距离

$$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{100},\cdots,\frac{1}{1000},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$$

可任意小.

也就是说，只要 n 足够大，就能使 $|a_n - 1|$ 小于事先给定的无论多么小的正数. 例如：给定 $\varepsilon = 0.0001$，则由

$$|a_n - 1| = \frac{1}{n} < \varepsilon = 0.0001$$

可得：$n = 10\,000$，即从第 10 001 项开始，数列各项的值均满足 $|a_n - 1| < \varepsilon$. 于是有

定义 1.10($\varepsilon - N$定义) 设 $\{a_n\}$ 是一个数列，a 为常数. 若 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，当 $n > N$ 时，恒有不等式

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ 成立,}$$

则称数列 $\{a_n\}$ **收敛**于 a，或**极限**存在，**极限值**为 a.

例 1.2.3 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

证 $\forall \varepsilon > 0$，因为 $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}$

所以，要使 $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$，只要 $\frac{1}{n} < \varepsilon$，即 $n > \frac{1}{\varepsilon}$ 即可

故可取 $N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$，满足定义

即：当 $n > N$ 时，恒有

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} = \frac{1}{[1/\varepsilon] + 1} < \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon \text{ 成立}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

例 1.2.4 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-n}{1+n} = -1$.

证 $\forall \varepsilon > 0$，因为