

高等数学

同步习题



東北大學出版社
Northeastern University Press

1316644

高等数学同步习题

主 编 刘 群 李 红
副主编 王新心 刘艳兰



淮阴师院图书馆1316644

东北大学出版社

• 沈 阳 •

© 刘 群 李 红 2007

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学同步习题 / 刘群, 李红主编. — 沈阳: 东北大学出版社, 2007.10 (2008.8 重印)

ISBN 978-7-81102-012-0

I. 高… II. ①刘… ②李… III. 高等数学—高等学校—习题 IV. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 157654 号

出 版 者: 东北大学出版社

地址: 沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号

邮编: 110004

电话: 024—83687331 (市场部) 83680267 (社务室)

传真: 024—83680180 (市场部) 83680265 (社务室)

E-mail: neuph @ neupress.com

http: // www. neupress. com

印 刷 者: 沈阳中科印刷责任有限公司

发 行 者: 东北大学出版社

幅面尺寸: 260mm×184mm

印 张: 9.25

字 数: 234 千字

出版时间: 2007 年 10 月第 1 版

印刷时间: 2008 年 8 月第 2 次印刷

责任编辑: 潘佳宁 刘宗玉

责任校对: 王 晓

封面设计: 唐敏智

责任出版: 杨华宁

ISBN 978-7-81102-012-0

定 价: 13.00 元

目 录

第一章 函数与极限.....	1
第一节 映射与函数.....	1
第二节 数列、函数的极限.....	4
第五节 极限的运算法则.....	5
第六节 极限存在的准则 两个重要极限.....	8
第七节 无穷小的比较	10
第八节 函数的连续性与间断点	12
第十节 闭区间上连续函数的性质	15
第二章 导数与微分	17
第一节 导数的概念	17
第二节 函数的求导法则	19
第三节 高阶导数	22
第四节 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数 相关变化率	24
第五节 函数的微分	27
第三章 微分中值定理及其应用	29
第一节 微分中值定理	29
第二节 洛必达法则	32
第三节 泰勒公式	34
第四节 函数的单调性与曲线的凹凸性	37

第五节 函数的极值与最大值最小值	40
第六节 函数图形的描绘	43
第七节 曲 率	44
第四章 不定积分	46
第一节 不定积分的概念与性质	46
第二节 换元积分法	49
第三节 分部积分法	54
第四节 有理函数的积分	57
第五章 定积分	62
第一节 定积分的概念与性质	62
第二节 微积分基本公式	64
第三节 定积分的换元法和分部积分法	65
第四节 反常积分	68
第六章 定积分的应用	70
第一节 定积分在几何上的应用	70
第三节 定积分在物理学上的应用	72
第七章 空间解析几何与向量代数	73
第一节 向量及其线性运算	73
第二节 数量积 向量积	75
第三节 曲面及其方程 第四节 空间曲线及其方程	76
第五节 平面及其方程	78
第六节 空间直线及其方程	79

第八章 多元函数微分学	81
第一节 多元函数的基本概念	81
第二节 偏导数	83
第三节 全微分	84
第四节 多元复合函数的求导法则	85
第五节 隐函数的求导公式	87
第六节 微分法在几何上的应用	89
第七节 方向导数与梯度	91
第八节 多元函数的极值及其求法	92
第九章 重积分	94
第一节 二重积分的概念及性质	94
第二节 二重积分的计算法	96
第三节 三重积分	99
第四节 重积分的应用	102
第十章 曲线积分与曲面积分	104
第一节 对弧长的曲线积分	104
第二节 对坐标的曲线积分	105
第三节 格林公式及其应用	107
第四节 对面积的曲面积分	109
第五节 对坐标的曲面积分	110
第六节 高斯公式 通量与散度	111
第七节 斯托克斯公式 环流量与旋度	112
第十一章 无穷级数	114
第一节 常数项级数的概念和性质	114

第二节	常数项级数的审敛法·····	115
第三节	幂级数·····	119
第四节	函数展开成幂级数·····	123
第七节	傅立叶级数·····	125
第八节	一般周期函数的傅立叶级数·····	127
第十二章	微分方程·····	129
第一节	微分方程的基本概念·····	129
第二节	可分离变量的微分方程·····	130
第三节	齐次方程·····	131
第四节	一阶线性微分方程·····	132
第五节	全微分方程·····	134
第六节	可降阶的高阶微分方程·····	135
第七节	高阶线性微分方程·····	136
第八节	常系数齐次线性微分方程·····	137
第九节	常系数非齐次线性微分方程·····	139

第一章 函数与极限

第一节 映射与函数

一、填空题.

1. 函数 $f(x) = \sqrt{4-x^2} + \lg(x-1)$ 的定义域为 $[1, 2]$.

2. 设 $f(x+3) = \frac{x+1}{x+2}$, 则 $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$.
 令 $x+3=t$, 则 $t-1$ 代入 $\frac{t-1}{t+2}$

3. $y = \sqrt{\log_a\left(\frac{1}{x}\right)}$ 是由函数_____复合而成的.

4. $f(x) = \lg(x + \sqrt{x^2+1})$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 是_____ (奇、偶) 函数.

5. 设 $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x>0, \\ 1, & x=0, \\ x^2, & x<0, \end{cases}$ 则 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

二、选择题.

1. $f(x) = x(e^x - e^{-x})$ 在其定义域 $(-\infty, +\infty)$ 是[C].

- (A) 有界函数; (B) 单调增函数;
(C) 偶函数; (D) 奇函数.

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 则当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时,

$f(f(x)) = [B]$.

- (A) 0; (B) 1;

- (C) $f(x)$; (D) 不存在.

3. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 且 $0 < a \leq \frac{1}{2}$, 则 $f(x+a) + f(x-a)$ 的定义域为[C].

- (A) $[-a, 1-a]$; (B) $[-a, 1+a]$;
(C) $[a, 1-a]$; (D) $[a, 1+a]$.

4. 已知 $f(u) = \begin{cases} u^2-1, & u < 0, \\ u^2+1, & u \geq 0, \end{cases}$ $u = \lg x$, 则函数 $f(u(10))$
 $= [D]$.

- (A) -1; (B) 1; (C) 0; (D) 2.

5. 下列函数是初等函数的是[D].

(A) $y = \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x \cdots \sqrt{x}}}}$; (B) $y = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1, \\ 0, & x = 1; \end{cases}$

(C) $y = \left[\frac{\sin(e^x-1)}{\lg(1+x^2)} \right]^{\frac{1}{2}}$; (D) $y = \sqrt{-2 - \cos x}$.

三、解答题.

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y = \frac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+2}$;
 *解: $x \neq \pm 1$, $x \geq -2$
 $[-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$*

(2) $y = \frac{\lg(3-x)}{\sqrt{|x|-1}}$;
 *解: $3-x > 0 \Rightarrow x < 3$
 $|x|-1 > 0 \Rightarrow x < -1$ 或 $x > 1$
 $(1, 3) \cup (-\infty, -1)$*

班级_____ 姓名_____ 学号_____

$$(3) y = \frac{\arccos \frac{2x-1}{7}}{\sqrt{x^2-x-6}}.$$

2. 设 $f(x) = \frac{x}{x-1}$, 验证 $f(f(f(x))) = f(x)$, 并求 $f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$, $x \neq 0, x \neq 1$.

3. 求函数 $y = \begin{cases} x, & -\infty < x < 1, \\ x^2, & 1 \leq x \leq 4, \\ 2^x, & 4 < x < +\infty \end{cases}$ 的反函数.

4. 写出下列函数是由哪些简单函数复合而成的:

$$(1) y = a \sqrt[3]{1+x};$$

$$(2) y = \lg^2 \arccos x^3;$$

$$(3) y = \sqrt{\ln \sqrt{x}}.$$

5. 设 $\phi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} 2-x^2, & |x| \leq 1, \\ 2, & |x| > 1, \end{cases}$
求 $\phi(\psi(x)), \psi(\phi(x))$.

班级_____ 姓名_____ 学号_____

四、证明题.

1. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-\infty, +\infty)$ 内的任意函数, 证明:

$\phi(x) = f(x) + f(-x)$ 为偶函数, $\psi(x) = f(x) - f(-x)$ 为奇函数.

2. 设对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$, 存在常数 $c \neq 0$, 使得 $f(x+c) = f(x)$. 证明 $f(x)$ 是周期函数.

第二节 数列、函数的极限

一、填空题.

1. 数列 $x_n = 3 + \frac{2}{n^2}$ 的极限为_____.

2. 数列 $u_n = n \sin \frac{n\pi}{2}$ 的极限为_____.

3. 设 $x_n = \frac{2n-1}{n+1}$, 则 $N = \underline{\hspace{2cm}}$, 使得当 $n > N$ 时, 不等式 $|x_n - 2| < 10^{-4}$ 成立; 则 $N = \underline{\hspace{2cm}}$, 使得当 $n > N$ 时, 不等式 $|x_n - 2| < \epsilon$ 成立.

4. 当 $x \rightarrow 2$ 时, $y = 3x + 1 \rightarrow 7$. 为了使 $|y - 7| < 0.01$, 则 δ 应不大于_____.

5. 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y = \frac{x}{x+1} \rightarrow 1$. 为了使 $|y - 1| < 0.001$, 则 X _____; 为了使 $|y - 1| < \epsilon$, 则 X _____.

三、根据数列或函数极限的定义证明.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n^2-2} \cos n = 0$.

2. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = 4$.

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \sqrt{x^2 - x}) = 0$.

三、设 $f(x) = \begin{cases} 3x+2, & x \leq 0, \\ x^2+1, & 0 < x \leq 1, \\ \frac{2}{x}, & 1 < x, \end{cases}$ 分别讨论 $x \rightarrow 0$ 及 $x \rightarrow 1$

时 $f(x)$ 的极限是否存在.

班级_____ 姓名_____ 学号_____

四、设 $f(x) = \frac{2+e^x}{2-e^x}$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

第五节 极限的运算法则

一、求下列极限.

1. $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - x + 5).$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 - x + 5}.$

五、对于数列 $\{x_n\}$, 若 $x_{2k-1} \rightarrow a$, $x_{2k} \rightarrow a (k \rightarrow +\infty)$, 证明:
 $x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty).$

3. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{x+1} \rightarrow \frac{-1-1}{-1+1} = 0.$

二、求下列极限.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 5x^2}{x^3 - x^2} \rightarrow 0$

班级_____ 姓名_____ 学号_____

2. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1}.$

3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 2x - 8}.$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} \quad (m, n \in \mathbb{Z}).$

三、求下列极限。

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{x^2}.$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+7} - 3}.$

3. $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}.$

四、求下列极限。

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 3x + 4}{7x^2 - 6x + 1}.$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 3x + 4}{7x^2 - 6x + 1}.$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 3x + 4}{7x^3 - 6x + 1}.$

班级_____ 姓名_____ 学号_____

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^{20}(3n+1)^{30}}{(5n+1)^{50}}.$

五、求下列极限.

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right).$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}).$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2+3+\cdots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \right).$

六、设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b \right) = \frac{1}{2}$, 求常数 a, b .

七、设 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-x+1} - ax - b) = 0$, 试确定常数 a, b .

第六节 极限存在的准则 两个重要极限

一、利用夹逼准则求下列极限.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}.$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right).$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} \right)^n.$

二、利用单调有界定理求下列极限.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n n!}{n^n}.$

2. 已知 $x_1 = \sqrt{a}$, $x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}$, $x_3 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}$, $\cdots$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ($a > 0$).

3. 设 $x_0 > 0$, $x_{n+1} = \frac{2(1+x_n)}{2+x_n}$ ($n = 0, 1, 2, \cdots$), 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

班级_____ 姓名_____ 学号_____

三、利用重要极限求下列极限.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \tan \frac{\pi x}{2}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{1 - \frac{x^2}{\pi^2}}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^x.$$

8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^x$.

9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3-2x}{2-2x} \right)^x$.

10. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x}{1+x} \right)^{\frac{4}{x-1}}$.

第七节 无穷小的比较

一、选择题.

1. 下列命题正确的是[].

- (A) 无穷小量是一个很小的数;
- (B) 无穷大量是一个很大的数;
- (C) 无穷大量必是无界变量;
- (D) 无界变量必是无穷大量.

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 变量 $y = x \sin \frac{1}{x}$ [].

- (A) 为无穷小量;
- (B) 为无穷大量;
- (C) 极限为 1;
- (D) 振荡无极限.

3. 当[]时, 变量 $y = \frac{x^2-1}{x(x-1)}$ 为无穷大量.

- (A) $x \rightarrow -1$;
- (B) $x \rightarrow 1$;
- (C) $x \rightarrow 0$;
- (D) $x \rightarrow \infty$.

4. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列无穷小中[]与 x 是等价无穷小量.

- (A) $2x^2 - a$;
- (B) $\sqrt[3]{x}$;
- (C) $\ln(1+x)$;
- (D) $\sin^2 x$.

5. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小 $\sin(2x+x^2)$ 与 x 比较是[]无穷小量.

- (A) 较高阶;
- (B) 较低阶;
- (C) 同阶但非等价;
- (D) 等价.

6. 设 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{x^2} - (ax^2 + bx + c)$ 是比 x^2 高阶的无穷小, 其中 a, b, c 是常数, 则[].

- (A) $a=1, b=2, c=0$;
- (B) $a=c=1, b=0$;
- (C) $a=c=2, b=0$;
- (D) $a=b=1, c=0$.