高等学校优秀教材辅导丛书

GAODENG XUEXIAO YOUXIUJIAOCAI FUDAOCONGSHU

- 知识点深入总结
- 各章习题详解详析
- 相关习题课后训练

高等数学
知识要点与习题解析

主编 沈 艳 主审 孙广毅

哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

高等数学

高等学校优秀教材辅导丛书

高等数学
知识要点与习题解析

（配同济大学第六版教材·高教版）

主　编　沈　艳
副主编　贾念念　邱　威　凌焕章　樊赵兵
主　审　孙广毅

哈尔滨工程大学出版社

内容简介

本书为高等数学课程辅导书，与同济大学应用数学系编写的《高等数学》（第六版）教材相配套，每章由知识要点、典型题解析、综合与提高、书后习题解析、同步训练题、同步训练题答案六部分组成。

本书结构新颖，选取的例题和习题几乎涵盖了高等数学中的所有知识点、题型、解题技巧和方法。无论对于高等数学的初学者还是广大考研学生，本书都是一本较好的辅导教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学知识要点与习题解析/沈艳主编.—哈尔滨：哈尔滨工程大学出版社，2008.4
ISBN 978-7-81133-288-9-03

Ⅰ.高… Ⅱ.沈… Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 048906 号

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区东大直街 124 号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传　　真 0451-82519699
经　　销 新华书店
印　　刷 肇东粮食印刷厂
开　　本 787mm×960mm　1/16
印　　张 34
字　　数 760 千字
版　　次 2010 年 1 月第 2 版
印　　次 2010 年 1 月第 3 次印刷
定　　价 40.00 元
http://press.hrbeu.edu.cn
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

Preface 前言

高等数学是理工科各专业的一门重要基础理论课。为帮助学生学好高等数学，给学生们提供一本既能集中各类相关参考书中的优点，又能与现今通用教材相吻合、篇幅适中的辅导教材，编者参照工科类本科数学基础课程教学基本要求于2005年第一次出版了本书。随着课堂教学中教学时数、教学基本要求和教学内容等的变化，以及考研大纲的基本要求的不断调整，同时为进一步修正、完善、优化本书，我们在第一版的基础上对该书进行了第一次修订。本辅导书可作为高等学校工科、理科（非数学专业）高等数学课程的辅导材料，也可作为参加研究生入学考试的理工科考生系统复习高等数学的辅导材料。

为适应同济大学出版的《高等数学》（第六版）内容的调整，我们也相应地对原书章节的次序进行了同步调整。调整后，由凌焕章（1，2，8章）、樊赵兵（9章）、贾念念（10，11章）、沈艳（4，5，6章）、邱威（3，7，12章）修订。全书由沈艳统稿并定稿，哈尔滨工程大学理学院孙广毅主审。

本书自第一版出版以来，受到了学生和教师的欢迎和好评，并给我们提出了许多宝贵意见和建议，为我们修订工作顺利进行提供了极大帮助。在本书的修订过程中，我们也得到了哈尔滨工程大学理学院老师多方面的支持，在此一并表示感谢。

由于编者水平有限，本书难免存在不足之处，恳请广大读者批评指正。

编　者

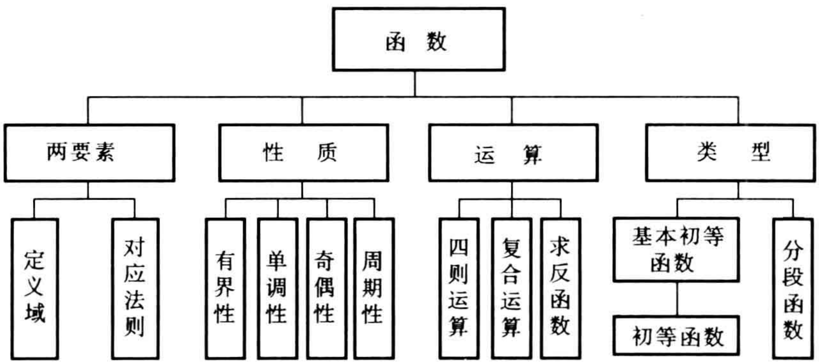
2009年10月

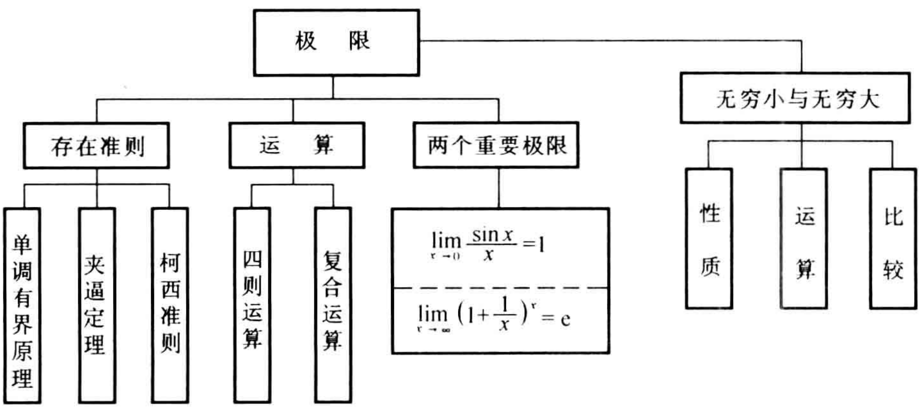
Contents 目录

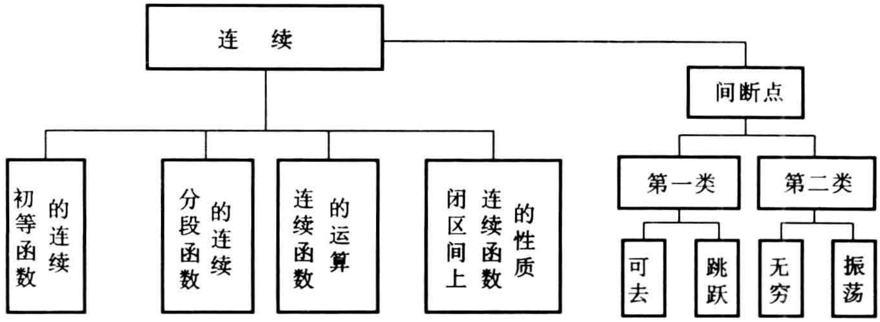
第1章 函数与极限

知识要点

1.1 内容提要框图







1.2 知识点与要求

1.理解函数的概念,掌握函数的表示法,并会建立简单应用问题中的函数关系式.

2.了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3.理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.

4.掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.

5.理解极限的概念,理解函数左极限与右极限的概念,以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.

6.掌握极限的性质及四则运算法则.

7.掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法.

8.理解无穷小、无穷大的概念,掌握无穷小的比较方法,会用等价无穷小求极限.

9.理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.

10.了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

典型题解析

例 1.1 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$,求:

(1) $y = f(3x+1)$ 的定义域; (2) $y = f(\sin x)$ 的定义域.

解 (1) 由 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$ 知 $0 \leqslant 3x+1 \leqslant 1$,解得 $-\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 0$,故 $y = f(3x+1)$ 的定义域为 $\left[-\frac{1}{3}, 0\right]$.

(2) 同(1)有:$0 \leqslant \sin x \leqslant 1$,解得 $2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$,故 $y = f(\sin x)$

的定义域为 $\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty}[2k\pi,(2k+1)\pi]$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

例 1.2 判断下列函数的奇偶性.

(1)$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；　(2)$f(x)=\begin{cases}x(2-x) & x>0\\ x(2+x) & x\leqslant 0\end{cases}$.

解 (1) 由于 $f(-x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=\ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=-f(x)$,故 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 为奇函数.

(2) 当 $x>0$ 时,$f(-x)=-x(2+x)=-f(x)$;

当 $x<0$ 时,$f(-x)=-x(2-x)=-f(x)$;

当 $x=0$ 时,$f(0)=0$.

故无论 x 取何值时,都有 $f(-x)=-f(x)$,因此 $f(x)$ 为奇函数.

评注 ①讨论一函数为奇、偶函数时,必须其定义域关于原点对称,例 $f(x)=x,x\in(-3,2)$,此时无法讨论 $f(x)$ 的奇偶性.

② 分段函数的奇偶性要分段来讨论,此时要综合考虑 x 和 $-x$ 所处的段来讨论.

例 1.3 判断下列哪些函数是周期函数.若是,指出它们的最小正周期.

(1)$y=\cos^2x$；　(2)$y=\sin x^2$；　(3)$y=\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x$；　(4)$y=x-[x]$.

解 (1) 由于 $\cos^2(x+\pi)=\cos^2x$,因此 $y=\cos^2x$ 是周期函数,其最小正周期为 π;

(2)$y=\sin x^2$ 不是周期函数;

(3)$y=\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x$ 是周期函数,其最小正周期为 2π;

(4)$y=x-[x]$ 为周期函数,其最小正周期为 1.

评注 ① 不是所有的周期函数都有最小正周期.例 $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbf{Q}\\ 0 & x\in\mathbf{Q}^c\end{cases}$,任一有理数均为其周期,故没有最小正周期.

② 两个周期函数的和不一定是周期函数,例 $f_1(x)=\sin x,f_2(x)=x-[x]$ 均为周期函数,但 $f_1(x)+f_2(x)$ 不是周期函数.

例 1.4 设 $\varphi(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ x & x>0\end{cases}$ 及 $\psi(x)=\begin{cases}x & x\leqslant 0\\ -x^2 & x>0\end{cases}$,求 $\varphi[\psi(x)]$ 及 $\psi[\varphi(x)]$.

解 由题给条件知 $\varphi[\psi(x)]=\begin{cases}0 & \psi(x)\leqslant 0\\ \psi(x) & \psi(x)>0\end{cases}$,而 $\psi(x)\leqslant 0$,故 $\varphi[\psi(x)]=0$.

由题给条件知 $\psi[\varphi(x)]=\begin{cases}\varphi(x) & \varphi(x)\leqslant 0\\ -[\varphi(x)]^2 & \varphi(x)>0\end{cases}$,故 $\psi[\varphi(x)]=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ -x^2 & x>0\end{cases}$.

评注 对分段函数求复合函数,应注意自变量和中间变量的取值范围.

例 1.5 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$;　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})$;

(3) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi}{2}x$;　　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^x$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-2}{x-5}=-\dfrac{1}{2}$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}+1}=\frac{1}{2};$$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi}{2}x=\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\cdot\cot\dfrac{\pi}{2}(1-x)\xlongequal{y=1-x}\lim\limits_{y\to 0}y\cdot\cot\dfrac{\pi}{2}y$

$$=\lim_{y\to 0}y\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{2}y}{\sin\frac{\pi}{2}y}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin\frac{\pi}{2}y}=\frac{2}{\pi};$$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{3}\cdot\frac{3}{x-1}\cdot x}=e^3$.

评注　①带有根号,且出现 $\infty-\infty$ 或 $0-0$(分母上)型的极限,多使用分子(分母)有理化,如(2).

②$1^\infty$ 型极限,可利用重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$,如(4). 一般情形为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$,则

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=\lim_{x\to x_0}[1+f(x)-1]^{g(x)}=\lim_{x\to x_0}[1+(f(x)-1)]^{\frac{1}{f(x)-1}\cdot[f(x)-1]\cdot g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-1]\cdot g(x)}$$

例 1.6　计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})\cdot\sqrt[3]{n^2}$;　　　(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}\sin n!}{n+1}$;

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$;　　　(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}n(\sqrt[n]{a}-1)\quad(a>1)$.

解　(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})\cdot\sqrt[3]{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}=\dfrac{1}{3}$;

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}}{n+1}=0$,　$|\sin n!|\leqslant 1$,故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}\sin n!}{n+1}=0$;

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n\sin\pi(\sqrt{n^2+1}-n)$

$$=\lim_{n\to+\infty}(-1)^n\cdot\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=0;$$

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}n(\sqrt[n]{a}-1)=\lim\limits_{n\to+\infty}n\cdot(e^{\frac{1}{n}\ln a}-1)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{n}\ln a}-1}{\frac{1}{n}\ln a}\cdot\ln a=\ln a$.

评注 ①(1) 中运用了分子有理化.一般情形的有理化公式为

$$\sqrt[m]{n+K}-\sqrt[m]{n}=\frac{K}{\sqrt[m]{(n+K)^{m-1}}+\sqrt[m]{n(n+K)^{m-2}}+\cdots+\sqrt[m]{n^{m-1}}}=\frac{K}{\sum\limits_{i=0}^{m-1}\sqrt[m]{n^{i}(n+K)^{m-1-i}}}$$

②(2) 中运用了无穷小量乘以有界量仍为无穷小量.

③(4) 中运用了等价无穷小 $e^x-1\sim x\ (x\to 0)$.常见的等价无穷小为:$x\to 0$时,$\sin x\sim x,\tan x\sim x,\ln(1+x)\sim x,1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,e^x-1\sim x,(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x,\arcsin x\sim x,\arctan x\sim x$.

例 1.7 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+\frac{1}{n}}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+\frac{2}{n}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+\frac{n}{n}}}\right)$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}\quad(a>1)$.

解 (1) $\frac{n}{\sqrt{n^2+\frac{n}{n}}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+\frac{1}{n}}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+\frac{2}{n}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+\frac{n}{n}}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+\frac{1}{n}}}$,而

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+\frac{n}{n}}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+\frac{1}{n}}}=1$,故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+\frac{1}{n}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+\frac{n}{n}}}\right)=1$.

(2) 令 $a=1+\alpha\ (\alpha>0)$,则有 $0\leqslant\frac{n}{a^n}=\frac{n}{(1+\alpha)^n}=\frac{n}{C_n^0+C_n^1\alpha+\cdots+C_n^n\alpha^n}\leqslant\frac{n}{C_n^2\alpha^2}$,又

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{C_n^2\alpha^2}=0$,故,$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{a^n}=0$.

评注 本题使用了夹逼定理,即 $b_n\leqslant a_n\leqslant c_n$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=A$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$.使用夹逼定理时,经常使用不等式的放缩.

例 1.8 设 $x_1=\sqrt{2},x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}\ (n=1,2,\cdots)$.证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求之.

证明 首先 $x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}>x_1$,假设 $x_k>x_{k-1}$,则

$$x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}>\sqrt{2+x_{k-1}}=x_k$$

由数学归纳法原理知,x_n 单调递增.又 $x_1=\sqrt{2}<2$,假设 $x_k<2$,则 $x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<2$,由数学归纳法原理知:$x_n<2$.

由单调有界原理知:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,令其为 A.对 $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$ 两边求极限得:$A=\sqrt{2+A}$,解得:$A=2$ 或 $A=-1$(舍去),故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

评注 由递推关系给出的数列,在求其极限时,通常是在递推关系式两边求极限,然后求解,但求极限之前必须证明其极限存在,此时多使用单调有界原理.

例 1.9 当 $x\to 0^+$ 时,$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ 是 x 的______阶无穷小量.

解 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt[8]{x}}=1$,故 $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ 为 x 的 $\frac{1}{8}$ 阶无穷小量.