代數學

下卷

教育部審定

中學校用

共和國教科書

代數學

卷下

商務印書館出版

教育部審定批詞

中學校共和國教科書
代數學

此書頗簡單明曉准作爲中學校用教科書

(160)

Republican Series
ALGEBRA
For Middle Schools
Approved by the Board of Education
Commercial Press, Ltd.

中華民國二年十一月初版
中華民國九年十二月十三版

(共和國教科書)代數學二冊(中學校用)
(卷下)軟布面每冊定價大洋柒角
紙面每冊定價大洋陸角
(外埠酌加運費匯費)

編纂者 紹興駱師曾
校訂者 紹興壽孝天
發行者 商務印書館
印刷所 上海北河南路北首寶山路 商務印書館
發行所 上海棋盤街中市 商務印書館
分售處 商務印書分館 北京 天津 保定 奉天 吉林 龍江 濟南 太原 開封 洛陽 西安 南京 杭州 蘭谿 安慶 蕪湖 南昌 漢口 長沙 常德 成都 重慶 瀘縣 梧州 福州 廣州 潮州 香港 桂林 雲南 貴陽 張家口 新嘉坡

中華民國二年十月七日稟部註冊十一月四日領到文字第一百十八號執照

編輯大意

一本書備中學校代數學教科之用。

一按中學校課程標準。代數之教科。始於第一學年。至第三學年而畢。每年與算術幾何。同時並授。是三年內代數所佔之時間。適得數學全科之半。本書之分量。卽依此標準以定之。庶教材與時間。適相應而便於誦習。

一本書分爲上下兩卷。上卷至二次方程而止。應用最廣。下卷自高次方程以上。理論稍深。惟中學程度。應以普通代數爲範圍。故闡發處無不力求簡易。其繁賾深奧之理論。應屬於高等代數者。仍不預爲侵越。

一代數學來自歐西。各種譯名。證以西文。可免歧誤。然若另編中西對照表。未免多費翻檢之時刻。今於名詞初見之處。卽用西文原名。附註於後。舉目可得。似於學者更爲便利。

一文字排列之位置。與編輯宏恉。本屬無涉。然適宜與否。於閱者之感覺。亦非毫無關係。試以一貫之算式。而分列於左右兩葉。以一氣之文字。而跨排於前後兩面。則披閱之時。必有感其不便者。本書仍照算術教科書之例。凡單數各面。篇幅終止之處。亦爲文字終止之處。無非爲閱者圖其便利而已。

中學校教科書

代數學下卷目次

中學校教科書

代數學下卷

第七篇　乘冪乘根及指數

第一章　乘冪

118. 正整數之乘冪　設 m, n, p 皆為正整數。

由 §4　　$a\times a\times a\times$ 至 n 因數 $=a^n$,

由 §33　　$a^m\times a^n\times a^p\times\cdots\cdots\cdots=a^{m+n+p+\cdots\cdots}$

以 $(a^m)^n$ 表 a^m 之 n 乘冪。則 $(a^m)^n$ 者為 a^m 自乘至 n 次。故其指數 m 須累加至 n 次。卽可以 n 乘 m 為其指數。

故　　$(a^m)^n=a^{mn}$.

故某數之乘冪自乘若干次。等於此數之乘冪。而以二指數之積為指數。

119. 積之乘冪　設 n, p, q, r 皆為正整數。

則 $(ab)^n=ab\times ab\times ab\times$ 至 n 因數

$=(a\times a\times a\times$ 至 n 因數$)(b\times b\times b\times$ 至 n 因數$)$

$=a^nb^n$.

仿此。$(abcd\cdots)^n=a^nb^nc^nd^n\cdots\cdots$.

$(a^pb^qc^r\cdots)^n=a^{np}b^{nq}c^{nr}\cdots\cdots$.

故積之乘冪。等於其各因數同乘冪之積。

120.　分數之乘冪　設 n, p, q, r, s 皆爲正整數。

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{a^2}{b^2},\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^3=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{a^3}{b^3}.$$

仿此。$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n},\qquad \left(\frac{a^p}{b^q}\right)^n=\frac{a^{np}}{b^{nq}},$

$$\left(\frac{a^pb^q}{c^rd^s}\right)^n=\frac{a^{np}b^{nq}}{c^{nr}d^{ns}}.$$

故分數之若干乘冪。等於一分數。以原分母之同乘冪爲分母。原分子之同乘冪爲分子。

121.　負數之乘冪　由乘法之指數定則。

$$(-a)^2=(-a)(-a)=a^2.$$

$$(-a)^3=(-a)^2(-a)=a^2(-a)=-a^3,$$

$$(-a)^4=(-a)^3(-a)=(-a^3)(-a)=a^4,$$

$$(-a)^5=(-a)^4(-a)=a^4(-a)=-a^5.$$

故負數之偶數冪爲正數。奇數冪爲負數。

又設 n 爲任何正整數。則 $2n$ 可表偶數一切之形。$2n+1$ 可表奇數一切之形。因得下式。

$$(+a)^{2n}=a^{2n},\qquad (-a)^{2n}=a^{2n},$$

$$(+a)^{2n+1}=a^{2n+1},\qquad (-a)^{2n+1}=-a^{2n+1}.$$

故就正數負數總括言之。凡偶數冪爲正數。奇數冪與原數同其符號。

122.　多項式之乘冪　可依乘法之公式求之。玆再記其公式於下。

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2.$$

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3.$$

$$(a\pm b)^4=a^4\pm 4a^3b+6a^2b^2\pm 4ab^3+b^4.$$

$$(a\pm b)^5=a^5\pm 5a^4b+10a^3b^2\pm 10a^2b^3+5ab^4\pm b^5.$$

$$(a\pm b\pm c)^2=a^2+b^2+c^2\pm 2ab\pm 2ac+2bc.$$

$$(a\pm b\mp c)^2=a^2+b^2+c^2\pm 2ab\mp 2ac-2bc.$$

$$(a\pm b\pm c)^3=a^3\pm b^3\pm c^3\pm 3a^2b\pm 3a^2c\pm 3b^2c+3b^2a$$
$$+3c^2a\pm 3c^2b+6abc.$$

$$(a\pm b\mp c)^3=a^3\pm b^3\mp c^3\pm 3a^2b\mp 3a^2c\mp 3b^2c+3b^2a$$
$$+3c^2a\pm 3c^2b-6abc.$$

此種公式。去左邊之括號而得右邊之式。謂之展開 *Expand*。其條叚次序。有一定之法則。容後第十二篇中詳述其理。此處但默記之可耳。

問題三十二

去下列各式之括號。

1. $(2a^2)^3$.　　2. $(-3a^2b^3)^2$.　　3. $(-xy^2z^3)^{2n}$.

4. $(-xy^mz^{2m})^{2n+1}$.　　5. $\left(\dfrac{5ab^2}{3x^2y^3}\right)^3$.　　6. $\left(\dfrac{-2x^2y^3z}{3a^2b^3}\right)^2$.

展開下列各式。

7. $(2a+b)^2$.　　8. $(3a-2b)^2$.　　9. $(a^2+2c^2)^3$.

10. $(5x^2-2y^3)^3$.　　11. $(2x-3y^2)^4$.　　12. $(3a+4b)^4$.

13. $(2+3a^2x^2-4a^4x^4)^2$.　　14. $(2-3x+x^2)^2$.

15. $(2x-y+3z)^2$.　　16. $(2+x^2-x)^3$.

第二章 乘根

123. 乘根之性質 一數之平方根恆有二。其一爲正數。他一爲負數。如 a 之平方根爲 $\sqrt{a}$ 及 $-\sqrt{a}$。惟通常以正數之方根表之。故僅以 $\sqrt{a}$ 表 a 之平方根。

一數之立方根恆有三。

由前§112例4。知1之立方根有三。卽 $1, \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}$。若以希臘字 ω（讀爲亞美加）代其任一虛數。

如 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$。　　則 $\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}$.

如 $\omega=\dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}$.　　則 $\omega^2=\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$.

故1之立方根爲 $1, \omega, \omega^2$。

又如求 a^3 之立方根。則 $x^3=a^3$。卽 $\dfrac{x^3}{a^3}=1$。卽 $\left(\dfrac{x}{a}\right)^3=1$。而適合於此方程式中 $\dfrac{x}{a}$ 之値。有 $1, \omega, \omega^2$ 之三種。故此方程式之根。卽 a^3 之立方根。爲 $a, a\omega, a\omega^2$。

由是一有理數之立方根恆有三。其中一爲實數。他二爲含虛數之數。惟通常以實數之方根表之。故僅以 $\sqrt[3]{a}$ 表 a 之立方根。

同理。任何數之 n 乘根有 n 個。此定理之證明。在初等代數學範圍之外。故本書不載。以後凡如 $\sqrt[n]{a}$ 者。皆表 a 之 n 乘根之實數。若實數有正負二種。則皆表其正數。

由是凡正數之偶數乘根。其實根必有正負二個。

凡有理數之奇數乘根。其實根僅有一個。

凡負數之偶數乘根。皆含虛數。

124. 整數之乘根　由§118之理。某數之n乘冪。即以n乘其指數。反之。則某數之n乘根。即以n除其指數。

故　$$(\sqrt[n]{a})^n=\sqrt[n]{a^n}=a.$$

則　$$(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{mn}=\{(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^m\}^n=\{\sqrt[n]{a}\}^n=a.$$

即　$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}.$$

故某數若干乘根之若干乘根。等於此數之乘根。而以二個根指數之積爲根指數。

125. 積之乘根　由§119。積之乘冪。等於其各因數同乘根之積。

故　$$(\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}\times\sqrt[n]{c}\times\cdots\cdots)^n=(\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n(\sqrt[n]{c})^n\cdots\cdots$$
$$=abc\cdots\cdots$$

即　$$\sqrt[n]{abc\cdots}=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}\times\sqrt[n]{c}\cdots\cdots$$

故積之乘根。等於其各因數同乘根之積。

126. 分數之乘根　由§120。

則　$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}=\frac{a}{b}.$$

即　$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

故分數之若干乘根。等於一分數。以原分母之同乘根爲分母。原分子之同乘根爲分子。

127. 開平方法 *Extraction of square root* 求多項式之平方根。其簡單者。可應用§122中$(a\pm b)^2$及$(a\pm b\pm c)^2$等之公式。由視察而知之。其複雜者。則用開平方之普通法則。茲先述用公式求平方根之法。

例1. 求$4x^4-12x^2y^2+9y^4$之平方根。

$$4x^4-12x^2y^2+9y^4=(2x)^2-2(2x^2)(3y^2)+(3y^2)^2$$

$$=(2x^2-3y^2)^2\text{〔由}(a-b)^2\text{之公式〕}.$$

故所求之平方根爲$2x^2-3y^2$。

〔注意〕平方根有正負二種.茲用其正者.如用其負.則變其符號卽得.

例2. 求$9a^2+4b^2+c^2+12ab+6ac+4bc$之平方根。

$$\text{原式}=(3a)^2+(2b)^2+c^2+2(3a)(2b)+2(3a)c+2(2b)c$$

$$=(3a+2b+c)^2\text{〔由}(a+b+c)^2\text{之公式〕}.$$

故所求之平方根爲$3a+2b+c$。

$$\text{或原式}=9a^2+12ab+4b^2+6ac+4bc+c^2$$

$$=(3a)^2+2(3a)(2b)+(2b)^2+2(3a+2b)c+c^2$$

$$=(3a+2b)^2+2(3a+2b)c+c^2\text{〔由}(a+b)^2\text{之公式〕}$$

$$=(3a+2b+c)^2\text{〔由}(a+b)^2\text{之公式〕}.$$

128. 茲述開平方之普通法則。先就$a^2+2ab+b^2$之平方根爲$a+b$考之。

先將原式之各項。順某文字之降冪列之。但於此例.以順a之降冪排列爲便。

首項a^2之平方根爲a。以此爲所求平方根之首項。將a之平方卽a^2從原式減之。得餘式$2ab+b^2$。次以平方根首項之二倍卽$2a$。除此餘式之首項。得b。以此爲所求平方根之第二項。將根之首項之二倍與其第二項相加卽$2a+b$。以根之第二項卽b乘之。得$2ab+b^2$。從上之餘式減之。其差爲0。故演算至此完畢。

$$
\begin{array}{r|l}
 & a^2+2ab+b^2\,(a+b \\
 & a^2 \\
\hline
2a+b) & 2ab+b^2 \\
 & 2ab+b^2 \\
\hline
\end{array}
$$

上例若第二餘式不爲0。則以$a+b$之二倍。除第二餘式。其得商之首項。爲所求平方根之第三項。於此項加$a+b$之二倍。其和再以此項乘之。而由第二餘式減去。如是次第求之。至無餘式而止。

例 1.　求$a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$之平方根。

先依a, b, c之次序。順其降冪列之。後用上法開方。

$$
\begin{array}{l}
a^2+2ab+2ac+2ad+b^2+2bc+2bd+c^2+2cd+d^2\,(a+b+c+d \\
a^2 \\
\hline
2a+b)\ 2ab+2ac+2ad+b^2+2bc+2bd+c^2+2cd+d^2 \\
\qquad\quad 2ab \qquad\qquad\qquad +b^2 \\
\hline
2a+2b+c)\ 2ac+2ad \qquad +2bc+2bd+c^2+2cd+d^2 \\
\qquad\qquad\quad 2ac \qquad\qquad\quad +2bc \qquad\quad +c^2 \\
\hline
2a+2b+2c+d)\ 2ad \qquad\quad +2bd \qquad +2cd+d^2 \\
\qquad\qquad\qquad\quad 2ad \qquad\quad +2bd \qquad +2cd+d^2 \\
\hline
\end{array}
$$

故所求之平方根爲$a+b+c+d$。

例 2.　求 $4x^6+80x^4-8x+60x^3+32x^5+1$ 之平方根。

先順 x 之降冪列之。後用上法開方。

$$
\begin{array}{rl}
 & 4x^6+32x^5+80x^4+60x^3\qquad -8x+1\,(2x^3+8x^2+4x-1\\
 & 4x^6\\
\hline
4x^3+8x^2) & 32x^5+80x^4+60x^3\qquad -8x+1\\
 & 32x^5+64x^4\\
\hline
4x^3+16x^2+4x) & 16x^4+60x^3\qquad -8x+1\\
 & 16x^4+64x^3+16x^2\\
\hline
4x^3+16x^2+8x-1) & -\ 4x^3-16x^2-8x+1\\
 & -\ 4x^3-16x^2-8x+1\\
\hline
\end{array}
$$

故所求之平方根爲 $2x^3+8x^2+4x-1$。

例 3.　求 $x^6+4x^5-10x^3+4x+1$ 之平方根。

$$
\begin{array}{rl}
 & x^6+4x^5\qquad -10x^3\qquad +4x+1\,(x^3+2x^2-2x-1\\
 & x^6\\
\hline
2x^3+2x^2) & 4x^5\qquad -10x^3\qquad +4x+1\\
 & 4x^5+4x^4\\
\hline
2x^3+4x^2-2x) & -4x^4-10x^3\qquad +4x+1\\
 & -4x^4-\ 8x^3+4x^2\\
\hline
2x^3+4x^2-4x-1) & -\ 2x^3-4x^2+4x+1\\
 & -\ 2x^3-4x^2+4x+1\\
\hline
\end{array}
$$

故所求之平方根爲 x^3+2x^2-2x-1。

〔注意〕　算術中開一數之平方.有能開盡者.有不能開盡者.而代數學中開一式之平方亦然.故凡用上法無論開至何處.其餘式終不爲 0 者.卽可知原式不能開盡.但用根號加於原式以表示之可也.例如 b^2-4ac 之平方根.可以 $\sqrt{b^2-4ac}$ 表之.

129. 數目開平方　由前節之法。可知算術中開平方法之理由。茲示一例於下。

例. 求576081之平方根。

$$
\begin{array}{rl}
 & 57\,|\,60\,|\,81\,(\underset{a}{700}+\underset{b}{50}+\underset{c}{9} \\
a^2= & \underline{49\ \ 00\ \ 00} \\
2a+b=1450) & 8\ \ 60\ \ 81 \\
(2a+b)b= & \underline{7\ \ 25\ \ 00} \\
2a+2b+c=1509) & 1\ \ 35\ \ 81 \\
(2a+2b+c)c= & \underline{1\ \ 35\ \ 81}
\end{array}
$$

故所求之平方根爲759。

130. 開立方法 *Extraction of cube root*　求多項式之立方根。其簡單者。可應用§**122**中$(a\pm b)^3$之公式由視察而知之。其複雜者。則須用開立方之普通法則。茲先述用公式求立方根之法。

例 **1**.　求 $x^3-6x^2+12x-8$ 之立方根。

原式 $=(x)^3-3(x)^2(2)+3(x)(2)^2-(2)^3$

$=(x-2)^3$〔由$(a-b)^3$之公式〕.

故所求之立方根爲$x-2$。

例 **2**.　求$27x^6+54x^5y+36x^4y^2+8x^3y^3$之立方根。

原式 $=(3x^2)^3+3(3x^2)^2(2xy)+3(3x^2)(2xy)^2+(2xy)^3$

$=(3x^2+2xy)^3$〔由$(a+b)^3$之公式〕.

故所求之立方根爲$x(3x+2y)$。

131. 玆述開立方之普通法則。先就$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$之立方根爲$a+b$考之。

先將原式順某文字(例如a)之降冪列之。

$$
\begin{array}{lr|l}
 & & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\,(a+b\\
 & & a^3\\
\cline{3-3}
 & 3a^2 & 3a^2b+3ab^2+b^3\\
3a+b & & \\
 & (3a+b)b & \\
\cline{2-2}
 & 3a^2+3ab+b^2 & 3a^2b+3ab^2+b^3\\
\cline{3-3}
\end{array}
$$

首項a^3之立方根爲a。以此爲所求立方根之首項。將a之立方卽a^3從原式減之。得餘式$3a^2b+3ab^2+b^3$。次以立方根首項a之平方之三倍卽$3a^2$。除此餘式之首項$3a^2b$。得b。爲所求立方根之第二項。次於根之首項之三倍卽$3a$。加此項卽b。其和再以此項乘之。得$(3a+b)b$。將此式加於$3a^2$。得$3a^2+(3a+b)b$。乃以根之第二項b乘之。得積從餘式減去。其差爲0。故演算至此完畢。

上例若第二餘式不爲0。則將根之首次二項和之平方而三倍之卽$3(a+b)^2$。以其首項除第二餘式之首項。得商爲根之第三項。次於根之首次二項和之三倍卽$3(a+b)$。加根之第三項。其和再以根之第三項乘之。得積加於$3(a+b)^2$。乃將其和以根之第三項乘之。得積從第二餘式減去。若猶有餘式。則仍如前求之。直至無餘而止。

例 1. 求 $a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+3ac^2+6abc+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$ 之立方根。

$$
\begin{array}{l|l}
 & \underline{a+b+c} \\
 & a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+3ac^2+6abc+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3 \\
 & \underline{a^3} \\
3a^2 & 3a^2b+3a^2c+3ab^2+3ac^2+6abc+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3 \\
\quad \underline{(3a+b)b} & \\
3a^2+3ab+b^2 & \underline{3a^2b \qquad +3ab^2 \qquad\qquad +b^3} \\
\qquad \underline{b^2} & 3a^2c \qquad +3ac^2+6abc \qquad +3b^2c+3bc^2+c^3 \\
3(a+b)^2 & \\
\quad \underline{\{3(a+b)+c\}c} & \\
3a^2+6ab+3b^2 & \\
\quad +3ac+3bc+c^2 & \underline{3a^2c \qquad +3ac^2+6abc \qquad +3b^2c+3bc^2+c^3}
\end{array}
$$

故所求之立方根爲 $a+b+c$。

〔注意〕 $(3a+b)b$, $3a^2+3ab+b^2$ 與 b^2 之和. 等於 $3(a+b)^2$.

例 2.　求 $x^6-3x^5+9x^4-13x^3+18x^2-12x+8$ 之立方根。

$$
\begin{array}{l|l}
 & x^6-3x^5+9x^4-13x^3+18x^2-12x+8\,(x^2-x+2 \\
 & \underline{x^6} \\
3x^4 & -3x^5+9x^4-13x^3+18x^2-12x+8 \\
\quad \underline{-x(3x^2-x)} & \\
3x^4-3x^3+x^2 & \underline{-3x^5+3x^4-\quad x^3} \\
\qquad \underline{x^2} & 6x^4-12x^3+18x^2-12x+8 \\
3(x^2-x)^2 & \\
\qquad \underline{2(3x^2-3x+2)} & \\
3x^4-6x^3+9x^2-6x+4 & \underline{6x^4-12x^3+18x^2-12x+8}
\end{array}
$$

故所求之立方根爲 x^2-x+2。