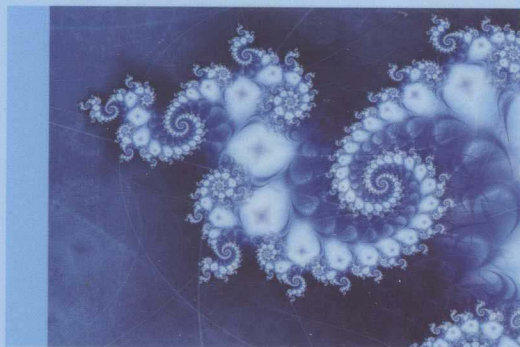




创新能力培养教程丛书

周宁医 编著

高中数学的 探究性课题



上海教育出版社
SHANGHAI EDUCATIONAL
PUBLISHING HOUSE



创新能力培养教程丛书

周宁医 编著

高中数学的 探究性课题



上海教育出版社
SHANGHAI EDUCATIONAL
PUBLISHING HOUSE

图书在版编目(CIP)数据

高中数学的探究性课题 / 周宁医编著. —上海:

上海教育出版社, 2012.5

ISBN 978-7-5444-4112-4

I. ①高... II. ①周... III. ①中学数学课—高中—教学参考资料 IV. ①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第094189号

责任编辑 赵海燕 张莹莹

封面设计 郑 艺

创新能力培养教程丛书

高中数学的探究性课题

周宁医 编著

出版发行 上海世纪出版股份有限公司
上 海 教 育 出 版 社
易文网 www.ewen.cc

地 址 上海永福路 123 号

邮 编 200031

经 销 各地新华书店

印 刷 昆山市亭林印刷有限责任公司

开 本 787×1092 1/16 印张 11.5 插页 1

版 次 2012 年 7 月第 1 版

印 次 2012 年 7 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5444-4112-4/G·3209

定 价 28.00 元

(如发现质量问题,读者可向工厂调换)

序

老友邹一心编审，送来周宁医老师的一叠书稿。甫一打开，便觉得与众不同。

在应试教育阴影下的数学出版物，每每被考试绑架。一些比较新鲜活泼、富有创意的数学内容，动辄以“超纲”加以废弃。周老师的这一本，反其道而行之。书中所涉及的课题，背后多有图论、集合论、拓扑学、编码学、分形、最优化等数学学科的支撑。于是问题来了，高中数学教学课堂用得上吗？学生学得会吗？对考试有帮助吗？然而，你只要静心读一下，就会觉得这些研究性课题，对于高中数学优等生来说，不只是一盘丰盛的数学大餐，更是贴近课程标准的一种思维训练，甚至也是应付考试的一项利器。

周老师的这本著作中的课题，既有生活情境和科学背景的数学模型，也有体现抽象数学思维的数学结晶。但是，就其使用的数学内容来说，仍然都在当前“数学课程标准”的范围之内，只是在思维深度上有更高的要求而已。这不正可以成为我们所倡导“探究性”教学所需要的载体吗？全书所收集的 23 个课题，已经按照高中一年级第一学期到高中三年级第一学期的五个学期的教学进度进行编排，每个学期不超过 5 个课题。如果教师从中挑选几个加以实施，并不会增加学生太多的负担，却在数学视野的开拓、数学思维的深度、数学技能的训练上大有裨益。能力提高了，应付普通的考试自然游刃有余了，更不要说在对付灵活多变的自主招生试题

时体现的价值了。

说到这里,不免想到数学英才教育.我们提倡教育公平,是指受教育机会上的社会公平.但是,人的智力有先天的差异,必须因材施教,理直气壮地发展英才数学教育.中国普通学生的数学基础比西方国家要好,但是优秀中学生的数学创新能力,则显示出巨大不足.这只要看看美国各州举办的几所“数学与科技中学”的超难数学课程、法国高中的玄学课程,以及俄罗斯的寄宿制高中里的高深数学课程,就知道我们应努力之所在了.

研究性学习,是上海首先提出、然后在全国推广的教学方式.周宁医老师沿着这个方向迈出了坚实的又一步,值得重视与鼓励.

因作者之请,写了一些感想,权作为序.

丁德立

辛卯年深秋于华东师范大学数学教育研究所

前言

《上海市中小学数学课程标准(试行稿)》提出:“数学课程应为学生探索求知创设合适的情景,重视从问题出发,设计以解决问题的活动为基础的数学认知过程;要建立合理的数学学习训练系统,要向学生提供丰富的学习资源、自主探究的时间以及必要的指导和帮助,使学生的认知获得、过程经历、情感态度与价值观提升,在数学学习中得到和谐统一。”基于《上海市中小学数学课程标准(试行稿)》的要求,上海市二期课改教材《高级中学课本 数学(试用本)》中增加了栏目——“探究与实践”,旨在培养高中学生的实践能力和创新能力。

当下社会对人才的评价标准已经发生了根本性变化,创新人才的最重要的特征不是掌握更多的已有知识,而是具有学习新知识的能力,会运用知识去创新。因此,真正意义上的“学习的革命”,是发现一种更有效培养人的创新精神、实践能力和创新能力的学习模式,提倡把“知识”放在问题中,放到现实中,放到一定的情景中,让学生通过收集信息、分析信息、处理信息和运用信息,主动地探索、发现、体验和解决问题,从而培养获取新知识和利用知识进行创新的能力。

实践能力是指培养学生独立学习的能力,为其自主地发展和适应社会奠定基础。目标取向是能通过数学的操作实验或理性实验进行合情推理,大胆猜想,严格求证;能利用现代信息技术提供的条件,对比较复杂的数学问题进行特殊研究。它的实施程序:(1) 师生提出活动课题;(2) 围绕课题开展多种活动,学生在活动中表现自己;(3) 活动的总结和反思。

探究能力是研究性学习强调学生探究未知世界的能力,为其能够创造出更多的新的思维产品奠定基础。目标取向是会利用已有的知识经验,尝试解决新情境中的数学问题;有较强的数学应用意识,熟悉基本的数学模型,对来自生活实际和其他学科的简单的数学问题,能综合地、灵活地运用有关知识和方法,进行数学建模、求解和解

释. 它的实施程序:(1) 教师或学生发现和提出疑难问题或研究性课题;(2) 学生提出解决问题的假设;(3) 学生寻找材料,教师帮助提供材料;(4) 学生运用材料和理论说明和证明;(5) 学生或者教师总结,反思研究过程和探究过程的经验教训.

数学教育的理想境界是:“以人为本”,充分体现“人人学有价值的数学,人人都能获得必需的数学”;“不同的人数学上得到不同的发展”. 然而,现实的数学教育在高考的要求下显得有点功利,似乎为高考而学习数学. 纵观学生的数学素养,普遍存在着:“记忆有余,理解不足;接受有余,思考不足;操练有余,探究不足;模仿有余,创新不足”.

鉴于“理想”与“现实”的差距,《高中数学的探究性课题》是在《高级中学课本 数学(试用本)》的“探究与实践”栏目的基础上,遵循教材的逻辑体系,依据学生已有的知识背景,实施高中数学教材“二次”开发的研究,以体现数学的科学价值、应用价值和人文价值,增强学生对数学的学习兴趣和信心,引导学生对数学本质的理解,让学生进行有益的实践和富有创造的探究,并进行广泛的交流合作. 秉承国际国内数学教育发展趋势,努力实现:

给学生一个空间,让他们自己去想象;给学生一个条件,让他们自己去发挥;

给学生一个时间,让他们自己去安排;给学生一个问题,让他们自己去解决;

给学生一个机遇,让他们自己去抓住;给学生一个冲突,让他们自己去讨论;

给学生一个权利,让他们自己去选择;给学生一个方向,让他们自己去创造.

《高中数学的探究性课题》中的 23 个课题,是作者在上海建平中学历时五年的“数学模块”教学课题中精选出来的,都是作者收集整理或独立研究的成果. 探究性课题教学每周安排一课时,由学生自主参加,以学生探究活动为主. 它是对数学基础型课程知识的补充和拓展,在内容要求、知识深度与广度和活动形式的灵活程度等方面都有较高要求;它不仅重视知识与技能,而且重视学生的情感态度和价值观. 五年的教学实践证明:探究性课题教学有利于培养学生的知识运用能力、问题转化能力、方法选择能力、论证求解能力、类比推广能力、总结反思能力、模仿操作能力和探究发现能力.

本书可与高中数学教材配套同步使用,也可作为高级中学的选修课、拓展课、创新实验课和高校自主招生辅导的教材,还可以作为“高中应用数学竞赛”、“丘成桐中学数学奖”辅导的参考资料.

本书在写作过程中曾得到邹一心编审、康士凯老师和陈双双老师的指导,在此深表感谢. 由于作者水平所限,不当之处依然难免,恳切期盼广大专家、同行和读者赐教. (E-mail: zhny2006@163.com)

目 录

第一章 高中一年级第一学期课题	1
课题 1 书刊号码中的数学问题	3
课题 2 超市问题探究	7
课题 3 哥尼斯堡七桥问题	13
课题 4 最佳位置的设置问题	19
课题 5 高斯函数	30
第二章 高中一年级第二学期课题	39
课题 1 中国进出口贸易总额的预测问题	41
课题 2 最短路径问题	52
课题 3 十字路口中的数学问题	56
课题 4 公共绿地喷水龙头的布局	61
课题 5 路灯设置优化问题	71
第三章 高中二年级第一学期课题	81
课题 1 游戏中的数学问题	83
课题 2 商场购物中的数学问题	88
课题 3 斐波那契数列	91
课题 4 雪花曲线的研究	98
课题 5 社区广场天棚的设计	106

第四章 高中二年级第二学期课题	111
课题 1 圆锥曲线的光学性质的探究	113
课题 2 动圆圆心轨迹的探究	121
课题 3 圆锥曲线动态结构的探究	133
课题 4 三元数	146
第五章 高中三年级第一学期课题	157
课题 1 分割问题	159
课题 2 由抛物线分割平面问题引发的猜想	164
课题 3 卫星信号覆盖地球问题的探究	168
课题 4 磨光变换	174
参考文献	178

第一章

高中一年级第一学期课题

- 课题 1 书刊号码中的数学问题
- 课题 2 超市问题探究
- 课题 3 哥尼斯堡七桥问题
- 课题 4 最佳位置的设置问题
- 课题 5 高斯函数

课题 1 书刊号码中的数学问题

知识平台：数论初步

1. 书号及其真假的简单识别

书号的全称是“中国标准书号”，也称“ISBN 号”，它由标识符 ISBN 和 13 位数字（分为 5 段）组成，在每一本书封底的定价旁边或条形码上，我们都能见到它的身影，它是图书的身份证，例如，作者的一本专著《高中数学知识、方法和实践》（基础智能分册），其书号是 ISBN 978-7-5022-3004-3。

我们该如何识别一个书号的真假呢？下面介绍一个简单的方法。

书号的最后 1 位数字称为校验码，它是由 13 位数字书号的前 12 位数字采用模数 10 加权算法计算得到的，其功能就在于对书号的正确与否进行检验。举例说明如下（表 1-1）：

表 1-1

13 位数字书号	ISBN 978-7-5022-3004-3											
取前 12 位数字	9	7	8	7	5	0	2	2	3	0	0	4
各位数字对应的加权值 ^[1]	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3
各位数字与对应加权值的乘积	9	21	8	21	5	0	2	6	3	0	0	12
12 组乘积的和数	87											
和数除以模数 10 的余数	$87 \div 10 = 8 \text{ 余 } 7$											
模数 10 减去余数所得的校验码 ^[2]	$10 - 7 = 3$											

需要提醒注意的是，2007 年 1 月 1 日前国内出版的图书书号只有 10 位数字（分为 4 段，与 13 位数字的书号相比，缺少“978”这一段），其校验码的算法有所不同。举例说明如下（表 1-2）：

[1] 各位数字对应的加权值固定不变，从前往后交替出现。

[2] 如果计算的结果为 10，则校验码取作 0。

表 1-2

10 位数字书号	ISBN 7-80741-077-9								
取前 9 位数字	7	8	0	7	4	1	0	7	7
各位数字对应的加权值 ^[1]	10	9	8	7	6	5	4	3	2
各位数字与对应加权值的乘积	70	72	0	49	24	5	0	21	14
9 组乘积的和数	255								
和数除以模数 11 的余数	$255 \div 11 = 23$ 余 2								
模数 11 减去余数所得的校验码 ^[2]	$11 - 2 = 9$								

如果一本图书的书号的最后一位数字,与我们用上述方法计算出来的数字不相吻合,那么该图书必是非法图书.

2. 刊号及其真假的简单识别

刊号与书号的情况,有许多相同点,但更多的是不同点,请大家注意比较.

刊号的全称是“中国标准连续出版物号”,它由“国际标准连续出版物号”(也称国际刊号,ISSN 号)和“国内统一连续出版物号”(也称国内刊号,CN 号)两部分组成.例如,作者发表的第一篇论文的刊物是华东师范大学《数学教学》杂志,其刊号为 $\frac{\text{ISSN } 0488-7387}{\text{CN } 31-1024/G1}$. 其中 ISSN 0488-7387 是国际刊号; CN 31-1024/G1 是国内刊号.

刊号的真假也有类似的简单识别方法.

8 位数字的国际刊号的最后 1 位数字就是校验码,它是由前 7 位数字采用模数 11 加权算法计算得出的,其功能就在于对国际刊号的正确与否进行检验.举例说明如下(表 1-3):

表 1-3

8 位数字书号	ISSN 0488-7387						
取前 7 位数字	0	4	8	8	7	3	8
各位数字对应的加权值 ^[3]	8	7	6	5	4	3	2
各位数字与对应加权值的乘积	0	28	48	40	28	9	16
7 组乘积的和数	169						
和数除以模数 11 的余数	$169 \div 11 = 15$ 余 4						
模数 11 减去余数所得的校验码 ^[4]	$11 - 4 = 7$						

[1] 各位数字对应的加权值固定不变,从前往后依次是 10 到 2.

[2] 如果计算的结果为 11,那么校验码取作 0;如果计算的结果为 10,那么校验码取作 X.

[3] 各位数字对应的加权值固定不变,从前往后依次是 8 到 2.

[4] 如果计算的结果为 11,那么校验码取作 0;如果计算的结果为 10,那么校验码取作 X.

如果一本期刊的国际刊号的最后一位数字,与我们用上述方法计算出来的数字不相吻合,那么该期刊必定是非法期刊.

课题实践

1. 某图书的书号为 ISBN 978 - 7 - 5064 - 2595 - 7,请你鉴定该图书的真假.
2. 某图书馆一本合法图书于 2007 年 1 月 1 日以前出版,由于读者借阅频繁,致使书号的检验码磨损,能看见的书号为: ISBN 7 - 80099 - 922 -,请你完整写出该图书的书号.
3. 某报刊亭出售一种杂志,期刊号为: $\frac{\text{ISSN } 1673 - 3373}{\text{CN } 31 - 1963/\text{Z}}$. 请你鉴定该期刊的合法性,并说明理由.

参考答案或提示

1.

表 1 - 4

13 位数字书号	ISBN 978 - 7 - 5064 - 2595 - 7											
取前 12 位数字	9	7	8	7	5	0	6	4	2	5	9	5
各位数字对应的加权值	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3
各位数字与对应加权值的乘积	9	21	8	21	5	0	6	12	2	15	9	15
12 组乘积的和数	123											
和数除以模数 10 的余数	$123 \div 10 = 12 \text{ 余 } 3$											
模数 10 减去余数所得的校验码	$10 - 3 = 7$											

所以,该图书是合法图书.

2.

表 1 - 5

10 位数字书号	ISBN 7 - 80099 - 922 -								
取前 9 位数字	7	8	0	0	9	9	9	2	2
各位数字对应的加权值	10	9	8	7	6	5	4	3	2
各位数字与对应加权值的乘积	70	72	0	0	54	45	36	6	4
9 组乘积的和数	287								
和数除以模数 11 的余数	$287 \div 11 = 26 \text{ 余 } 1$								
模数 11 减去余数所得的校验码	$11 - 1 = 10$								

所以,该图书的书号为 ISBN 7 - 80099 - 922 - X.

3. 表 1-6

8 位数字书号	ISSN 1673 - 3373						
取前 7 位数字	1	6	7	3	3	3	7
各位数字对应的加权值	8	7	6	5	4	3	2
各位数字与对应加权值的乘积	8	42	42	15	12	9	14
7 组乘积的和数	142						
和数除以模数 11 的余数	$142 \div 11 = 12$ 余 10						
模数 11 减去余数所得的校验码	$11 - 10 = 1$						

该期刊的检验码是“3”，合法期刊的检验码应该是“1”，所以该期刊是非法期刊.

课题 2 超市问题探究

知识平台：函数

数学源于生活、根植于生活. 数学教学就要从人们的生活经验和已有的知识点出发, 联系生活讲数学, 把生活经验数学化, 数学问题生活化, 把数学知识融入到非常熟悉的生活中. 这让我们深刻体会到生活离不开数学, 数学是解决生活问题的钥匙.

下面我们以生活中的具体事例来介绍如何应用数学来解决生活问题.

1. 问题提出

随着人民生活水平的提高和生活节奏的加快, 越来越多的超市出现在我们的身边. 超市之所以受到紧张忙碌的现代人的欢迎, 是因为它既省时又方便. 也许你也曾经有这样的体会: 有时购完物去收银台交款时, 总要排很长的队去等候, 特别是在周末的时候, 有时付款所花去的时间要超过购物的时间. 这就给我们带来很大的不便, 也许你在想, 如果收银台再多一些就好了, 那么如何建立一个相关的数学模型, 来解决这个问题呢?

某人去超市购物付款, 请你用学过的数学知识为超市设计一个方案: 既使超市发挥最大效益, 又使购物人尽快付款.

2. 数学建模

某人去超市购物, 付款时看到该超市有若干个收款台, 假设一个收款台单位时间内可处理的人数为 n 人, 此时已有 m 人等待付款, 如果此人想在 t 时间内付好钱款, 那么该超市应开启多少个收款台, 既使每个收款台发挥的效益最大, 又使购物人尽快付款?

提出如下的假设: 收款台处理每个人的时间都相同, 人足够多, 可设收款台的个数为 x 个, 一个收款台单位时间内可处理人数为 n 人, m 为 t 时间内要处理的总客流量, y 为排队人数. 所以 nt 为一个收款台 t 时间内处理的人数, ntx 为 x 个收款台 t 时间内共处理的人数. 用总客流量(m)减去共处理的人数(ntx), 得没有处理的人数, 即排队的人数(y). 所以可以推导出如下关系:

$$y = m - ntx.$$

3. 数据调查

如何建立这种函数关系式? 要得到它必须有数据, 才能建立合理的关系式, 通过调查获得数据如表 2-1 至表 2-6 所示:

表 2-1

2011 年 10 月 8 日	星期六	7:25~7:50	
已付款人数(人)	收款台个数(个)	时间(分)	总人数(人)
21	3	4	27
22	4	4	28
24	4	4	22
29	5	4	29
19	3	4	25

表 2-2

2011 年 10 月 15 日	星期六	7:15~7:54	
已付款人数(人)	收款台个数(个)	时间(分)	总人数(人)
38	4	5	42
35	4	5	37
40	4	5	38
24	3	5	39
31	4	5	36
29	5	5	40

表 2-3

2011 年 10 月 22 日	星期六	7:52~8:30	
已付款人数(人)	收款台个数(个)	时间(分)	总人数(人)
26	4	4	31
32	5	4	35
30	5	4	42
32	4	4	29
19	3	4	23
25	3	4	21

表 2-4

2011 年 10 月 29 日	星期六	7:13~7:47	
已付款人数(人)	收款台个数(个)	时间(分)	总人数(人)
23	3	4	28
21	3	4	27