



全国十二大考研辅导机构指定用书

2014 李永乐·王式安考研数学系列

数学历年真题 权威解析

数学三

权威升级版

主 编 李永乐 王式安

编委 王式安 刘喜波 李永乐 武忠祥
(按姓氏笔划排序)

权威名师与命题专家联手打造
多角度讲解试题开拓解题思路
详尽地归纳总结典型解题方法

考试知识复习与能力培养并重
分析解答透彻易懂更有针对性
综合提高运用知识的分析能力

国家行政学院出版社





全国十二大考研辅导机构指定用书

2014 李永乐·王式安考研数学系列

数学历年真题 权威解析

数学三

权威升级版

主 编 李永乐 王式安

编委 王式安 刘喜波 李永乐 武忠祥
(按姓氏笔划排序)

国家行政学院出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学历年真题权威解析. 数学三/李永乐,王式安主编. —北京:
国家行政学院出版社,2013.3
ISBN 978-7-5150-0724-3

I. ①数… II. ①李… ②王… III. ①高等数学—研究生—入
学考试—题解 IV. ①013—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 049279 号

敬告读者

本书封面贴有专用防伪标识,凡有防伪标识
的为正版图书,请读者注意识别。

书 名:数学历年真题权威解析(数学三)
主 编:李永乐 王式安
责任编辑:姚敏华
装帧设计:金榜图文设计室
出版发行:国家行政学院出版社
(北京市海淀区长春桥路 6 号 100089)
电 话:(010)68920640 68929037
编 辑 部:(010)68928761 68929009
印 刷:保定华泰印刷有限公司
开 本:787mm×1092mm 1/16
印 张:19.25
字 数:446 千字
版 次:2013 年 4 月第 1 版
印 次:2013 年 4 月第 1 次印刷
书 号:ISBN 978-7-5150-0724-3
定 价:42.00 元

图书如有印装质量问题,请与印刷厂联系调换 电话:(010)51906740
版权所有 侵权必究

· 前言 ·

从真题中你能够了解一个真实的考研数学,寻找考研数学的规律

真题是教育部考试中心一届又一届命题组老师们集体智慧的结晶,题目经典,又有规律可循。为了帮助广大考生能够在较短的时间内,准确理解和熟练掌握考研数学考试的出题方式和解题规律,全面提高解题能力,进而更好地驾驭考试,本书编写团队依据15年的命题与阅卷经验,并结合近10年的考研辅导和研究精华,精心编写了本书,真正起到帮助同学们提高综合分析和综合解题的能力。

历年来,研究生入学考试数学各学科知识点没有太大变化,而且各学科考查的重难点比较稳定,都是往年考试反复考查的内容,依据往年考题把握了这些重难点,我们就等于成功了一半。练真题,反复揣摩是有效把握这些重难点的最佳途径。考生们可以思考考过的知识点会再从什么角度命题,如何与没有考过的知识点结合起来考查,进而复习没有考过的知识点,这就可以从深度、广度上全方位把握知识点了,也因此,真题能够最有效的暴露我们的不足和复习误区,提供更有有效的复习思路和策略,甚至可以说,真题就是最好的“辅导老师”,它告诉我们考试会考什么,怎么考,反过来又指导我们思考如何应对,也只有真题准确体现了考试所要求的能力、方法。

真题对大部分考生来说都是“陌生”的。真题命制科学,经过命题人的反复推敲,是市面上的练习题所无法比拟的,市面上的练习题,难易适中,命制科学,贴近考试要求的很少,做真题,反复揣摩,这能节省我们宝贵的复习时间,达到事半功倍的效果。紧紧抓住真题,在考试时也可以使我们做到从容应对。

本书共分三篇。第一篇给出最新的真题和解析,目的是让读者了解最新考题的结构形式和难易程度,方便复习备考。第二篇是历年的试题。第三篇将真题按考点所属内容分类并进行解析,各章编排如下:

1. 本章导读

设置本部分的目的是使考生明白此章的考试内容和考试重点,从而复习时目标明确。

2. 试题特点

本部分总结此章的历年考试出题规律,分析可能的出题点。

3. 考题详析

本部分对历年真题的题型进行归纳分类,总结各种题型的解题方法。这些解法均来自各位专家多年教学实践总结和长期命题阅卷经验。针对以往考生在解题过程中普遍存在的问题及常犯

的错误,给出相应的注意事项,对每一道真题都给出解题思路的分析,以便考生真正的理解和掌握解题方法。

4. 练习题

数学复习离不开做题,只有适量的练习才能巩固所学的知识。为了使考生更好地巩固所学知识,提高实际解题能力,本书作者精心选取历年真题其他卷别的试题作为练习题,供考生练习,以便使考生在熟练掌握基本知识的基础上,达到轻松解答真题的水平。同时,练习题都配备了详细的参考答案和解析,以便考生遇到解答疑难问题时能及时得到最详尽的指导。

建议考生在使用本书时不要就题论题,而是要多动脑,通过对题目的练习、比较、思考,总结并发现题目设置和解答的规律性。请大家一定要在今后的复习中,时刻想到将各个方面的知识融会贯通,做好知识的串联和总结,从而检验自己对问题的把握程度,真正掌握应试解题的金钥匙,从而迅速提高知识水平和应试能力,取得理想分数。

另外,为了更好地帮助同学们进行复习,“李永乐考研数学辅导团队”特在新浪微博上开设答疑专区,同学们在考研数学复习中,如若遇到任何问题,即可在线留言,团队老师将尽心为你解答。请访问 weibo.com/金榜图书官方微博。

希望本书能对同学们的复习备考带来更大的帮助。对书中的不足和疏漏之处,恳请读者批评指正。

祝同学们复习顺利,心想事成,考研成功!

编者

2013年4月

· 目 录 ·

第一篇 最新真题

2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学(三)	1
2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学(三)参考答案	5

第二篇 历年试题

2012 年全国硕士研究生入学统一考试试题	14
2011 年全国硕士研究生入学统一考试试题	17
2010 年全国硕士研究生入学统一考试试题	20
2009 年全国硕士研究生入学统一考试试题	23
2008 年全国硕士研究生入学统一考试试题	26
2007 年全国硕士研究生入学统一考试试题	29
2006 年全国硕士研究生入学统一考试试题	32
2005 年全国硕士研究生入学统一考试试题	35

第三篇 真题解析

第一部分 微积分	38
第一章 函数 极限 连续	38
第二章 一元函数微分学	54
第三章 一元函数积分学	77
第四章 多元函数的微分学	93
第五章 二重积分	102

第六章	无穷级数	112
第七章	常微分方程与差分方程	121
	练习题参考答案	126
第二部分	线性代数	171
第一章	行列式	171
第二章	矩阵	175
第三章	向量	184
第四章	线性方程组	193
第五章	特征值与特征向量	204
第六章	二次型	212
	练习题参考答案	217
第三部分	概率论与数理统计	251
第一章	随机事件和概率	251
第二章	随机变量及其分布	254
第三章	多维随机变量的分布	257
第四章	随机变量的数字特征	271
第五章	大数定律和中心极限定理	279
第六章	数理统计的基本概念	280
第七章	参数估计	283
	练习题参考答案	288

第一篇 最新真题

绝密 ★ 启用前

考生编号	
姓 名	

2013 年全国硕士研究生入学统一考试

数 学 (三)

(科目代码:303)

考生注意事项

1. 答题前,考生须在试题册指定位置上填写考生姓名和考生编号;在答题卡指定位置上填写报考单位、考生姓名和考生编号,并涂写考生编号信息点。
2. 选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上,非选择题的答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内,写在其他地方无效。
3. 填(书)写必须使用黑色字迹签字笔或钢笔书写,涂写部分必须使用 2B 铅笔填涂。
4. 考试结束,将答题纸和试题册一并装入试题袋中交回。

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1) 当 $x \rightarrow 0$ 时,用“ $o(x)$ ”表示比 x 高阶的无穷小,则下列式子中错误的是

(A) $x \cdot o(x^2) = o(x^3)$.

(B) $o(x) \cdot o(x^2) = o(x^3)$.

(C) $o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$.

(D) $o(x) + o(x^2) = o(x^2)$.

(2) 函数 $f(x) = \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

(3) 设 D_k 是圆域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ 位于第 k 象限的部分,记 $I_k = \iint_{D_k} (y-x) dx dy (k = 1, 2, 3, 4)$, 则

(A) $I_1 > 0$.

(B) $I_2 > 0$.

(C) $I_3 > 0$.

(D) $I_4 > 0$.

(4) 设 $\{a_n\}$ 为正项数列,下列选项正确的是

(A) 若 $a_n > a_{n+1}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛.

(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛, 则 $a_n > a_{n+1}$.

(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则存在常数 $p > 1$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n$ 存在.

(D) 若存在常数 $p > 1$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n$ 存在, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(5) 设 A, B, C 均为 n 阶矩阵,若 $AB = C$, 且 B 可逆, 则

(A) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价.

(B) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价.

(C) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价.

(D) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价.

(6) 矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 相似的充分必要条件为

(A) $a = 0, b = 2$.

(B) $a = 0, b$ 为任意常数.

(C) $a = 2, b = 0$.

(D) $a = 2, b$ 为任意常数.

(7) 设 X_1, X_2, X_3 是随机变量, 且 $X_1 \sim N(0, 1), X_2 \sim N(0, 2^2), X_3 \sim N(5, 3^2), p_i = P\{-2 \leq X_i \leq 2\} (i = 1, 2, 3)$, 则

(A) $p_1 > p_2 > p_3$.

(B) $p_2 > p_1 > p_3$.

(C) $p_3 > p_1 > p_2$.

(D) $p_1 > p_3 > p_2$.

(8) 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且 X 和 Y 的概率分布分别为

X	0	1	2
Y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则 $P\{X+Y=2\} =$

(A) $\frac{1}{12}$.

(B) $\frac{1}{8}$.

(C) $\frac{1}{6}$.

(D) $\frac{1}{2}$.

二、填空题:9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9) 设曲线 $y = f(x)$ 与 $y = x^2 - x$ 在点 $(1, 0)$ 处有公共切线,则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{n}{n+2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(10) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $(z + y)^x = xy$ 确定,则 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,2)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(11) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

(12) 微分方程 $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$ 的通解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

(13) 设 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, $|\mathbf{A}|$ 为 \mathbf{A} 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式,若 $a_{ij} + A_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, 3)$ 则 $|\mathbf{A}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

(14) 设随机变量 X 服从标准正态分布 $N(0, 1)$, 则 $E(Xe^{2X}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题:15 ~ 23 小题,共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小,求 n 与 a 的值.

(16)(本题满分 10 分)

设 D 是由曲线 $y = x^{\frac{1}{3}}$, 直线 $x = a (a > 0)$ 及 x 轴所围成的平面图形, V_x, V_y 分别是 D 绕 x 轴, y 轴旋转一周所得旋转体的体积,若 $V_y = 10V_x$, 求 a 的值.

(17)(本题满分 10 分)

设平面区域 D 由直线 $x = 3y, y = 3x$ 及 $x + y = 8$ 围成, 计算 $\iint_D x^2 dx dy$.

(18)(本题满分 10 分)

设生产某产品的固定成本为 6000 元, 可变成本为 20 元/件, 价格函数为 $p = 60 - \frac{Q}{1000}$, (p 是单价, 单位: 元, Q 是销量, 单位: 件), 已知产销平衡, 求:

(I) 该商品的边际利润;

(II) 当 $p = 50$ 时的边际利润, 并解释其经济意义;

(III) 使得利润最大的定价 p .

(19)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $f(0) = 0$ 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, 证明

(I) 存在 $a > 0$, 使得 $f(a) = 1$;

(II) 对 (I) 中的 a , 存在 $\xi \in (0, a)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{1}{a}$.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$, 当 a, b 为何值时, 存在矩阵 \mathbf{C} 使得 $\mathbf{AC} - \mathbf{CA} = \mathbf{B}$, 并求所有矩阵 \mathbf{C} .

(21)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$, 记

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

(I) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$;

(II) 若 α, β 正交且均为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

(22)(本题满分 11 分)

设 (X, Y) 是二维随机变量, X 的边缘概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 在给定 $X =$

$x(0 < x < 1)$ 的条件下, Y 的条件概率密度为 $f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{3y^2}{x^3}, & 0 < y < x, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

(I) 求 (X, Y) 的概率密度 $f(x, y)$;

(II) 求 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)$;

(III) 求 $P\{X > 2Y\}$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

其中 θ 为未知参数且大于零. X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本.

(I) 求 θ 的矩估计量;

(II) 求 θ 的最大似然估计量.

2013 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(三) 参考答案

一、选择题

(1)【答案】 D.

【分析】若取 $o(x) = x^2$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x) + o(x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{x^2} = 1 \neq 0,$$

故应选(D).

【评注】 本题主要考查无穷小量阶的比较和 $o(x)$ 的运算.

(2)【答案】 C.

【分析】 $f(x) = \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|}$ 在 $x = -1, 0, 1$ 处没定义.

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{x \ln|x|} - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x \ln|x|}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln|x|} - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln|x|}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x \ln|x|} - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln|x|}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

则 $x = 0$ 和 $x = 1$ 为可去间断点, 故应选(C).

【评注】 本题主要考查间断点类型的判定.

(3)【答案】 B.

【分析】利用二重积分的不等式性质.

【详解】显然, 在 D_2 上 $y - x \geq 0$, 且 $y - x$ 不恒等于零, 则 $I_2 = \iint_{D_2} (y - x) dx dy > 0$. 故选 B.

【评注】 实际上 $I_4 < 0$, 由于 D_1, D_3 关于直线 $y = x$ 对称, 再由轮换对称性得

$$I_1 = \frac{1}{2} \left[\iint_{D_1} (y - x) dx dy + \iint_{D_1} (x - y) dx dy \right] = 0, I_3 = \frac{1}{2} \left[\iint_{D_3} (y - x) dx dy + \iint_{D_3} (x - y) dx dy \right] = 0.$$

(4)【答案】 D.

【分析】本题考查抽象级数敛散性的判定, 包括 p -级数、交错级数的收敛性以及正项级数的敛法. 一种方法是直接找出正确答案, 另一种方法是利用举反例排除错误的选项.

【详解】由于极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^p}}$ 存在, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ($p > 1$) 收敛, 利用正项级数比较判别法

的极限形式, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 应选 D.

也可举反例如下: 取 $a_n = \frac{n+1}{n}$, 排除(A); 取 $a_n = \frac{3+2(-1)^n}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛, 但 $a_1 = 1$

$$\begin{aligned}
 &< a_2 = \frac{5}{4}, \text{排除(B); 取 } a_n = \frac{1}{n \ln^2 n}, \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛, 但对任意 } p > 1, \lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{p-1}}{\ln^2 n}, \text{ 考虑 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{p-1}}{\ln^2 x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(p-1)x^{p-1}}{2 \ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(p-1)^2 x^{p-2}}{2 \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(p-1)^2 x^{p-1}}{2} = \infty, \text{ 因而 } \lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n \text{ 不存在, 排除 C.}
 \end{aligned}$$

(5)【答案】 B.

【分析】 对矩阵 A, C 分别按列分块, 记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), C = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$.

由 $AB = C$ 有

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n).$$

$$\text{可见} \begin{cases} \gamma_1 = b_{11}\alpha_1 + b_{21}\alpha_2 + \cdots + b_{n1}\alpha_n, \\ \gamma_2 = b_{12}\alpha_1 + b_{22}\alpha_2 + \cdots + b_{n2}\alpha_n, \\ \vdots \\ \gamma_n = b_{1n}\alpha_1 + b_{2n}\alpha_2 + \cdots + b_{nn}\alpha_n, \end{cases}$$

即 C 的列向量组可以由 A 的列向量组线性表出.

因为 B 可逆, 有 $CB^{-1} = A$. 类似地, A 的列向量组也可由 C 的列向量组线性表出, 因此选 B.

(6)【答案】 B.

【分析】 两个实对称矩阵相似的充分必要条件是相同的特征值.

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -a & -1 \\ -a & \lambda - b & -a \\ -1 & -a & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda[\lambda^2 - (b+2)\lambda + 2b - 2a^2].$$

$$\text{因为 } |\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & & \\ & \lambda - b & \\ & & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - b).$$

由 $\lambda = 2$ 必是 A 的特征值, 即

$$|2E - A| = 2[2^2 - 2(b+2) + 2b - 2a^2] = 0, \text{ 故必有 } a = 0.$$

由 $\lambda = b$ 必是 A 的特征值, 即

$$|bE - A| = b[b^2 - (b+2)b + 2b] = 0, b \text{ 可为任意常数.}$$

所以选 B.

(7)【答案】 A.

【分析】 $X_1 \sim N(0, 1), p_1 = P\{-2 \leq X_1 \leq 2\} = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1$.

$$\begin{aligned}
 X_2 \sim N(0, 2^2), p_2 &= P\{-2 \leq X_2 \leq 2\} = P\left\{-1 \leq \frac{X_2 - 0}{2} \leq 1\right\} \\
 &= \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1.
 \end{aligned}$$

$$X_3 \sim N(5, 3^2), p_3 = P\{-2 \leq X_3 \leq 2\} = P\left\{-\frac{7}{3} \leq \frac{X_3 - 5}{3} \leq -1\right\} = \Phi(-1) - \Phi\left(-\frac{7}{3}\right).$$

因为 $\Phi(x)$ 为单调增函数, 所以 $p_1 = 2\Phi(2) - 1 > 2\Phi(1) - 1 = p_2$.

又因为 $\Phi(1) - \Phi(-1) > 68\%$, 所以 $p_2 = \Phi(1) - \Phi(-1)$

$$> 0.5 > \Phi(-1) > \Phi(-1) - \Phi\left(-\frac{7}{3}\right) = p_3.$$

总之 $p_1 > p_2 > p_3$, 所以应选 A.

(8)【答案】 C.

【分析】 $P\{X+Y=2\} = P\{X=1, Y=1\} + P\{X=2, Y=0\} + P\{X=3, Y=-1\}$
 $= P\{X=1\}P\{Y=1\} + P\{X=2\}P\{Y=0\} + P\{X=3\}P\{Y=-1\}$
 $= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{6}.$

所以答案选 C.

二、填空题

(9)【答案】 -2

【分析】由题设知 $f(1) = 0, f'(1) = 1.$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{n}{n+2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n}{n+2} \cdot \frac{f\left(1 + \frac{-2}{n+2}\right) - f(1)}{\frac{-2}{n+2}} = -2f'(1) = -2.$$

【评注】 本题主要考查导数的定义和导数的几何意义.

(10)【答案】 $2 - 2\ln 2.$

【分析】由方程 $(z+y)^x = xy$, 当 $x=1, y=2$ 时, $z=0$, 用隐函数求偏导数的常规方法求解.

【详解】方程 $(z+y)^x = xy$ 变为 $e^{x \ln(z+y)} = xy$, 方程两边对 x 求偏导数得

$$e^{x \ln(z+y)} \left(\ln(z+y) + \frac{x}{z+y} \frac{\partial z}{\partial x} \right) = y,$$

令 $x=1, y=2, z=0$, 有 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,2)} = 2 - 2\ln 2.$

【评注】 在求一点处的偏导数时, 不必要解出 $\frac{\partial z}{\partial x}$, 而是直接把点的坐标代入求导后的方程, 可能简化运算.

(11)【答案】 $\ln 2.$

【分析】 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx = - \int_1^{+\infty} \ln x d \frac{1}{1+x}$
 $= - \left. \frac{\ln x}{1+x} \right|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x)}$
 $= \ln \frac{x}{1+x} \Big|_1^{+\infty} = - \ln \frac{1}{2} = \ln 2.$

【评注】 本题主要考查反常积分的计算.

(12)【答案】 $(C_1 + C_2 x)e^{\frac{1}{2}x}, C_1, C_2$ 为任意常数.

【分析】本题是二阶常系数齐次线性微分方程的求解问题, 先求出对应特征方程的根, 然后直接写出方程的通解.

【详解】方程 $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} = 0$, 解得两个根为 $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}$,

则所求的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{\frac{1}{2}x}$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

(13)【答案】 -1.

【分析】由 $a_{ij} = -A_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$ 知 $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}^*$.

那么 $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T| = |-\mathbf{A}^*| = (-1)^3 |\mathbf{A}^*| = -|\mathbf{A}|^2$,

即 $|\mathbf{A}|(1+|\mathbf{A}|) = 0$, 故 $|\mathbf{A}|$ 为 0 或 -1.

又 \mathbf{A} 是非零矩阵, 不妨设 $a_{11} \neq 0$. 于是

$|\mathbf{A}| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = -(a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2) \neq 0$, 所以 $|\mathbf{A}| = -1$.

(14)【答案】 $2e^2$.

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } E(Xe^{2X}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{2x}\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{2x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2-4x+4}{2}} dx \cdot e^2 \\ &= e^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2}} dx = 2e^2, \end{aligned}$$

其中 $\int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2}} dx$ 可以看成是正态分布 $N(2, 1)$ 的数学期望. 所以答案应填 $2e^2$.

三、解答题

$$\begin{aligned} (15) \text{【解法一】 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{ax^n} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos 2x \cos 3x + 2 \cos x \sin 2x \cos 3x + 3 \cos x \cos 2x \sin 3x}{anx^{n-1}}. \end{aligned}$$

由于当 $n = 2$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos 2x \cos 3x}{anx^{n-1}} = \frac{1}{2a}$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x \sin 2x \cos 3x}{anx^{n-1}} = \frac{4}{2a},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos x \cos 2x \sin 3x}{anx^{n-1}} = \frac{9}{2a},$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{ax^n} = \frac{7}{a}$.

由题设知 $\frac{7}{a} = 1$, 故 $a = 7$.

当 $n \neq 2$ 时, 显然不合题意, 所以 $a = 7, n = 2$.

$$\begin{aligned} \text{【解法二】 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{ax^n} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left\{ \left[1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right] \cdot \left[1 - \frac{4x^2}{2} + o(x^2) \right] \cdot \left[1 - \frac{9x^2}{2} + o(x^2) \right] \right\}}{ax^n} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{x^2}{2} + \frac{4x^2}{2} + \frac{9x^2}{2} \right) + o(x^2)}{ax^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x^2 + o(x^2)}{ax^n} \end{aligned}$$

则 $n = 2, a = 7$.

$$\begin{aligned} \text{【解法三】 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{ax^n} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) + \cos x(1 - \cos 2x) + \cos x \cdot \cos 2x(1 - \cos 3x)}{ax^n} \\ = \frac{1}{a} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x(1 - \cos 2x)}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \cos 2x(1 - \cos 3x)}{x^2} \right] \\ = \frac{1}{a} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{2}x^2}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{9}{2}x^2}{x^2} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{7}{a},$$

则 $a = 7$.

【评注】 本题主要考查无穷小量阶的比较及“ $\frac{0}{0}$ ”型极限的求法. 本题中的方法是求“ $\frac{0}{0}$ ”型极限常用的 3 种方法, 即洛必达法则、泰勒公式及等价无穷小代换.

$$(16) \text{【解】 } V_x = \pi \int_0^a x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3\pi a^{\frac{5}{3}}}{5},$$

$$\begin{aligned} V_y &= \pi a^{\frac{7}{3}} - \pi \int_0^{\frac{1}{3}} y^6 dy \\ &= \pi a^{\frac{7}{3}} - \frac{\pi a^{\frac{7}{3}}}{7} \\ &= \frac{6\pi a^{\frac{7}{3}}}{7}. \end{aligned}$$

因 $V_y = 10V_x$, 即 $\frac{6\pi a^{\frac{7}{3}}}{7} = 10 \cdot \frac{3\pi a^{\frac{5}{3}}}{5}$, 解得 $a = 7\sqrt{7}$.

【评注】 本题主要考查旋转体体积的计算.

(17) **【分析】** 求出直线 $x + y = 8$ 与另两条直线的交点, 把积分区域分为两块, 直角坐标系下化二重积分为二次积分, 积分次序选择先 y 后 x 较好.

【详解】 直线 $x + y = 8$ 与直线 $x = 3y$ 的交点为 $(6, 2)$, 直线 $x + y = 8$ 与直线 $y = 3x$ 的交点为 $(2, 6)$.

化二重积分为二次积分有

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 dx dy &= \int_0^2 x^2 dx \int_{\frac{1}{3}x}^{3x} dy + \int_2^6 x^2 dx \int_{\frac{1}{3}x}^{8-x} dy \\ &= \frac{8}{3} \int_0^2 x^3 dx + \int_2^6 (8 - \frac{4}{3}x)x^2 dx = \frac{32}{3} + 128 = \frac{416}{3}. \end{aligned}$$

(18) **【分析】** 本题是微分学在经济中的简单应用, 关键是要搞清楚各种函数的表示及其表示的经济意义.

【详解】(I) 由 $p = 60 - \frac{Q}{1000}$, 得 $Q = 1000(60 - p)$, 则利润函数为

$$L = 1000Qp - 6000 - 20Q = Q(60 - \frac{Q}{1000}) - 6000 - 20Q = Q(40 - \frac{Q}{1000}) - 6000,$$

因而该商品的边际利润为 $\frac{dL}{dQ} = 40 - \frac{Q}{500}$.

(II) 当 $p = 50$ 时, $Q = 10000$, 此时的边际利润为 $40 - \frac{10000}{500} = 20$, 其经济意义指的是: 当价格 $p = 50$ 时, 销量每增加一件, 利润就增加 20 元.

(III) 令 $\frac{dL}{dQ} = 40 - \frac{Q}{500} = 0$ 得 $Q = 20000$, 进而价格 $p = 40$, 且 $\frac{d^2L}{dQ^2} = -\frac{1}{500} < 0$,

因可能极值点唯一, 且实际问题存在最大值, 故当价格为 40 元时, 利润最大.

(19) **【证】**(I) 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, 所以存在 $x_0 > 0$, 使得 $f(x_0) > 1$.

因为 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, 所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续.

又 $f(0) = 0$, 根据连续函数的介值定理, 存在 $a \in (0, x_0)$, 使得 $f(a) = 1$.

(II) 因为函数 $f(x)$ 在区间 $[0, a]$ 上可导, 根据微分中值定理, 存在 $\xi \in (0, a)$, 使得

$$f(a) - f(0) = af'(\xi).$$

又因为 $f(0) = 0, f(a) = 1$, 所以 $f'(\xi) = \frac{1}{a}$.

【评注】 本题主要考查拉格朗日中值定理, 连续函数的零点定理及极限的保号性.

(20) **【解】** 设 $C = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$. 那么 $AC - CA = B$ 即

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$$

$$\text{即} \begin{bmatrix} x_1 + ax_3 & x_2 + ax_4 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & ax_1 \\ x_3 + x_4 & ax_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$$

$$\text{即} \begin{cases} -x_2 + ax_3 = 0 \\ -ax_1 + x_2 + ax_4 = 1 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 - ax_3 = b \end{cases}$$

对增广矩阵作初等行变换, 有

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{array} \right]$$

当 $a \neq -1$ 或 $b \neq 0$ 时, 方程组无解.

当 $a = -1$, 且 $b = 0$ 时, 方程组有解. 此时有在矩阵 C 满足 $AC - CA = B$.

由于方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad k_1, k_2 \text{ 为任意实数.}$$

故当且仅当 $a = -1, b = 0$ 时, 存在矩阵

$$C = \begin{bmatrix} 1 + k_1 + k_2 & -k_1 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix}, \text{ 满足 } AC - CA = B.$$

【评注】 这是今年考的比较差的一道题, 计算上失误非常严重, 希望大家复习时要重视基本计算.

(21) **【证明】** (I) 记 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, 则

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

故 $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$

$$= 2(x^T \alpha)(\alpha^T x) + (x^T \beta)(\beta^T x)$$

$$= x^T (2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) x$$