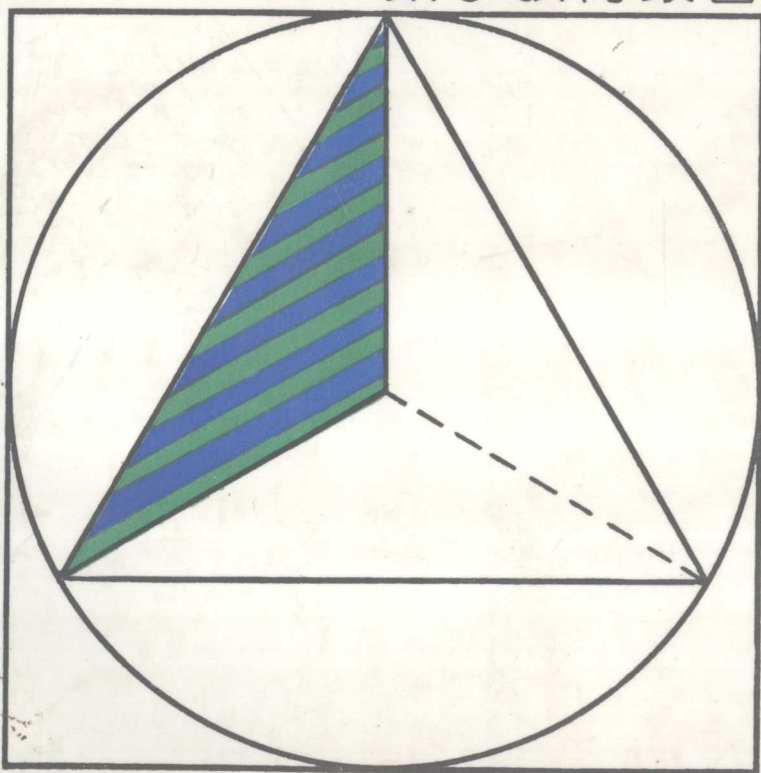


數學邏輯學

SHU XUE LUO JI XUE

張潤庠主編

數學教育叢書



南海出版公司

数学教育丛书

数学逻辑学

张润庠

杨燕钧

洪声芝

主编

南海出版公司

1992年·海口

琼新登字01号

数学逻辑学

作 者：张润庠 杨燕钧 洪声芝 主编

责任编辑：肖 仁

装帧设计：英 华

南海出版公司出版发行
山东省东平县印刷厂印刷

850×1168毫米 32开本 8印张 160千字

1992年7月第1版 1992年7月第1次印刷

印数：1—4100册

ISBN7—80570—681—6/G·189

定价：4.00元

序

当今的世界，已进入第三次科学技术革命的新时代。知识激增、信息高度发达，已成为我们这个伟大时代的重要特征。随着科学技术的飞速发展和现代科学的数学化趋势的增强，社会对人才智能提出了更高的要求，也引起了数学教育思想的深刻变革，促进了数学教育的发展。

我国数学教育家曹才翰先生指出：“在国际、国内的教育领域中，数学教育始终是最活跃的一个学科。”国际上，从六十年代的“新数学”、七十年代的“回到基础”，到八十年代的“问题解决”，数学教育的发展一日千里；在国内，学术组织林立、专业会议频繁，数学教育的研究呈现出一派生机盎然的兴旺景象。

数学教育学是研究数学教育规律的科学，是教育学、心理学、逻辑学、数学、哲学、思维学和数学史等科学的交叉学科。近年来，数学教育学已初步形成为包括教学论、学习论、课程论、方法论等多个分支学科的庞大学科群。

从1987年起，我们山东省高等师范院校数学教育研究会建立了教学论、方法论、学习论、思维论和数学史等专题组，开展了多种形式的学术研究和学术交流活动，在国内各种刊物上发表了一批论文，并出版了研究会论文集。在深入开展学术研究的同时，我省各高等师范院校相继开设了有关必修和选修课，促进了我省数学教育的发展。

为了适应数学教育的发展，满足高等学校和中学教师继续教育的需要，为了反映数学教育的新思想、新观点，我们研究会组织编写了《数学教育丛书》，这是我省从事数学教育研究和教学的同志们的一项研究成果。

数学教育学是一门新兴科学，正处于建设和发展阶段，它的理论建构和学科体系还有待于深入研究。因此，编写这套丛书只是对建立数学教育学的一种尝试。我们期望得到读者的批评和建议，以便进一步修改和完善。

山东省高等师范院校
数学教育研究会理事长

汪德营

1990年12月

前 言

列宁指出：“任何科学都用逻辑，数学更是这样，从它产生的年代起，数学与逻辑就是不可分的”。数学要用逻辑方法，逻辑也要用数学方法。数学与逻辑携手并进、共同发展。

那么，逻辑的原则和方法，如何在数学中应用呢？这正是《数学逻辑学》所要研究的问题。它是数学与逻辑的交叉科学，它研究传统逻辑、数理逻辑、辩证逻辑的诸多原则与方法在数学中的具体应用，以及由此而产生的单独用于数学的逻辑规则和方法。《数学逻辑学》属于应用逻辑科学，正像语言逻辑、法学逻辑、医学逻辑一样，是应用逻辑这一园地中的又一支新秀。

本书主要是为中学数学教师继续教育而编写的，也可供师范院校数学系学生、广大数学工作者、数学教学研究人员及数学爱好者参考。其编写方针是：以科学性、先进性、适用性、针对性为努力方向，致力于学科前沿知识和基础知识同中学数学教育实际密切结合。具体讲有以下五点。

第一，本书在保持科学严谨的前提下，以简明实用为主，紧密结合中学数学的具体内容，介绍必要的逻辑原则和方法。

第二，力求继承古典形式逻辑中至今仍有实用价值的有活力的内容，同时又精择我们必须学习的数理逻辑、辩证逻辑中的有关基础知识。

第三，熔古典形式逻辑与现代形式逻辑于一炉。我们认为这样做，既可避免只讲古典形式逻辑而忽视现代形式逻辑的学习，从而追赶学科发展的形势，又可保存古典与现代形式逻辑一脉相

承、有机统一的体系。

第四，本书的自然演绎和形式公理体系为两大纵贯系统，且又按数学概念、数学命题、数学推理、数学证明、命题演算与谓词演算等予以分述。

第五，以中学数学的符号系统、概念系统、定理系统为线索，研究揭示中学数学内容的逻辑性、系统性和科学性，使读者能从总体上认识和掌握它们。

本书由张润庠拟定《编写大纲》，集体讨论修订后分工编写。参加编写的（以章节为序）有：张润庠、汪自安、邹淑香、丁长银、朱开义、裴正义、李树金、洪声芝、陆书环、高效宸、王相国、杨燕钧、牛家骥等。最后由张润庠、杨燕钧、洪声芝统审定稿。在编写过程中，曾得到山东煤炭教育学院、临沂师专、泰安师专、枣庄师专、济南大学、济南教育学院、曲阜师范大学等院校领导的大力支持和帮助，在此一并致谢。

本书参阅了王雨田、温公颐、吴家国、徐利治、解恩泽、徐本顺、金守臣、王泽宣等许多名家的论著，在此谨向他们表示最诚挚的谢意。

由于水平有限、时间仓促，书中错误与缺点在所难免，恳请广大读者及专家批评指正。

编者

1991·12·

目 录

第一章 引论	1
§ 1.1 思维与逻辑	1
§ 1.2 数学与逻辑	8
§ 1.3 数学语言	17
第二章 数学概念	25
§ 2.1 概念概述	25
§ 2.2 概念的种类与概念间的关系	28
§ 2.3 明确概念的逻辑方法	33
§ 2.4 中学数学概念系统	44
第三章 数学命题	50
§ 3.1 命题概述	50
§ 3.2 简单命题	53
§ 3.3 负命题、联言命题、选言命题	63
§ 3.4 假言命题	69
§ 3.5 等价命题、多重复合命题	75
§ 3.6 数学命题	81
§ 3.7 中学数学定理系统	88
第四章 数学推理	95
§ 4.1 推理概述	95
§ 4.2 直言命题的直接推理	98
§ 4.3 直言命题的间接推理——三段论	103
§ 4.4 关系推理	120

§ 4 · 5	复合命题演绎推理 (上)	123
§ 4 · 6	复合命题演绎推理 (下)	128
§ 4 · 7	归纳推理	135
§ 4 · 8	类比推理	144
§ 4 · 9	数学猜想	147
第五章	数学证明	152
§ 5 · 1	证明概述	152
§ 5 · 2	演绎证法与归纳证法	156
§ 5 · 3	直接证法与间接证法	160
§ 5 · 4	综合证法与分析证法	167
§ 5 · 5	数学归纳法	171
§ 5 · 6	常见的逻辑错误及其分析	185
第六章	命题演算与词项演算	201
§ 6 · 1	真值表	201
§ 6 · 2	命题演算	209
§ 6 · 3	谓词演算——狭谓词演算	214
第七章	辩证逻辑简介	225
§ 7 · 1	辩证逻辑概述	225
§ 7 · 2	辩证逻辑的基本方法及其在数学中的应用	238

第一章 引 论

数学教育的主要任务之一，就是培养学生的逻辑思维能力。所以，作为本书的开章，首先对思维、逻辑思维、数学与逻辑、数学语言等方面作些简要论述。

§ 1 · 1 思维与逻辑

一、思维、逻辑思维

思维是人脑对客观事物的本质属性和内在联系的一种间接的概括的反映。

根据辩证唯物主义的认识论，人的认识来源于实践。在实践中，认识的第一步是通过感官直接接触外界事物，在头脑中产生感觉、知觉、表象这些反映形式，这属于认识的感性阶段。认识的第二步是把感性认识积累的材料进行加工、制作，形成概念、判断、推理这些思维形式，这属于理性认识阶段。理性认识阶段就是思维阶段，是认识过程中更为重要的阶段。毛泽东说：“认识的真正任务在于经过感觉而达到思维。”^①

思维的主要特点是间接性、概括性、目的性。

思维的间接性表现在：理性认识必须在感性认识的基础上，经过大脑对感知的材料进行加工、制作才能产生。思维的间接性还表现在人们可以根据已有的知识推断出新知识。例如，据出土文物推断历史年代及生产水平，也可据现有情况对未来进行预测。

^①《毛泽东选集》第一卷第262页

思维的概括性表现在：思维能够对积累的材料进行分析，从许多个别事物的各种属性中，舍去非本质属性，抽取出事物内在的本质属性，达到对一类事物的共同本质的认识，从而形成概念、判断和推理。思维这种全面反映一类事物共同本质属性的过程就是思维概括反映现实的过程。

思维的目的性表现在：思维是由于人类有目的地认识问题、解决问题的需要而产生的，如果没有这样的需要就不会产生思维。只有人类才有有意识地改造自然、改造社会的目的。正如马克思所说，蜜蜂建造蜂房，不论多么精巧，它和建筑师最大的不同点是，建筑师在建房之前在他的观念中已经完成了。

思维是一种非常复杂的心理状态，具有众多不同的表现形式，且可根据不同的标准分成不同的类。一种分法是把思维分成逻辑思维、直觉思维和灵感思维^①。它们各有自己的功能，都是人类健全理智的要素。

逻辑思维是指人脑运用概念、判断进行推理、论证，来揭示事物的性质和规律的一种反映形式。逻辑思维的内容、思维的逻辑形式和思维的语言形式是逻辑思维的三个基本要素。逻辑思维的内容就是反映在逻辑思维中的现实事物，被理解的客体。思维的逻辑形式就是思维内容的表现形式和联结方式。二者密切相联，统一在逻辑思维中。由于语言是思维的物质存在形式，因而无论是逻辑思维的内容还是逻辑思维的形式都必须借助于语言才能成为现实。

逻辑思维据其本身的发展过程又可分为抽象思维与辩证思维。

在实践中人们通过感觉与外界接触而获得的事物的整体形象，也叫表象，这种表象潜在地隐含着事物的本质。逻辑思维要把这种潜在的本质揭示出来，首先必须对表象进行分割，抽取对

^① 参见钱学森《现代科学的结构》，《哲学研究》1982年第3期。

象的共同属性，使其脱离该整体其余属性的联系，单独对它加以考察，得出简单的规定，形成抽象的一般。这一阶段是思维抽象的过程，以“抽象的同一性”为基本特征。显然，这种具有抽象同一性的一般并不是对象的本质，而是本质的一个侧面，并且是在与对象的其它属性联系起来考察时才有意义。因此，逻辑思维还必须从已被确定的诸规定出发，进行多方面的综合，重新组合成有机的整体，把握“多样性的统一”，达到反映现实事物本质的目的。这一阶段是思维具体的过程，以“具体同一性”为其基本特征。马克思把逻辑思维的这一发展过程精炼地概括为：从完整的表象蒸发为抽象的规定，再从抽象的规定在思维行程中导致具体的再现。

逻辑思维在从完整的表象蒸发为抽象的规定过程中，以“抽象的同一性”为其基本特征，它是以明确客观对象诸规定为目的的逻辑思维，叫做抽象思维，是形式逻辑研究的对象；逻辑思维在从抽象的规定导致具体的再现过程中，以“具体同一性”为其基本特征，它是以把握、再现由诸多规定构成的思维具体为目的的逻辑思维，叫做辩证思维，它是辩证逻辑研究的对象。

哲学、逻辑学、心理学、生理学都从不同的方面来研究思维。例如，哲学着重研究思维和存在的关系，阐明思维在认识世界和改造世界中的作用，而逻辑学则研究思维的形式及规律。

二、形式逻辑、数理逻辑、辩证逻辑

逻辑学包括形式逻辑（研究抽象思维的形式和规律）与辩证逻辑（研究辩证思维的形式和规律）两大门类。而形式逻辑又分为传统形式逻辑和现代形式逻辑，现代形式逻辑包括数理逻辑。

数理逻辑是用数学方法研究形式逻辑及数学基础的。德国的莱布尼茨是它的创始人，英国的罗素与怀特海合著的《数学原

理》是当时数理逻辑研究成果的总结。其具体作法是，先将形式逻辑中涉及到的概念、判断、判断与判断之间的关系符号化。例如，用符号“ $\wedge$ ”、“ $\vee$ ”、“ $\neg$ ”分别表示逻辑连结词“且”、“或”、“非”，用符号“ $\forall$ ”、“ $\exists$ ”分别表示全称量词和存在量词，等等。然后，将形式逻辑中所用的直观方法，以形式化的数学方法来代替。希尔伯特说：“它是把数学上形式化的方法，应用到逻辑领域的结果。”

这三种逻辑的联系是它们都研究思维的形式和规律，但三者又有着明显的区别。

1. 传统逻辑与数理逻辑的区别

首先，二者研究的对象不完全相同。数理逻辑着重研究演绎推理，而传统逻辑研究的对象，如归纳、类比和假说等，则是数理逻辑尚未充分研究的。同时，数理逻辑的某些研究对象，如一个公理系统的完备性，独立性和无矛盾性，则不是传统逻辑所研究的。

其次，二者研究的方法不同。数理逻辑用数学方法，用人工的符号语言来研究思维的逻辑形式。它用符号语言研究词项（概念）、命题（判断）、以及命题之间的关系（推理），构成十分严密的符号系统，因此数理逻辑也有人叫符号逻辑。而传统逻辑主要用自然语言（即日常用语）来表达思维的逻辑形式，只在必要的地方使用符号，例如“若S则D”，但这也接近自然语言。

再次，二者在人们认识中的作用不同。由于二者在研究对象和方法上的不同，数理逻辑是数学研究中强有力的工具，而传统逻辑则是在一般思维（也包括数学思维）中的便利工具。当然，这是一种比较的说法。因为对于一般思维有时可以并且也需要用数理逻辑来解决；同时，在数学研究和学习中也大量使用着用自然语言表达的传统逻辑。

数理逻辑在思维的逻辑形式和规律的研究上是极有成效的，

从根本上讲，数理逻辑是传统逻辑的发展。因此，逻辑学的学习不能停留在传统逻辑的阶段，只有进一步研究数理逻辑，才能对思维的逻辑结构及其规律有一个比较深刻的认识。

2. 形式逻辑与辩证逻辑的区别

辩证逻辑本质上是马克思主义哲学的一个组成部分，同时它在逻辑科学中又占有重要地位。正如前述，辩证逻辑是研究辩证思维形式及其规律的科学，它与形式逻辑相比，“它包含更广的世界观的萌芽”。^① 具体来看其主要区别是：

首先，形式逻辑不研究思维如何反映客观事物的运动、发展和转化，而辩证逻辑正是要研究这些问题。列宁曾把辩证逻辑规定为“不是研究思维的外在形式的学说，而是关于‘一切物质的、自然的和情神的事物的’发展规律的学说，即关于世界的全部具体内容及对它的认识的发展规律的学说”。^②

其次，形式逻辑不研究各种判断形式和推理形式之间在认识过程中的联系和转化，而辩证逻辑正是要研究这些问题。恩格斯说：“辩证逻辑和旧的纯粹的形式逻辑相反，不像后者把各种思维运动形式，即各种不同的判断和推理的形式列举出来和毫无关联地排列起来。相反地，辩证逻辑由此及彼地推出这些形式，不把它们互相平列起来，而使它们互相隶属，从低级形式发展出高级形式。”^③

形式逻辑与辩证逻辑虽有区别，但并不互相排斥。正如恩格斯比喻的那样，二者的关系是初等数学与高等数学的关系。辩证逻辑不否定形式逻辑，形式逻辑也不排斥辩证逻辑。它们各有自己的研究对象和作用，都是人类思维所不可少的工具。

①《马克思、恩格斯全集》第3卷，第174页。

②《列宁全集》第38卷，第89页。

③《马克思、恩格斯全集》第3卷，第545—546页。

三、逻辑思维的基本规律

早在两千多年前，古希腊哲学家亚里士多德就总结出逻辑思维的三条基本规律，即同一律、矛盾律和排中律。17世纪数学家莱布尼兹增加了一条充足理由律。这四条是人们认识相对静止和相对确定的事物必须遵守的规律，亦即形式逻辑的基本规律。

1. 同一律

同一律是关于思维确定性的规律。它是说在同一个思维过程中，一个思想（概念或判断）必须保持其自身的同一。其公式是“ A 是 A ”。“ A ”表示一个概念或判断。“ A 是 A ”表示在同一思维过程中所使用的概念和判断必须保持同一。概念的同一是说概念的内涵外延不变；判断同一是说判断所含成分不变，即判断的内容不变。只有这样才能保持思维的准确性。否则就会导致思维混乱，出现偷换概念、偷换论题的错误。

2. 矛盾律

矛盾律实际上应叫不矛盾律，它是关于思维首尾一贯性的规律。矛盾律是说在同一个思维过程中，对于同一对象不能既肯定它又否定它，即思维不能出现矛盾。它的公式是“ A 不是非 A ”。

“ A ”代表一个概念或判断，“非 A ”代表与 A 相冲突（矛盾或对立）的概念或判断。“ A 不是非 A ”是说在同一思维过程中互相冲突的概念或判断不能同时成立，“ A ”与“非 A ”中二者必有一假，当然也可能二者都假。违犯这一规律就会出现自相矛盾或称逻辑矛盾的错误。

3. 排中律

排中律是关于思维明确性的规律。它是说在同一过程中，一个对象或者具有某种性质，或者不具有某种性质，不可能有第三种情况。它的公式是“或者 A ，或者非 A ”。这里“ A ”表示

一个思想（主要指判断），“非A”表示与A相矛盾的思想。
“或者A，或者非A”是说在A与非A两个互相矛盾的思想当中，不能都是假的，要么A真，要么非A真，二者必居其一。如果违背排中律，思维就会模棱两可，得不出正确结论，犯“两不可”或“无所断定”的错误。

排中律与矛盾律的区别是：首先，适用的范围不同。排中律只适用于互相矛盾的思想；而矛盾律既适用于互相矛盾的思想，又适用于互相对立的思想^①。其次，要求不同。排中律要求在两个互相矛盾的思想中必须指出有一个是真的，不能同假；矛盾律要求在两个互相矛盾或者互相反对的思想中必须指出有一个是假的，不能同真。再次，作用不同。排中律的主要作用在于保证思想的明确性；矛盾律的主要作用在于保证思维的无矛盾性，即首尾一贯性。

4. 充足理由律

充足理由律是关于思维根据性的规律。它是说在同一论证过程中，被确定为真的判断，必须有充足的理由。它的公式是“所以有A，因为有B”。这里“A”表示一个判断，“B”表示一个或一组判断。B是A的先行判断（前提条件），A是由B推出的新判断，A的出现是以B为充足理由的。这里“充足理由”是指：理由必须真实；理由与推断之间要有逻辑联系。充足理由律保证思维的合理性与周密性。违犯这一规律便会出现“虚假理由”或“推不出”的错误。

以上四条规律在人们的逻辑思维中有着重要意义。这些规律要求人们在逻辑思维中对象必须确定（同一律），不能自相矛盾（矛盾律），不能模棱两可（排中律），要有充分的根据（充足理由律）。教学中应培养学生严格遵守这些规律进行思维的习惯，借以发展学生的逻辑思维能力。

①关于矛盾和对立概念，见本书第二章第二节概念间的关系。

然而，这些规律是人们认识相对静止和相对确定的事物必须遵守的规律。但客观世界的客观对象既是相对静止的，又处于不断的运动变化之中；事物之间的界限既是确定的又是不确定的。因此，形式逻辑阐述的上述四条规律有一定的局限性。对于辩证思维来说并不否定这些规律的作用，但又不满足于这些规律，在辩证思维过程中还有着特定的规律。

辩证逻辑的规律是什么？学术界尚无一致意见。一种观点认为辩证逻辑的规律也就是辩证法的三大规律，即对立统一律、质量互变律和否定之否定律。从总体上看这种观点是正确的，因为这三大规律不仅支配自然和社会，也支配着人类的思维。但这种说法过于笼统。近几年来我国逻辑学界提出了一些新的见解，把辩证法规律在思维中的表现具体化了。这些规律将在第七章中介绍。

§ 1 · 2 数学与逻辑

任何一门科学知识都是人类思维加工的产物，学习它们也要经过人们的思维活动。而逻辑学是研究思维形式和规律的科学，因而逻辑对各门科学的研究和学习都有指导意义。但对数学来讲它与逻辑的关系特别密切。本节将从数学科学、数学创造、数学教学三个方面简述数学与逻辑的关系。

一、数学科学与逻辑

列宁指出：“任何科学都应用逻辑、数学更是这样，从它产生的年代起，数学与逻辑就是不可分的”。自古以来，数学与逻辑学一直携手并进，关系密切。后来又出现了《数理逻辑》这样的分支学科，它属于数学也属于逻辑，合二而一了。为什么数学与逻辑有如此密切的关系呢？这是由数学的特点决定的。