

平面几何学正解

溫 特 握 斯

## 平面幾何學正解

問題一 求  $49^\circ$  角之餘角及補角。

〔解〕  $90^\circ - 49^\circ = 41^\circ$

$$180^\circ - 49^\circ = 131^\circ$$

問題二 若一角爲其餘角之倍。又一角爲其餘角四分之一。求其度數各幾何。

(1) 定  $x$  爲所求之角之度數。因得

$$x + \frac{x}{2} = 90^\circ$$

$$2x + x = 180^\circ$$

$$3x = 180^\circ \quad \therefore x = 60^\circ$$

(2) 定  $x$  爲所求之角之度數。因得

$$x + 4x = 90^\circ$$

$$5x = 90^\circ \quad \therefore x = 18^\circ$$

問題三 一角爲其補角之倍。又一角爲其補角三分之一。求其度數各幾何。

(1) 定  $x$  爲所求角之度數。

$$x + \frac{x}{2} = 180^\circ$$

$$2x + x = 360^\circ$$

$$3x = 360^\circ \quad \therefore x = 120^\circ$$

(2) 定  $x$  爲所求角之度數。

$$x + 3x = 180^\circ$$

$$4x = 180^\circ \quad \therefore x = 45^\circ$$

**問題四** 問鐘指一點三點五點六點所作三角。其度數各若干。

答  $30^\circ, 90^\circ, 150^\circ, 180^\circ$

**問題五** 求  $37^\circ 53' 49''$  一角之餘角及補角。

$$[解] \quad 90^\circ - 37^\circ 53' 49'' = 52^\circ 6' 11''$$

$$180^\circ - 37^\circ 53' 49'' = 142^\circ 6' 11''$$

**問題六** 若一角之餘角爲其補角三分之一。求此角之度數幾何。

[解] 定  $x$  爲所求之角之度數。因得

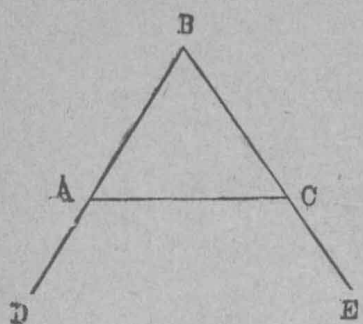
$$3(90^\circ - x) = 180^\circ - x$$

$$270^\circ - 3x = 180^\circ - x$$

$$2x = 90^\circ \quad \therefore x = 45^\circ$$

**問題七** 若將兩等邊三角形之兩等邊引長。則底線下成兩角相等。

[解] 設  $ABC$  爲兩等邊三角形。  $BA$  及  $BC$  爲等



邊。今引長 BA 至 D, BC 至 E。

求證  $\angle CAD = \angle ACE$

[證]  $\angle BAC = \angle BCA$  § 145

但  $\angle CAD$  爲  $\angle BAC$  之補角。

而  $\angle ACE$  爲  $\angle BCA$  之補角。

$\therefore \angle CAD = \angle ACE$  § 85

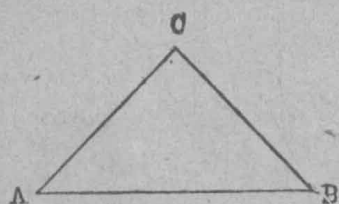
**問題八** 兩等邊正三角形之二銳角。各有度數幾何。

[解] 設 ABC 爲兩等邊正三角形。求 A 角及 B 角之度數。

[法]  $\angle A + \angle B = 90^\circ$  § 135

今  $\angle A = \angle B$  § 145

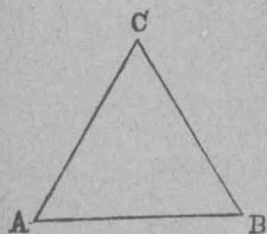
$\therefore \angle A = \angle B = 45^\circ$



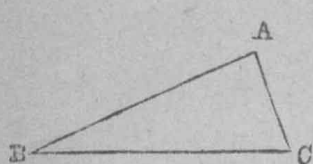
**問題九** 若兩等邊三角形之任何一角。等於正角三分之二。其餘二角之度數各幾何。

[解] 題云兩等邊三角形任何一角。等於正角三分之二。即  $60^\circ$ 。則此三角形爲等邊。而各角皆等於  $60^\circ$  度。

§ 146



**問題十** 三角形之一角爲  $34^\circ$ 。其餘二角之一角爲



他角度數三倍。求共度數幾何。

〔解〕 定  $x$  爲  $\angle C$  角之度數。則

$2x$  必爲大角之度數矣。因得

$$x + 2x = 180^\circ - 34^\circ$$

$$3x = 146^\circ$$

$$\therefore x = 48\frac{2}{3}^\circ \quad \text{而} \quad 2x = 97\frac{1}{3}^\circ$$

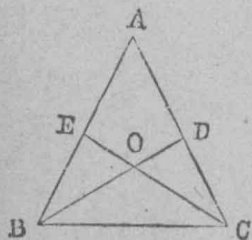
答小角  $48\frac{2}{3}^\circ$  大角  $97\frac{1}{3}^\circ$

問題十一 若兩等邊三角形之頂角爲  $30^\circ$ 。求其一邊及底邊引長所成之外角。

〔解〕 兩等邊三角形之頂角既於等  $30^\circ$ 。則兩底角必各爲  $75^\circ$ 。

$$\therefore \text{外角} = 75^\circ + 30^\circ = 105^\circ. \quad \S 137$$

問題十二 若兩等邊三角形之頂角爲  $36^\circ$ 。求其兩底角被二平分線所分得之角幾何。



〔解〕  $\angle ABC = \angle ACB =$

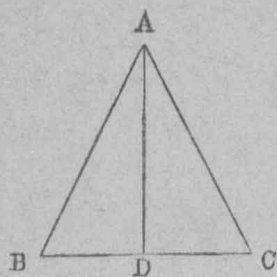
$$\frac{1}{2}(180^\circ - 36^\circ) = 72^\circ$$

$$\angle OBC = \angle OCB = \frac{1}{2} \times 72^\circ = 36^\circ$$

$$\angle BOC = 180^\circ - 2 \times 36^\circ = 180^\circ - 72^\circ =$$

$$108^\circ$$

**問題十三** 兩等邊三角形自頂角至底邊作中分線。  
為底邊之垂線。且平分頂角。



[解] 設  $ABC$  為兩等邊三角形。  
而  $D$  為  $BC$  之中點。求證  $AD \perp BC$ 。  
而  $\angle DAB = \angle DAC$ 。

[證] 於  $\triangle BAD$  及  $\triangle CAD$  內。

$AB = AC$  題設

$BD = CD$

而  $AD$  公用

則  $\triangle BAD = \triangle CAD$  § 150

$\therefore \angle DAB = \angle DAC$  § 128

且  $\angle BDA = \angle CDA$  § 78

$\therefore AD \perp BC$  § 63

**問題十四** 二直線以一截

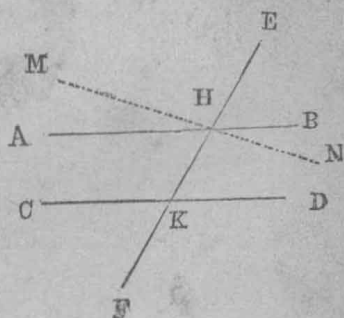
線截之其相對二外角

相等。則此二直線平行。

[解]  $AB, CD$  二直線為  
截線  $EF$  所截於  $H$  及  $K$ 。

題云。若  $\angle AHE$  等於  $\angle DKF$ 。

則  $AB$  與  $CD$  平行。



〔證〕 作  $MN$  通過  $H$  而  $\parallel CD$ 。

則  $\angle MHE = \angle DKF$  § 113

但  $\angle AHE = \angle DKF$  題設

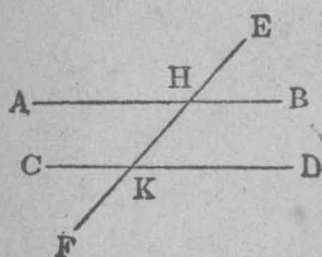
因知  $\angle MHE = \angle AHE$  公理

$\therefore MN$  與  $AB$  合一。 § 60

但  $MN \parallel CD$  構圖

$\therefore AB \parallel CD$

問題十五 二平行線以一截線截之。其截線一邊所成二外角相補。



〔解〕 設  $AB$  及  $CD$  二平行線。爲  $EF$  截線所截於  $H$  及  $K$ 。求證  $\angle EHB$  與  $\angle DKE$  相補。

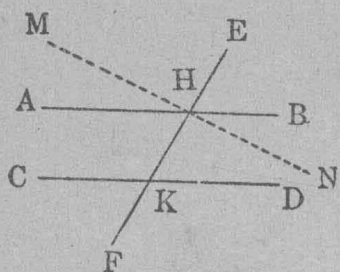
〔證〕  $\angle CKF$  與  $\angle DKF$  相補。 § 86

但  $\angle CKF = \angle EHB$  § 113

故  $\angle EHB$  與  $\angle DKE$  亦相補。

問題十六 二直線以一截線截之。其一邊所作二外角相補。則此二直線平行。

〔解〕 命  $EF$  截  $AB, CD$  二直線於  $H$  及  $K$ 。且令  $\angle EHB$  與  $\angle DKF$  相補。求證  $AB \parallel CD$ 。



〔證〕 設 MN 通過 H 而與 CD 平行。

則  $\angle EHN$  與  $\angle DKF$  相補。

問題 15

但  $\angle EHB$  與  $\angle DKF$  亦

題設

相補。

則

$$\angle EHN = \angle EHB$$

§ 85

$\therefore$  MN 與 AB 合。

§ 60

但

$$MN \parallel CD$$

構圖

故知

$$AB \parallel CD$$

**問題十七**  $n$  邊多邊形中。可作幾對角線。

〔解〕 多邊形之對角線。爲連二不相隣之角頂點之線。(§ 192) 故每角有  $\frac{1}{2}(n-3)$  對角線。因知有  $n$  個角頂。必可作  $\frac{1}{2}n(n-3)$  對角線。但多邊形所有之角頂與其邊數同。

故  $n$  邊多邊形。可作  $\frac{1}{2}n(n-3)$  對角線。

**問題十八** 若一多邊形之諸內角之和。二倍於諸外角之和。及十倍於諸外角之和。問此多邊形有幾何邊。

〔解〕 (1) 設  $n$  爲多邊形之邊數。則諸內角之和。等

於  $(n-2) \cdot 2$  正角。而諸外角之和爲 4 正角。因得 § 207

$$(n-2) \cdot 2 = 8$$

$$2n - 4 = 8$$

$$\therefore n = 6$$

(2) 設  $n$  爲多邊形之邊數。

$$(n-2) \cdot 2 = 40$$

$$2n - 4 = 40$$

$$\therefore n = 22$$

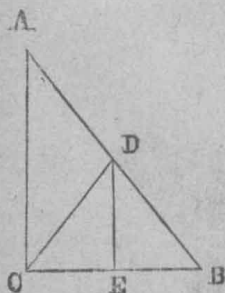
問題十九及問題二十 原書已有詳解。茲不復贅。

問題二十一 正三角形弦線中之中點。距三頂點等遠。

[解] 設  $ABC$  爲正三角形。而  $D$  爲  $BC$  弦之中點  
求證  $DA = DB = DC$ 。

[證]

作  $DE \perp CB$



則  $DE \parallel AC$  § 104

$\therefore DE$  平分  $CB$ 。 § 188

則  $\triangle DEC = \triangle DEB$  § 144

$\therefore DC = DB$  § 128

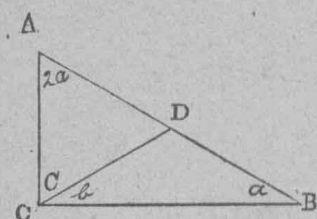
但  $DB = DA$  題設

故

$DA = DB = DC$

公理 1

問題二十二 若正角三角形之一銳角倍於他一銳角。則弦線倍於最短足。



〔解〕 設  $ABC$  爲正角三角形。 $\angle C$  爲正角。而  $\angle A$  爲  $\angle B$  之二倍。求證  $AB=2AC$ 。

〔證〕  $CD$  爲中分線。

$$CD=BD=AD$$

問題 21

則  $\angle b=a$  而  $\angle C=2a$  § 145

但  $\angle a+2a=90^\circ$  § 135

$$\therefore \angle a=30^\circ \quad 2\angle a=60^\circ$$

即知  $\angle C=60^\circ$

$\therefore ACD$  爲等邊三角形。 § 148

而  $AD$  爲  $AB$  之半等於  $AC$ 。

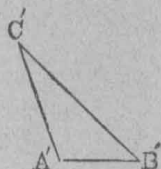
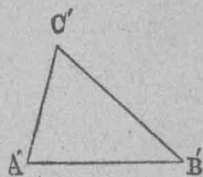
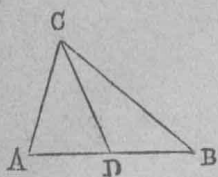
$$\therefore AB=2AC$$

問題二十三 若兩三角形有二邊相等。其對二邊之二角亦相等。則對二等邊之他二角必相等或相補。若相當。則三三角形相等。

〔解〕 設  $AC=A'C'$   $CB=B'C'$

而  $\angle B=\angle B'$

求證  $\triangle A$  與  $C'A'B'$  相等或相補。



〔證〕 置  $\triangle A'B'C'$  於  $\triangle ABC$  之上。令  $B'C'$  與  $BC$  相合。而  $\angle A'$  及  $\angle A$  同在  $BC$  之一邊。

因  $\angle B = \angle B'$   $B'A'$  落於  $BA$ 。  $A'$  落於  $A$ 。或  $BA$  上之一點  $D$ 。設  $A'$  落於  $A$ 。則  $\triangle ABC$  與  $\triangle A'B'C'$  相合一。且相等。若  $A'$  落  $D$ 。則  $\triangle ABC$  與  $\triangle DBC$  相等。

因  $CD = C'A' = CA$   $\angle A = \angle CDA$ 。

但  $\angle CDA$  與  $\angle CDB$  相補。 § 86

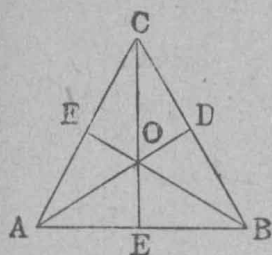
故  $\angle A$  與  $\angle CDA$  亦相補。 § 85

〔討論〕 (1) 若與角  $B$  及  $B$  爲兩正角或鈍角。(2)

若所作角  $A$  及  $A'$  爲兩銳角。或正角。或爲兩鈍角。(3) 若  $AC$  及  $A'C'$ 。不短於  $BC$  及  $B'C'$ 。則兩三角形相等。

**問題二十四** 三角形之三平分線於一點相交。此點距此三形之三邊等遠。

〔解〕 設  $\angle CAB$  之平分線  $AD$ 。與  $\angle CBA$  之平分線  $BE$  相交於  $O$ 。求證  $O$  點必在平分線  $CF$  內。



故 O 在 CF 內。

§ 162

〔證〕 O 在 AD 之中。且距 AC

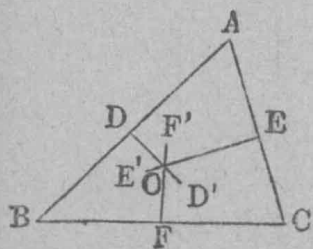
又 AB 等遠 § 162

及 O 在 BE 之中。且距 BC 及  
AB 等遠。 § 162

即 O 距 AC 及 BC 亦等遠。

問題二十五 三角形三邊之平分垂線於一點相遇。

此點距三角形之三頂點等遠。



〔解〕 設 AC 及 AB 之平分  
垂線 EE' 及 DD'。相遇於 O  
求證 O 在 EF' 平分垂線內。

〔證〕 今 O 在 EE' 內。且距  
A 及 C 等遠。 § 161

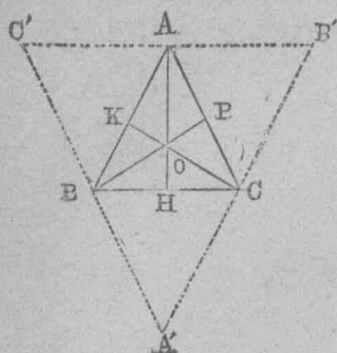
又 O 在 DD' 內。且距 A 及 B 等遠。 § 161

因知 O 距 B 及 C 亦等遠。

∴ O 點當在 FF' 平分垂線內。 § 160

問題二十六 自三角形之三角頂點至對邊之垂線。  
相遇於一點。

〔解〕 設於  $\triangle ABC$  內。作  $AH \perp BC$ 。  $BP \perp AC$ 。  $CK \perp AB$ 。  
求證  $AH, BP, CK$  同交於一點。



〔證〕 通過  $ABC$  作  $B'C'$ ,  $A'C'$ ,  $A'B'$ . 令各與  $CB$ ,  $CA$ ,  $BA$  兩兩平行。

則  $AH \perp B'C'$ . § 107

今  $ABCB'$  及  $ACBC'$  爲四。

§ 166

而  $AB' = BC$  及  $AC' = BC$  § 178

即  $A$  爲  $B'C'$  之中點。而  $B$  爲  $A'C'$  之中點。  $C$  爲  $A'B'$  之中點。

故  $AH$ ,  $BP$  及  $CK$  爲  $\triangle ABC$  各邊之平分垂線。

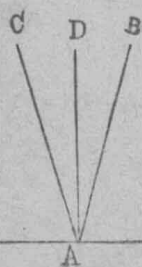
因知  $AH$ ,  $BP$  及  $CK$  同交於一點。 問題 25

問題二十七 原書已有詳解。茲不贅錄。

問題二十八 平分一角。由角頂作一線。與平分線成垂線。則此線與與角之兩邊作兩等角。

〔解〕 設  $BAC$  爲與角。而  $AD$  爲平分線。

通過  $A$  作  $EF \perp AD$ . 求證  $\angle CAE = \angle BAF$ .



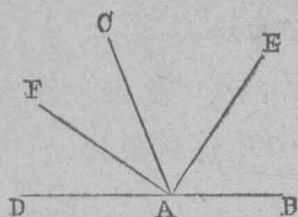
〔證〕  $\angle CAE = 90^\circ - \angle DAC$

$\angle BAF = 90^\circ - \angle DAB$

但  $\angle DAC = \angle DAB$

$\therefore \angle CAE = \angle BAF$

問題二十九 二鄰補角之二平分線彼此成垂線。



〔解〕 設  $\angle BAC$  與  $\angle CAD$  相補。而  $AE$  平分  $\angle BAC$ ， $AF$  平分  $\angle CAD$ 。求證  $AF \perp AE$ 。

$$\begin{aligned} \text{〔證〕 } 2\angle EAC + 2\angle CAF \\ = 180^\circ \end{aligned}$$

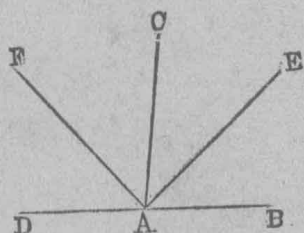
$$\therefore \angle EAC + \angle CAF = 90^\circ$$

$$\therefore \angle EAF = 90^\circ$$

因知

$$AF \perp AE$$

問題三十 若二鄰角之二平分線彼此成垂線。則此二隣角相補。



〔解〕 設  $\angle BAC$  及  $\angle CAD$  爲兩鄰角。 $AE$  平分  $\angle BAC$ ，而  $AF$  平分  $\angle CAD$ 。今  $\angle EAF = 90^\circ$ 。求證  $\angle BAC$  及  $\angle CAD$  相補。

$$\text{〔證〕 } \angle EAC + \angle CAF = 90^\circ$$

題設

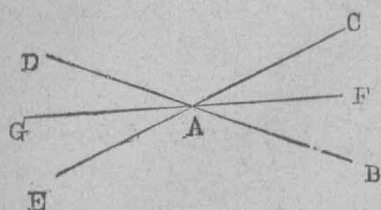
$$\text{即 } 2\angle EAC + 2\angle CAF = 180^\circ$$

$$\therefore \angle BAC + \angle CAD = 180^\circ$$

故

$\angle BAC$  及  $\angle CAD$  相補。

問題三十一 平分同頂二角之一之直線亦平分他  
一。



〔解〕 設  $\angle BAC$  及  $\angle DAE$  爲同頂角。AF 平分  $\angle BAC$ 。且引長 FA 至 G。求證 AG 平分  $\angle DAE$ 。

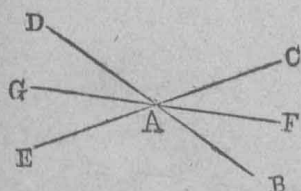
〔證〕  $\angle DAG = \angle BAF$  § 93

而  $\angle EAG = \angle CAF$

但  $\angle BAF = \angle CAF$  題設

$\therefore \angle DAG = \angle EAG$  公理 1

問題三十二 同頂二角之平分線成一直線。



〔解〕 設  $\angle BAC$  及  $\angle DAE$  爲二同頂角。而 AF 平分  $\angle BAC$ 。AG 平分  $\angle DAE$ 。求證 AF 及 AG 在一直線上。

〔證〕  $\angle BAC = \angle DAE$  § 93

$\therefore 2\angle CAF = \angle DAE$  公理 1

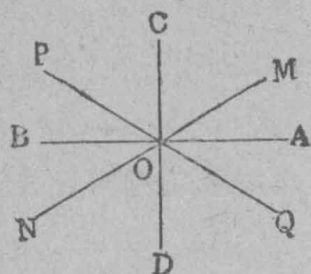
今  $\angle CAF + \angle DAG = \angle BAC$

但  $\angle BAC + \angle CAD = 2$  正角 § 86

$$\therefore \angle CAF + \angle CAD + \angle DAG = 2 \text{ 正角}$$

故 AF 及 AG 成一直線。

問題三十三 一雙同頂二角之二平分線互為垂線。



〔解〕 MN 及 PQ 相交於 O。作四角。而 AB 及 CD 為其角之平分線。

求證  $AB \perp CD$ 。

$$\text{〔證〕 } \angle DOQ = \angle MOC$$

而  $\angle AOQ = \angle AOM$

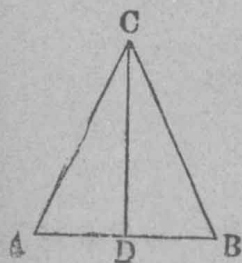
$$\therefore \angle AOD = \angle AOC$$

但  $\angle AOD + \angle AOC = 180^\circ$  § 86

$$\therefore \angle AOD = 90^\circ$$

因知  $AB \perp CD$

問題三十四 兩等邊三角形之頂角平分線。平分底邊。且為底邊之垂線。



〔解〕 設於  $\triangle ABC$  中。AC 等於 BC。而 CD 平分  $\angle C$ 。求證。

$$AD = BD.$$

而  $CD \perp AB$ 。

〔證〕 因  $AC = BC$

題設

而  $CD$  公用。

故  $\angle ACD = \angle BCD$

題設

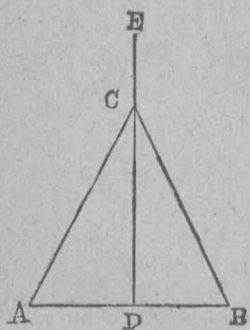
則  $\triangle ADC = \triangle BDC$

$\therefore AD = BD$  而  $\angle ADC = \angle BDC$  § 128

因知  $\angle ADC$  及  $\angle BDC$  皆為正角。 § 63

故  $CD \perp AB$ 。

**問題三十五** 兩等邊三角形之平分垂線。可通至頂角。且平分之。



[解] 設  $ABC$  為兩等邊三角形。  $ED$  為  $AB$  之平分垂線。求證  $DE$  通過  $C$ 。而平分  $\angle ACB$ 。

[證] 因  $AC = BC$

故  $ED$  必通過  $C$ 。 § 160

於  $\triangle ACD$  及  $\triangle BCD$  內。

$AC = BC$  題設

$\angle CAD = \angle CBD$  § 145

而  $CD$  公用

則  $\triangle ACD = \triangle BCD$  § 141

$\therefore \angle ACD = \angle BCD$  § 128

**問題三十六** 三角形底邊之平分垂線。若通至頂角。