数学奥林匹克

初中练习册

三年级·下

北京数学奥林匹克学校 主编

北京师范大学出版社

数学奥林匹克初中练习册

（三年级·下）

北京数学奥林匹克学校　主编

北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克初中练习册 三年级·下/北京数学奥林
匹克学校主编。
一北京:北京师范大学出版社,1994.6
ISBN 7-303-03549-4

Ⅰ.数… Ⅱ.北… Ⅲ.数学课-中学-教学参考资料
Ⅳ.G634.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(94)第 10990 号

北京师范大学出版社出版发行
(100875 北京新街口外大街 19 号)
北京昌平兴华印刷厂印刷 全国新华书店经销
开本:787×1092 1/16 印张:6.5 字数:158 千
1994 年 5 月北京第 1 版 1996 年 1 月北京第 2 次印刷
印数:20001—30000 册
定价:5.70 元

《数学奥林匹克初中练习册》

编辑委员会

使用说明

北京数学奥林匹克学校(BMOS)成立于1985年，是全国第一家数学奥林匹克学校。它创立十年来在北京市教育局、北京市科协、北京数学会的关心支持和领导下，为丰富北京市中小学生的课外活动，促进教育教学改革，培养各类人才进行了积极的探索并取得了可喜的成绩。北京数学奥林匹克学校培养的中小学生在全国小学数学奥林匹克、全国初中数学联赛、全国高中数学联赛、中国数学奥林匹克(暨全国中学生数学冬令营)等全国性数学竞赛，以及北京市的各类数学竞赛中均取得了优异的成绩.并且有九人次入选国际数学奥林匹克(IMO)中国代表队，为国家争得了荣誉。

北京数学奥林匹克学校云集了一批来自科研单位、高等院校、教研部门以及中小学的骨干教师，他们经验丰富，积累了大量的资料并形成了有效的训练方法，这套《数学奥林匹克初中练习册》即是该校初中部的全体教练员根据中国数学会普及工作委员会制定的《初中数学竞赛大纲》以及初中部教学计划集体编写而成的。

本套《练习册》共包括六个分册，分别供初一年级上、下学期，初二年级上、下学期和初三年级上、下学期使用。初一上下册、初二上下册及初三上册每册包括15个训练课题和5套综合练习。训练课题尽量以课内教学顺序为基础，力争与课堂教学同步进行.综合练习的题目则围绕15个课题选配，教师在指导学生使用时，可根据具体情况适当调整。初三下册包括10个训练课题、5套综合练习以及5套模拟试题(即近五年全国初中联赛试题)，目的是为参加初中联赛的学生提供一个综合训练的机会。

由于时间仓促，练习册这种形式对我们来讲也是一种尝试，其中错误疏漏之处难免，希望广大的教师和同学们批评指正，以便我们修订时予以补救。

目　录

学校________班级________姓名________学号________成绩________

练习一　整数问题

整数问题是数学中基本而又重要的问题之一，在各种数学竞赛中，涉及整数的问题是很多的，《初中数学竞赛大纲》中列出了这部分的内容："十进制整数及表示方法，整除性，被 2,3,4,5,8,9,11 等数整除的判定；素数和合数，最大公约数与最小公倍数；奇数和偶数，奇偶性分析，奇偶的特殊表述法；带余除法和利用余数分类；完全平方数；因数分解的表示法，约数个数的计算；简单的一次不定方程."解整数问题，除需运用上述基本知识外，还需运用一些常用方法和特殊技巧.对整数问题，不仅要掌握整数本身方面的问题的解法，而且还要能解整数与其它内容结合的综合题.

一、选择题

1. 若一个三位数的各位数字非零且彼此不同，它等于所有由它的各位数字所组成的两位数之和，则这样的三位数的个数为(　　).

(A) 1；　(B) 2；　(C) 3；　(D) 4.

2. 若 a 为不超过 1994 的正整数，且 $24|a^3+23$，则这样的 a 的个数为(　　).

(A) 81；　(B) 82；　(C) 83；　(D) 84.

3. 方程 $19x+93y=4xy$ 的正整数解的组数为(　　).

(A) 1；　(B) 2；　(C) 3；　(D) 4.

4. 方程 $\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=\frac{3}{7}$ 的整数解的组数为(　　).

(A) 2；　(B) 4；　(C) 6；　(D) 以上答案都不对.

5. 使二次方程 $(k-6)(k-9)x^2+(15k-117)x+54=0$ 的两根都是整数的实数 k 的个数为(　　)

(A) 6；　(B) 7；　(C) 8；　(D) 9.

6. 满足 $2n+1|n^4+n^2$ 的正整数 n 的个数为(　　).

(A) 1；　(B) 2；　(C) 3；　(D) 4.

7. 若 n 为正整数，且 $100|2^n+n^2$，则这样的 a(　　).

(A) 不存在；　(B) 只有一个；

(C) 有有限多个(不止一个)；　(D) 有无穷多个.

8. 所有使代数式 $2n^2+n-29$ 的值是某两个连续自然数的平方和的整数 n 的和是(　　).

(A) 10；　(B) -20；　(C) 30；　(D) -40.

二、填空题

1. 若关于 x 的方程 $4x^2-2mx+n=0$ 的两根均大于 0 而小于 1，则正整数 m、n 的值是________.

2. 若方程组$\begin{cases}x^2+2ay=5\\ y-x=6a\end{cases}$有正整数解，则 a 的值为____________.

3. 使 m^2+m+7 是完全平方数的所有整数 m 的积是____________.

4. 若一个两位数除以它的反序数所得的商数恰等于余数，则这个两位数是____________.

5. 不能表示成两个奇合数之和的最大偶数是____________.

6. 设 $d_1,d_2,\cdots,d_k(k\geqslant4)$ 是整数 n 的所有正约数，$d_1<d_2<\cdots<d_k$，$d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2=n$，则
为____________.

7. 若 p 为不超过 1993 的素数，且 $2p+1$ 是自然数的方幂（指数 $n\in\mathbf{N}$ 且 $\geqslant2$），则 p 为____________.

8. 使得 3^{11} 可以表示成 k 个连续的正整数之和的最大的 k 是____________.

三、解答题

1. 设自然数 n 使 $2n+1$ 及 $3n+1$ 都是完全平方数.

(1)求证：$40|n$；

(2)问 $5n+3$ 能否为质数？

2. 已知$\triangle ABC$ 是不等边三角形，$\angle A=60^\circ$，$a=7$，b、c 均为整数，求 b、c.

3. 已知$\triangle ABC$的三边长均为整数，且周长数值是面积数值的两倍，求其三边长.

4. 证明：对任意小于 1994 的 998 个不同的自然数，至少有一个恰为另两个之和.

5. 求出所有能被 11 整除，且所得的商等于它的各个数字的平方和的三位数.

6. 试求出所有的正整数 a,b,c，其中 $1<a<b<c$，且使得 $(a-1)(b-1)(c-1)\mid(abc-1)$.

学校________班级________姓名________学号________成绩________

练习二　面积方法*

运用面积，可以建立起一套通用而简明的解题方法，我们已经熟知三角形的面积公式是$\triangle ABC=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}ab\sin C$，其中$\triangle ABC$表示三角形面积.

为了方便，还需引进以下两个定理：

1. 共边定理：若两直线AB与PQ交于M，则$\frac{\triangle PAB}{\triangle QAB}=\frac{PM}{QM}$.（如图1）

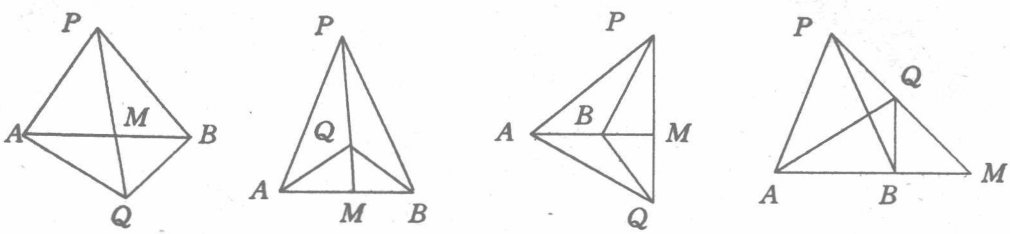

图 1

2. 共角定理：共角三角形面积之比等于对应角（相等角或互补角）的二夹边乘积之比.
也就是说，若$\angle ABC$与$\angle A'B'C'$相等或互补，

则$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AB\cdot BC}{A'B'\cdot B'C'}$.（如图2）

图 2

* 本内容所涉及的方法是根据北京大学张筑生教授的讲座整理而成的.

1. 如图 3，在$\triangle ABC$ 的两边 AB、AC 上分别取 E、D 两点，线段 BD、CE 交于 P. 已知 $CD=\mu AD$，$AE=\upsilon BE$，试求：$PD:PB$.

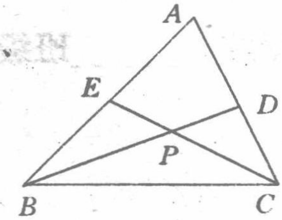

图 3

2. 在凸四边形 $ABCD$ 中，M、N 分别是对角线 AC、BD 的中点，E 是 AD 与 BC 的交点. 求证：$\triangle EMN=\frac{1}{4}\times$(四边形 $ABCD$ 的面积).

3. 如图 4，在凸四边形 $ABCD$ 中，M 和 N 分别是对角线 AC、BD 的中点，过 M、N 的直线分别交 AD 和 BC 于 P、Q. 求证$\triangle PBC=\triangle QAD=\frac{1}{2}\times$(四边形 $ABCD$ 面积).

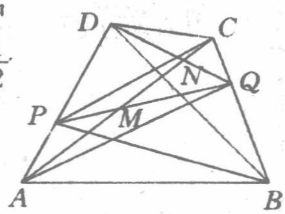

图 4

4. 在$\triangle ABC$ 中，AM 是 BC 边上的中线，P 是 AM 上的一点，CP 的延长线交 AB 于 Q. 求证：

$\frac{AP}{PM}=2\frac{AQ}{AB}$.

5. 在$\triangle ABC$中，$AB=3AC$，AD是$\angle BAC$的平分线，BE与AD的延长线垂直相交于E，求证$AD=DE$.

6. 在锐角$\triangle ABC$中，AD是BC边上的高. P是AD上任意一点，设直线BP、CP分别交AC、AB于E及F，试证$\angle ADE=\angle ADF$.

7. 在$\triangle ABC$中，AM是BC边上的中线，D和E分别是AB、AC上的点，且$AD=AE$，DE与AM交于N，求证$\frac{DN}{NE}=\frac{AC}{AB}$.

8. 设 P 是圆 O 外一点，PA 和 PB 分别切圆 O 于 A、B 两点，C 是 PA 延长线上一点，D 是 PB 之间的点，$AC=BD$. 求证 AB 与 CD 的交点 E 平分 CD.

9. 设六边形 $ABCDEF$ 三条对角线 AD、BE、CF 都平分此六边形的面积. 求证：这三条对角线交于一点.

10. $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 的平分线与 $\triangle ABC$ 的外接圆相交于 D，I 是 $\triangle ABC$ 的内心，M 是 BC 边的中点. P 是 I 关于 M 的对称点（设点 P 在圆内）. 延长 DP 与外接圆相交于点 N，试证在 AN、BN、CN 三条线段中，必有一条线是另外两条线段之和.

学校________班级________姓名________学号________成绩________

练习三　构造法

构造法是一种精巧的数学方法，从思维特点讲具有奇异性，从解题策略讲带有探索性，在方法形式上富于创造性. 常见的构造类型有：构造方程，构造恒等式，构造函数，构造数组、数列，构造图形，构造实例，构造反例，构造引理，构造等价命题，构造数学模型等等.

构造法解题常把代数、几何、三角等数学各分支的知识方法沟通起来，相互渗透，相互转化，常运用类比、联想等逻辑思维方法，因此构造法解题训练可以使学生进一步掌握数学知识方法的本质和内在联系，可以开阔思路，培养辩证的思维方法，提高分析问题、解决问题的能力.

一、选择题

1. 实数 x，y 满足 $x^2+4y^2+2x-4y+2=0$，则 $x^{2y}+2x\sqrt{y}$ 的值等于(　　).

(A) $-1-\sqrt{2}$；(B) $1-\sqrt{2}$；　(C) 3；　　(D) -3.

2. 设 $a^2+2a-1=0$，$b^4-2b^2-1=0$ 且 $ab^2\neq1$，则$\left(\dfrac{ab^2+b^2+1}{a}\right)^{1995}$的值为(　　).

(A) -1；　　(B) 1；　　(C) 0；　　(D) 2^{1995}.

3. a,b,c,d 均为正数，则以 $\sqrt{b^2+c^2}$，$\sqrt{a^2+c^2+d^2+2cd}$，$\sqrt{a^2+b^2+d^2+2ab}$ 为边长的三角形面积为(　　).

(A) $\frac{1}{2}(ab+bc+cd)$；　　(B) $\frac{1}{2}(bc+cd+da)$；

(C) $\frac{1}{2}(cd+da+ab)$；　　(D) $\frac{1}{2}(ac+bc+bd)$.

4. 有十人排队每人买一张电影票，票价 1 元. 这十人中，有 5 人手持 1 元钱，另 5 人手持 2 元面值的钱，售票处没有准备零钱，那么不因找不开钱而延误购票时间的排队顺序有(　　)种.

(A) 3628800；　(B) 86400；　(C) 60480；　(D) 14400.

5. 如图 1，把 1，2，3，……，1994 按顺序写在一个大圆圈内，从 1 开始，隔一个数删一个数，即保留 1，删去 2，保留 3，删去 4，……在圆周上如此一直继续下去，直到删得只剩下一个数为止，则最后剩下的是(　　).

(A) 997；　(B) 1993；　(C) 1939；　(D) 1941.

图 1

6. 六边形 $ABCDEF$ 的六个内角都是 120°，且 $AB=1$，$BC=CD=3$，$DE=2$，则六边形 $ABCDEF$ 的周长为(　　).

(A) 15；　(B) 16；　(C) 17；　(D) 不能确定.

7. 在上底为 a，下底为 b 的梯形 $ABCD$ 中（如图 2），作 $MN \parallel AB$，且梯形 $ABNM \backsim$ 梯形 $MNCD$，PQ 是梯形的中位线，EF 是过对角线交点且平行于底的夹在两腰间的线段，GH 是平行于两底且把梯形 $ABCD$ 面积二等分的线段. 设 $x=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$，$y=\dfrac{ab}{a+b}$，$z=\sqrt{ab}$，$w=\dfrac{a+b}{2}$，则（　　）.

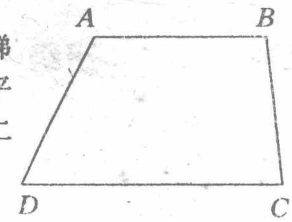

图 2

(A) $x=PQ, y=GH, z=MN, w=EF$；

(B) $x=GH, y=EF, z=MN, w=PQ$；

(C) $x=MN, y=EF, z=GH, w=PQ$；

(D) $x=GH, y=MN, z=EF, w=PQ$.

8. 实数 a,b,c 满足 $a^2-bc-8a+7=0$，$b^2+c^2+bc-6a+6=0$，则 a 的取值范围是（　　）.

(A) $(0,+\infty)$；　(B) $[1,9]$；　(C) $[1,13]$；　(D) $[1,+\infty)$.

二、填空题

1. 计算 $2\times3\times4\times5+3\times4\times5\times6+4\times5\times6\times7+\cdots\cdots+100\times101\times102\times103=$ ________.

2. 计算 $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=$ ________.

3. 常数 a,b,c 为正数，那么当 $x=$ ________ 时，$\sqrt{x^2+a}+\sqrt{x^2-2cx+c^2+b}$ 的值最小.

4. a,b,c 互不相等，且都不为 0，则方程组 $\begin{cases}\dfrac{x}{a^3}-\dfrac{y}{a^2}+\dfrac{z}{a}=1\\ \dfrac{x}{b^3}-\dfrac{y}{b^2}+\dfrac{z}{b}=1\\ \dfrac{x}{c^3}-\dfrac{y}{c^2}+\dfrac{z}{c}=1\end{cases}$ 的解中 $x=$ ________.

5. 已知实数 a,b,c,d,e 满足 $a+b+c+d+e=8$，$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16$，则 e 的最大值为 ________.

6. 已知 $0<a<1$，$0<b<1$，则 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(1-a)^2+b^2}+\sqrt{(b-1)^2+a^2}+\sqrt{(a-1)^2+(1-b)^2}$ 的最大值为 ________.

7. x,y,z 为正实数，且 $x^2+xy+\dfrac{y^2}{3}=25$，$\dfrac{y^2}{3}+z^2=9$，$z^2+xz+x^2=16$，则 $xy+2yz+3zx$ 的值为 ________.

8. 从 1，2，3，……，1994 这 1994 个自然数中，要划去 n 个数，使剩下的数组中每个数都不等于该组中另外两数之积，则划去的数和的最小值为 ________.

三、解答题

1. 已知 $a^2+b^2=1$，$x^2+y^2=1$，$ax+by=0$，求证：$a^2+x^2=1$，$b^2+y^2=1$，$ab+xy=0$.

2. 设 a,b,c,d 都是正数，且 a 的值最大，若 $a:b=c:d$，求证 $a+d>b+c$.

3. a,b,c 是绝对值小于 1 的实数，求证：$ab+bc+ca+1>0$.

4. 能否把 20 个整数写成一行，使得任意三个相邻的数之和都大于 0，而且所有这 20 个数之和都小于 0.