

2014

理工社®

文登培训学校策划

陈文灯◆主 编



文登教育

Wendeng Education

◆附赠**真题线路图**，考点一目了然！**数学(二)**

考研数学 十年真题点评

◆立足真题 把握规律 ◆名师亲笔 点评独到

 北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



文登教育

Wendeng Education

20

文登10周年纪念刊

陈文灯◆主 编

数学(二)

◆附赠真题线路图, 考点一目了然!

考研数学 十年真题点评

◆立足真题 把握规律 ◆名师亲笔 点评独到

图书在版编目(CIP)数据

考研数学十年真题点评. 数学二/陈文灯主编. —北京:北京理工大学出版社, 2013. 4
ISBN 978 - 7 - 5640 - 7581 - 1

I. ①考… II. ①陈… III. ①高等数学 - 研究生 - 入学考试 - 题解 IV. ①O13 - 44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 064871 号

出版发行 / 北京理工大学出版社

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(办公室) 68944990(批销中心) 68911084(读者服务部)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 北京柯蓝博泰印务有限公司

开 本 / 787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张 / 11

字 数 / 221 千字

版 次 / 2013 年 4 月第 1 版 2013 年 4 月第 1 次印刷

定 价 / 25.00 元

责任校对 / 周瑞红

责任印制 / 边心超

前 言

一年一度的硕士研究生入学统一考试已经举行了十几届,积累了近百份数学试卷,这既是众多命题专家智慧和劳动的结晶,也是广大考研学子的宝贵财富。

历届的考研真题,除其内容外,还包含诸多有价值的信息,例如试题的形式、涵盖面、难度及试题所蕴涵的规律性。为了使考生在考研真题中汲取更多知识、掌握更多解题方法,我们将2004—2013年全国硕士研究生入学统一考试数学试题作了精心的解析,编写成《考研数学十年真题点评》系列丛书,奉献给广大考研朋友,书中对每道真题通过“分析”“详解”和“评注”三部分进行点评。在“分析”中用简明的语言给出解题思路;在“详解”中用简捷、新颖的方法给出详细解答;在“评注”中强调与真题有关的知识点及题解中使用的技巧。

希望读者在使用本书时,不要轻易地翻阅真题的解答,只有当百思不得其解时才查阅解答;而且每做完一道真题,应回过头来仔细阅读书中有关这道真题的分析、详解和评注,进行比对和总结。如果能如此下工夫做完最近十年的数学考研真题,我们深信读者在考研数学的基本概念和基本理论的理解上、在计算方法和计算技巧的掌握上都将获得一个飞跃,在解题能力和应考水平上也将在有一个较大幅度的提高,从而能更加从容地面对研究生入学考试。

这套系列丛书自问世以来,深得广大考研学子的喜爱。今年在以往的基础上,我们作了认真的修订,增加了新的内容(如增加了考题路线图),使得它更适合广大考研朋友复习使用。

由于成书时间仓促,书中疏漏之处在所难免,恳请广大读者和同仁指正。

编 者

2013年3月

近 10 年考题路线图

(2004—2013 年)

注：“一(1),2004”表示 2004 年第一大题第 1 小题,其中一()、二()为客观题,其他为解答题。(10 年考题总数 231 题,总分值 1500 分,其中 2007 年为 24 题)

第一部分 高等数学

(10 年考题总数:181 题,总分值:1172 分。占两部分题量之比重:78%;占两部分分值之比重:78%)

第一章 函数、极限、连续

(10 年考题总数:36.5 题,总分值:226 分。占第一部分题量之比重:20%;占第一部分分值之比重:19%)

题型 1 求 1^∞ 型极限(二(9),2011)

题型 2 求 $0/0$ 型极限(三(18(II)),2004;三(15),2005;二(11),2007;三(15),2008;三(15),2009;三(15),2011;三(15),2012)

题型 3 求 $0 \cdot \infty$ 型极限(三(15),2004)

题型 4 函数性质(奇偶性,周期性,单调性,有界性)的判断或证明(三(17(I)),2004)

题型 5 无穷小的比较或确定无穷小的阶或根据无穷小的阶反求参数(二(7),2004;一(5),2005;三(15),2006;一(1),2007;一(2),2009;一(1),2011;一(1),2013;三(15),2013)

题型 6 数列敛散性的判定或数列极限的求解或证明(三(18),2006;一(6),2007;一(5),2008;三(19(II)),2011;一(3),2012;三(21(II)),2012;三(20(II)),2013)

题型 7 求 n 项和的数列的极限(二(9),2004;一(6),2010)

题型 8 函数间断点的求解或判定(一(1),2004;二(12),2005;一(2),2007;一(4),2008;一(1),2009;一(1),2010;一(3),2013)

题型 9 已知函数的连续性,反求函数中的参数(一(2),2006)

题型 10 已知极限值,求常数或其他(二(9),2008)

题型 11 讨论函数的连续性(二(8),2006)

题型 12 求函数的表达式(三(16(I)),2004)

题型 13 求函数的值域(三(17(II)),2004)

第二章 一元函数微分学

(10 年考题总数:50.7 题,总分值:315 分。占第一部分题量之比重:28%;占第一部分分值之比重:26.9%)

题型 1 与函数导数和微分的概念和性质相关的命题(二(7),2006;一(4),2007;一(2),2011)

- 题型 2 函数(含分段函数)在一点可导的判定或求解(三(16(Ⅱ)),2004;二(7),2005;一(2),2012)
- 题型 3 求复合函数的导数或微分(一(1),2005;二(9),2006;二(13),2010;一(3),2011)
- 题型 4 求隐函数的导数或微分(一(5),2006;二(12),2009;二(9),2012)
- 题型 5 求反函数、参数方程的导数(一(2),2004;三(16),2008;三(17),2010;三(19(Ⅱ)),2012;二(10),2013)
- 题型 6 求函数在一点的高阶导数或泰勒展开式或麦克劳林展开式(二(13),2007;二(11),2010)
- 题型 7 函数极值、最值、拐点或凹凸区间判定或求解(二(8),2004;三(21(Ⅰ)),2006;三(18(Ⅱ)),2007;二(12),2008;二(13),2009;三(16),2011)
- 题型 8 函数与其导函数的关系或图形的判定(二(8),2005)
- 题型 9 不等式的证明或判定(三(19),2004;三(19),2006;三(19(Ⅰ)),2011;三(20),2012)
- 题型 10 在某一区间至少存在一点或两点使某个式子成立的证明(三(19),2005;三(21),2007;三(20),2008;三(21),2009;三(21),2010;三(21(Ⅰ)),2012;三(18),2013)
- 题型 11 函数单调性的判断或增减区间的求解(二(10),2004;三(15),2010)
- 题型 12 方程根的判定或唯一性证明(一(1),2008)
- 题型 13 与函数在一点的切线方程或法线方程相关的命题(一(9),2005;三(21(Ⅱ)),2006;二(12),2007;二(11),2008;二(9),2009;一(3),2010)
- 题型 14 求曲线的渐近线方程(一(2),2005;一(1),2006;一(5),2007;二(10),2010;一(1),2012)

第三章 一元函数积分学

(10年考题总数:32.3题,总分值:220分。占第一部分题量之比重:17.8%;占第一部分分值之比重:18.8%)

- 题型 1 求不定积分或原函数(三(16),2006;三(16),2009)
- 题型 2 函数与其原函数性质的判定或证明(一(6),2009)
- 题型 3 求一元函数(含分段函数)的定积分(一(3),2005;三(17),2005;三(17),2008;二(11),2009;二(10),2012)
- 题型 4 定积分的比较(一(3),2007;三(16),2010;一(6),2011;一(4),2012)
- 题型 5 求解含有定积分或变上限积分的方程(三(16),2005;三(17),2007)
- 题型 6 反常积分的计算或收敛性的判定(一(3),2004;一(3),2006;二(10),2009;一(4),2010;二(12),2011;一(4),2013)
- 题型 7 求曲线的弧长或与曲率或曲率半径相关的问题(一(5),2009;二(12),2010;二(11),2011;三(21(Ⅰ)),2013)
- 题型 8 求平面图形的面积(三(21(Ⅲ)),2006;一(2),2008;二(11),2013)
- 题型 9 求旋转体的体积或侧面积或立体的体积(三(18(Ⅰ)),2004;三(18(Ⅰ)),2007;三(19),2008;三(18),2009;三(20(Ⅰ)),2011;三(17(Ⅱ)),2012;三(16),2013)
- 题型 10 求变力做功或压力等定积分在几何上或物理上的应用(三(18),2010;三(20(Ⅱ)),2011)

第四章 常微分方程

(10年考题总数:21题,总分值:126分。占第一部分题量之比重:11.6%;占第一部分分值

之比重:10.8%)

- 题型 1 求一阶线性微分方程的通解或特解(一(5),2004;一(4),2005;一(4),2006;三(20(II)),2006;二(10),2008;二(10),2011;二(12),2012)
- 题型 2 求二阶或二阶以上齐次或非齐次线性微分方程的通解或特解(二(11),2004;二(14),2007;三(20),2009;二(9),2010;一(4),2011;三(19(I)),2012;二(13),2013)
- 题型 3 求可降阶的微分方程的通解或特解(三(19),2007;三(18),2011)
- 题型 4 已知二阶齐次线性微分方程的解,反求微分方程(二(10),2006;一(3),2008)
- 题型 5 考查齐次或非齐次微分方程解的性质或结构(一(2),2010)
- 题型 6 利用代换化简微分方程并求通解(三(18),2005)
- 题型 7 通过解微分方程求函数表达式
- 题型 8 微分方程的几何或物理应用题(三(20),2004;二(13),2012)

第五章 多元函数微积分学

(10年考题总数:40.5题,总分值:285分。占第一部分题量之比重:22.4%;占第一部分分值之比重:24%)

- 题型 1 求多元复合函数的偏导数或全微分(一(4),2004;三(21),2004;二(11),2005;三(20(I)),2006;二(15),2007;三(20),2007;一(6),2008;二(13),2008;三(17),2009;一(5),2010;三(19),2010;三(17),2011;一(5),2012;二(11),2012;一(5),2013)
- 题型 2 二元函数在一点可微的判定(一(7),2007)
- 题型 3 多元函数极值或最值的判定或求解(三(20),2005;二(12),2006;三(21),2008;一(3),2009;一(5),2011;三(16),2012;三(19),2013)
- 题型 4 计算二重积分(二(10),2005;三(21),2005;三(17),2006;三(22),2007;三(18),2008;三(19),2009;三(20),2010;二(13),2011;三(21),2011;一(6),2012;三(17(I)),2012;三(18),2012;一(6),2013;三(17),2013;三(21(II)),2013)
- 题型 5 二重积分的累次积分的表示或更换次序(二(12),2004;二(11),2006;一(8),2007;一(4),2009)

第二部分 线性代数

(10年考题总数:50题,总分值:328分。占两部分题量之比重:21.6%;占两部分分值之比重:21.9%)

第一章 行列式

(10年考题总数:4.5题,总分值:21分。占第二部分题量之比重:9%;占第二部分分值之比重:6%)

- 题型 1 行列式的计算(一(6),2005)
- 题型 2 求矩阵的行列式(一(6),2004;一(6),2006;二(14),2010;三(22(I)),2012)

第二章 矩阵

(10年考题总数:13题,总分值:58分。占第二部分题量之比重:26%;占第二部分分值之比重:17.7%)

- 题型 1 判断矩阵是否可逆或求逆矩阵(一(7),2008)
- 题型 2 求矩阵的秩(二(16),2007;三(23(I)),2012)
- 题型 3 解矩阵方程或求矩阵表达式(三(23(II)),2008)
- 题型 4 矩阵的伴随矩阵的求解或判定(二(14),2005;一(7),2009;二(14),2012)
- 题型 5 矩阵的初等变换与初等矩阵的关系(二(13),2004;二(14),2006;一(8),2009;一(7),2011)
- 题型 6 两个矩阵关系(等价、相似或合同等)的判定(一(10),2007)

第三章 向量

(10年考题总数:10题,总分值:59分。占第二部分题量之比重:20%;占第二部分分值之比重:18%)

- 题型 1 向量组线性相关性的判断或证明(二(14),2004;二(13),2005;二(13),2006;一(9),2007;三(23(I)),2008;三(22(II)),2009;一(7),2010;一(7),2012;一(7),2013)
- 题型 2 向量的线性表出或讨论含参变量的向量的线性表出(三(22),2005;三(22),2011)

第四章 线性方程组

(10年考题总数:9题,总分值:87分。占第二部分题量之比重:18%;占第二部分分值之比重:26.5%)

- 题型 1 齐次线性方程组的基础解系的求解或判定(一(8),2011)
- 题型 2 已知线性方程组的解或解的情况,求线性方程组或线性方程组中的参数(三(22),2006;三(22),2010)
- 题型 3 求线性方程组的通解(三(23),2007;三(22(I)),2009;三(22(II)),2012)
- 题型 4 讨论含参数的线性方程组的解(三(22),2004;三(23),2005;三(22),2008;三(22),2013)
- 题型 5 直线方程所组成的方程组的解和直线的位置关系的判定

第五章 矩阵的特征值和特征向量

(10年考题总数:9.5题,总分值:72分。占第二部分题量之比重:19%;占第二部分分值之比重:22%)

- 题型 1 求矩阵的特征值或特征向量(三(23(I)),2006;三(24),2007;二(14),2008;三(23(I)),2009;三(23),2011)
- 题型 2 判定矩阵是否可对角化或求解逆问题(三(23),2004;三(23(II)),2006)
- 题型 3 相似矩阵的判定或逆问题(二(14),2009;一(8),2010)
- 题型 4 实对称矩阵的对角化问题(三(23),2010;一(8),2012)

第六章 二次型

(10年考题总数:4题,总分值:31分。占第二部分题量之比重:8%;占第二部分分值之比重:9.5%)

- 题型 1 矩阵合同的判定或求解(一(8),2008)
- 题型 2 与矩阵的规范型相关的命题(三(23(II)),2009;二(14),2011;三(23(II)),2012)
- 题型 3 化实二次型为标准型或求相应的正交变换(三(23),2013)

目 录

第一篇 2004—2013 年考研数学二试题

2013 年考研数学二试题	(1)
2012 年考研数学二试题	(4)
2011 年考研数学二试题	(7)
2010 年考研数学二试题	(10)
2009 年考研数学二试题	(13)
2008 年考研数学二试题	(17)
2007 年考研数学二试题	(20)
2006 年考研数学二试题	(24)
2005 年考研数学二试题	(27)
2004 年考研数学二试题	(30)

第二篇 2004—2013 年考研数学二试题分类解析

第一部分 高等数学	(33)
第一章 函数、极限、连续	(33)
第二章 一元函数微分学	(50)
第三章 一元函数积分学	(75)
第四章 常微分方程	(93)
第五章 多元函数微积分学	(106)
第二部分 线性代数	(126)
第一章 行列式	(126)
第二章 矩阵	(129)
第三章 向量	(135)
第四章 线性方程组	(141)
第五章 矩阵的特征值和特征向量	(151)
第六章 二次型	(158)

第一篇 2004—2013 年考研数学二试题

2013 年考研数学二试题

一、选择题(1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求.请将所选项前的字母填在题后括号内)

(1) 设 $\cos x - 1 = x \cdot \sin \alpha(x)$, 其中 $|\alpha(x)| < \frac{\pi}{2}$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha(x)$ P42, 20 题

- (A) 比 x 高阶的无穷小. (B) 比 x 低阶的无穷小.
(C) 与 x 同阶但不等价的无穷小. (D) 与 x 是等价的无穷小. 【 】

(2) 已知 $f(x)$ 由方程 $\cos(xy) + \ln y - x = 1$ 确定, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(\frac{2}{n}\right) - 1 \right] =$ P54, 11 题

- (A) 2. (B) 1. (C) -1. (D) -2. 【 】

(3) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0, \pi) \\ 2, & x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则 P48, 30 题

- (A) $x = \pi$ 为函数 $F(x)$ 的跳跃间断点.
(B) $x = \pi$ 为函数 $F(x)$ 的可去间断点.
(C) $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处连续但不可导.
(D) $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处可导. 【 】

(4) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1 < x < e \\ \frac{1}{x \ln^{\alpha+1} x}, & x \geq e \end{cases}$, 若反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 则

- (A) $\alpha < -2$. (B) $\alpha > 2$. (C) $-2 < \alpha < 0$. (D) $0 < \alpha < 2$. P84, 21 题 【 】

(5) 设 $z = \frac{y}{x} f(xy)$, 其中函数 f 可微, 则 $\frac{x}{y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} =$ P107, 5 题

- (A) $2yf'(xy)$. (B) $-2yf'(xy)$.
(C) $\frac{2}{x}f(xy)$. (D) $-\frac{2}{x}f(xy)$. 【 】

(6) 设 D_k 是圆域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ 在第 k 象限的部分, 记

$I_k = \iint_{D_k} (y-x) dx dy (k = 1, 2, 3, 4)$, 则 P118, 28 题

- (A) $I_1 > 0$. (B) $I_2 > 0$. (C) $I_3 > 0$. (D) $I_4 > 0$. 【 】

(7) 设矩阵 A, B, C 均为 n 阶矩阵, 若 $AB = C$ 且 B 可逆, 则 P139, 9 题

- (A) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价.
(B) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价.
(C) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价.
(D) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价. 【 】

(8) 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为 P162,7 题

(A) $a = 0, b = 2$.

(B) $a = 0, b$ 为任意常数.

(C) $a = 2, b = 0$.

(D) $a = 2, b$ 为任意常数.

【 】

二、填空题(9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在题中横线上)

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(2 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}} =$ _____ . P34,4 题

(10) 设函数 $f(x) = \int_{-1}^x \sqrt{1-e^t} dt$, 则 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在 $y = 0$ 处的导数 $\left. \frac{dx}{dy} \right|_{y=0} =$ _____ . P54,12 题

(11) 设封闭曲线 L 的极坐标方程为 $r = \cos 3\theta \left(-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \right)$, 则 L 所围成的平面图形的面积是 _____ . P85,22 题

(12) 曲线 $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln \sqrt{1+t^2} \end{cases}$ 上对应于 $t = 1$ 的点处的法线方程为 _____ . P57,21 题

(13) 已知 $y_1 = e^{3x} - xe^{2x}, y_2 = e^x - xe^{2x}, y_3 = -xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解, 则该方程满足条件 $y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 1$ 的解为 _____ . P98,13 题

(14) 设 $A = (a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, $|A|$ 为 A 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 若 $a_{ij} + A_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, 3)$, 则 $|A| =$ _____ . P130,3 题

三、解答题(15 ~ 23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分 10 分)

当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小, 求 n 与 a 的值. P44,24 题

(16)(本题满分 10 分)

设 D 是由曲线 $y = x^{\frac{1}{3}}$, 直线 $x = a (a > 0)$ 及 x 轴所围成的平面图形, V_x, V_y 分别是 D 绕 x 轴, y 轴旋转一周所得旋转体的体积, 若 $V_y = 10V_x$, 求 a 的值. P86,24 题

(17)(本题满分 10 分)

设平面内区域 D 由直线 $x = 3y, y = 3x$ 及 $x + y = 8$ 围成, 计算 $\iint_D x^2 dx dy$. P124,38 题

(18)(本题满分 10 分)

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(1) = 1$, 证明:

(I) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 1$;

(II) 存在 $\eta \in (-1, 1)$, 使得 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$. P71,47 题

(19)(本题满分 10 分)

求曲线 $x^3 - xy + y^3 = 1 (x \geq 0, y \geq 0)$ 上的点到坐标原点的最长距离和最短距离.

P114,20 题

(20)(本题满分 11 分)

设函数 $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$.

(I) 求 $f(x)$ 的最小值;

(II) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求此极限. P40, 17 题

(21)(本题满分 11 分)

设曲线 L 的方程为 $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x (1 \leq x \leq e)$.

(I) 求 L 的弧长;

(II) 设 D 是由曲线 L , 直线 $x = 1, x = e$ 及 x 轴所围平面图形, 求 D 的形心的横坐标.

P124, 39 题

(22)(本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, 当 a, b 为何值时, 存在矩阵 C 使得 $AC - CA = B$, 并求所有矩

阵 C .

P149, 9 题

(23)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$, 记 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$,

$$\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

(I) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$;

(II) 若 α, β 正交且均为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准型为 $2y_1^2 + y_2^2$. P161, 4 题

2012 年考研数学二试题

一、选择题(1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.请将所选项前的字母填在题后括号内)

(1) 曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 渐近线的条数为 P66, 39 题

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. 【 】

(2) 设函数 $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$, 其中 n 为正整数, 则 $f'(0) =$ P52, 6 题

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$. (B) $(-1)^n(n-1)!$.
(C) $(-1)^{n-1}n!$. (D) $(-1)^n n!$. 【 】

(3) 设 $a_n > 0 (n = 1, 2, \cdots)$, $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 则数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的 P40, 16 题

(A) 充分必要条件. (B) 充分非必要条件.
(C) 必要非充分条件. (D) 即非充分也非必要条件. 【 】

(4) 设 $I_k = \int_0^{k\pi} e^{x^2} \sin x dx (k = 1, 2, 3)$, 则有 P79, 10 题

(A) $I_1 < I_2 < I_3$. (B) $I_3 < I_2 < I_1$.
(C) $I_2 < I_3 < I_1$. (D) $I_2 < I_1 < I_3$. 【 】

(5) 设函数 $f(x, y)$ 可微, 且对任意 x, y 都有 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} > 0, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} < 0$, 则使 $f(x_1, y_1) < f(x_2, y_2)$ 成立的一个充分条件是 P106, 3 题

(A) $x_1 > x_2, y_1 < y_2$. (B) $x_1 > x_2, y_1 > y_2$.
(C) $x_1 < x_2, y_1 < y_2$. (D) $x_1 < x_2, y_1 > y_2$. 【 】

(6) 设区域 D 由曲线 $y = \sin x, x = \pm \frac{\pi}{2}, y = 1$ 围成, 则 $\iint_D (xy^5 - 1) dx dy =$ P115, 21 题

(A) π . (B) 2. (C) -2. (D) $-\pi$. 【 】

(7) 设 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{bmatrix}$, 其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为任意常数, 则下

列向量组线性相关的是 P139, 10 题

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$.
(C) $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$. (D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. 【 】

(8) 设 A 为 3 阶矩阵, P 为 3 阶可逆矩阵, 且 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}, P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), Q =$

$(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$, 则 $Q^{-1}AQ =$ P156, 8 题

(A) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$. (C) $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$. 【 】

二、填空题(9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分,请将答案写在题中横线上)

(9) 设 $y = y(x)$ 是由方程 $x^2 - y + 1 = e^y$ 所确定的隐函数,则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} =$ _____.

P53, 10 题

(10) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n^2} \right) =$ _____.

P76, 5 题

(11) 设 $z = f\left(\ln x + \frac{1}{y}\right)$, 其中函数 $f(u)$ 可微, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

P107, 4 题

(12) 微分方程 $y dx + (x - 3y^2) dy = 0$ 满足条件 $y|_{x=1} = 1$ 的解为 _____.

P95, 7 题

(13) 曲线 $y = x^2 + x (x < 0)$ 上曲率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的点的坐标是 _____.

P101, 20 题

(14) 设 A 为 3 阶矩阵, $|A| = 3$, A^* 为 A 的伴随矩阵, 若交换 A 的第 1 行与第 2 行得矩阵 B , 则 $|BA^*| =$ _____.

P129, 2 题

三、解答题(15 ~ 23 小题,共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15) (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = \frac{1+x}{\sin x} - \frac{1}{x}$, 记 $a = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

(I) 求 a 的值.

(II) 若当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) - a$ 与 x^k 是同阶无穷小, 求 k .

P36, 10 题

(16) (本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

P114, 19 题

(17) (本题满分 10 分)

过点 $(0, 1)$ 作曲线 $L: y = \ln x$ 的切线, 切点为 A , 又 L 与 x 轴交于 B 点, 区域 D 由 L 与直线 AB 围成, 求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

P84, 20 题

(18) (本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint_D xy d\sigma$, 其中区域 D 由曲线 $r = 1 + \cos\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ 与极轴围成.

P124, 37 题

(19) (本题满分 11 分)

已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 及 $f''(x) + f(x) = 2e^x$.

(I) 求 $f(x)$ 的表达式;

(II) 求曲线 $y = f(x^2) \int_0^x f(-t^2) dt$ 的拐点.

P95, 8 题

(20)(本题满分 10 分)

证明: $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2}, -1 < x < 1.$

P68,42 题

(21)(本题满分 11 分)

(I) 证明方程 $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1 (n > 1 \text{ 的整数})$ 在区间 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内有且仅有一个实根;(II) 记(1)中的实根为 x_n , 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求此极限.

P68,43 题

(22)(本题满分 11 分)

$$\text{设 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(I) 求 $|\mathbf{A}|$;(II) 当实数 a 为何值时, 方程组 $\mathbf{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解, 并求其通解.

P147,8 题

(23)(本题满分 11 分)

$$\text{已知 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}, \text{二次型 } f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \mathbf{x} \text{ 的秩为 } 2.$$

(I) 求 a ;(II) 求正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Qy}$ 将 f 化为标准形.

P159,3 题

2011 年考研数学二试题

一、选择题(1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.请将所选项前的字母填在题后括号内)

(1) 已知当 $x \rightarrow 0$ 时,函数 $f(x) = 3\sin x - \sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小,则 P35, 8 题

- (A) $k = 1, c = 4$. (B) $k = 1, c = -4$.
(C) $k = 3, c = 4$. (D) $k = 3, c = -4$. 【 】

(2) 已知 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导,且 $f(0) = 0$,则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} =$ P51, 3 题

- (A) $-2f'(0)$. (B) $-f'(0)$. (C) $f'(0)$. (D) 0. 【 】

(3) 函数 $f(x) = \ln |(x-1)(x-2)(x-3)|$ 的驻点个数为 P61, 28 题

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. 【 】

(4) 微分方程 $y'' - \lambda^2 y = e^{\lambda x} + e^{-\lambda x} (\lambda > 0)$ 的特解形式为 P99, 15 题

- (A) $a(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x})$. (B) $ax(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x})$.
(C) $x(ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x})$. (D) $x^2(ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x})$. 【 】

(5) 设函数 $f(x), g(x)$ 均有二阶连续导数,满足 $f(0) > 0, g(0) < 0$,且 $f'(0) = g'(0) = 0$,则函数 $z = f(x)g(y)$ 在点 $(0, 0)$ 处取得极小值的一个充分条件是 P59, 25 题

- (A) $f''(0) < 0, g''(0) > 0$. (B) $f''(0) < 0, g''(0) < 0$.
(C) $f''(0) > 0, g''(0) > 0$. (D) $f''(0) > 0, g''(0) < 0$. 【 】

(6) 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx, J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cot x dx, K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx$,则 I, J, K 的大小关系为

- (A) $I < J < K$. (B) $I < K < J$. (C) $J < I < K$. (D) $K < J < I$. 【 】

(7) 设 A 为三阶矩阵,将 A 的第二列加到第一列得矩阵 B ,再交换 B 的第二行与第三行得到

单位矩阵,记 $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,则 $A =$ P133, 9 题

- (A) $P_1 P_2$. (B) $P_1^{-1} P_2$. (C) $P_2 P_1$. (D) $P_2 P_1^{-1}$. 【 】

(8) 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 是四阶矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵,若 $(1, 0, 1, 0)^T$ 是方程 $Ax = 0$ 的一个基础解系,则 $A^* x = 0$ 的基础解系可为 P147, 7 题

- (A) α_1, α_3 . (B) α_1, α_2 . (C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. (D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. 【 】

二、填空题(9~14 小题,每小题 4 分,共 24 分,请将答案写在题中横线上)

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+2^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} =$ P34, 3 题

(10) 微分方程 $y' + y = e^{-x} \cos x$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的解为 $y =$ P95, 6 题

(11) 曲线 $y = \int_0^x \tan t dt \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \right)$ 的弧长 $s =$ P76, 4 题

(12) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, \lambda > 0$,则 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx =$ P84, 19 题

(13) 设平面区域 D 由直线 $y = x$, 圆 $x^2 + y^2 = 2y$ 及 y 轴所组成, 则二重积分 $\iint_D xy d\sigma =$

P118, 27 题

(14) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$, 则 f 的正惯性指数为

P158, 2 题

三、解答题(15 ~ 23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15) (本题满分 10 分)

已知函数 $F(x) = \frac{\int_0^x \ln(1+t^2) dt}{x^\alpha}$, 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0$, 试求 α 的取值范围.

P36, 9 题

(16) (本题满分 11 分)

设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 + t + \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t + \frac{1}{3} \end{cases}$ 确定, 求 $y = y(x)$ 的极值和曲线 $y = y(x)$

的凹凸区间及拐点.

P63, 34 题

(17) (本题满分 9 分)

设函数 $z = f(xy, yg(x))$, 其中函数 f 具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x)$ 可导且在 $x = 1$ 处取得极值 $g(1) = 1$, 求 $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{x=1 \\ y=1}}$.

P109, 10 题

(18) (本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 具有二阶导数, 且曲线 $l: y = y(x)$ 与直线 $y = x$ 相切于原点, 记 α 为曲线 l 在点 (x, y) 处切线的倾角, 若 $\frac{d\alpha}{dx} = \frac{dy}{dx}$, 求 $y(x)$ 的表达式.

P97, 10 题

(19) (本题满分 10 分)

(I) 证明: 对任意的正整数 n , 都有 $\frac{1}{n+1} < \ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$ 成立.

(II) 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n (n = 1, 2, \cdots)$, 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

P73, 51 题

(20) (本题满分 11 分)

一容器的内侧是由图中曲线绕 y 轴旋转一周而成的曲面, 该曲线由 $x^2 + y^2 = 2y (y \geq \frac{1}{2})$ 与 $x^2 + y^2 = 1 (y \leq \frac{1}{2})$ 连接而成的.

(I) 求容器的容积;

(II) 若将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出, 至少需要做多

