科技小博士书库

KEJI XIAOBOSHI SHUKU

数学博士

吴振奎◎编著

知识出版社

科技小博士书库

数学博士

吴振奎　编著

知 识 出 版 社

目　录

一、数学的童年　/1

1 数字的演化　/1

2 算筹与筹算　/4

3 埃及分数　/7

4 无理数的发现　/9

二、数的趣味　/11

1 由十个数码组成的算式　/11

2 由九个数码组成的趣式　/13

3 数字的“遗传”　/15

4 自我生成数　/19

5 积由同一数字组成　/20

6 数字金字塔　/22

7 $3^2+4^2=5^2$ 及其他　/25

8 神秘的“数字黑洞”　/27

9 洛书与幻方　/32

10 差、积、商幻方和积幻方、反幻方　/35

三、重要的常数 /39

1 π的故事 /39
2 0.618…鲜为人知的新发现 /45
3 兔子生殖引出的数列 /50

四、几何图形趣话 /56

1 无字的证明 /56
2 三角形与正方形的剖分 /59
3 完美的正方形 /63
4 近似完美的正三角形 /66
5 平面的铺设 /68
6 省刻度尺 /71
7 完美标号 /73

五、质数、合数、完全数、大数 /77

1 寻找质数的方法——筛法 /77
2 无意的发现 /79
3 无声的报告 /81
4 无花的果实 /82
5 人们所认识的最大质数 /83
6 完全数与麦森质数 /84
7 完全由数字1组成的质数 /86
8 到底有多大 /87
9 话说小道消息的传播 /88

六、数学昨日的故事 /90

1 寻找了13年的等式 /90
2 依据数据规律发现的行星 /92
3 欧拉公式 /93
4 大师们的失误 /95
5 费尔马数与正多边形作图 /96
6 笛卡儿坐标系及其变换 /98
7 奇妙的曲线 /101
8 一笔画和邮递线路 /102
9 不可能的连线 /104
10 莫比乌斯带和克莱因瓶 /106
11 解套和车胎翻转 /108

七、今日数学的花絮 /111

1 四色定理 /111
2 斯坦纳问题 /113
3 费尔马大定理 /117
4 正交拉丁方猜想 /120
5 哥德巴赫猜想 /123
6 模糊数学并不模糊 /124

一、数学的童年

数学同其他许多学科一样随着人类的出现便产生了。伴着人类文明的进步，数学本身也在不断发展。

我们先来看一看数学的童年，数概念和记数方法是如何产生的。

1. 数字的演化

早在文字发明以前，人类已开始计数。最初人们是用实物(石块、木棍、竹片等)记数，尔后，人们发明了“结绳”记数。

图 1 是现藏于美国自然史博物馆中的印加人结绳记数的实物。每根绳表示一个数，绳结的位置自上到下表示该数字从高到低位(它们自左到右分别表示 658、89、258、273 和 38，且 658 为其右边四个数之和)。

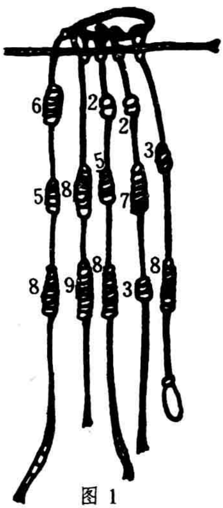

图 1

当时的计数进制多为十进制，即“逢十进一”的进制。这是由于人的一双手有十个指头，而人类又擅长于“屈指计算”的缘故。

人们学会了数数、计数，还要设法用文字(记号)把它们表示出来。在纸、笔未发明之前，人们常用木棍在泥板上刻画或用刀子在动物甲骨上刻画。

我国远在商代，象形文字——甲骨文已经相当成熟(这是因其刻在龟甲、兽骨上而得名的)。甲骨文关于数的记载表示如下(图 2)：

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 100 1000 10000

图 2

甲骨文的记数方法采用“合文”，即两个符号(字)合起来表示几十、几百、几千等(图 3)。这样不仅书写紧凑，阅读起来也十分方便，且不用再去创造新的记号，比如：

200 300 400 500 600 800 900 2000 3000 4000 5000 6000 30000

图 3

尔后，我国的记数符号又随着文字的演化几经变革，到了战国时代逐渐形成图 4 的记数文字。

它们演化到汉代，已同今天的文字基本相同了。

古代的巴比伦人是用楔形文字(用尖木棍刻写在泥版上)记数的，见图 5。

图 4

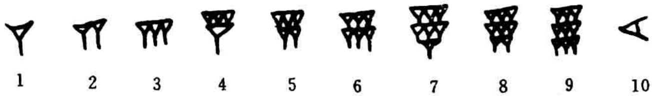

图 5

古代玛雅人起初用一些神的头像表示数(他们实行 20 进制)，后来改用点、横表示数(图 6)，且分为横式和竖式：

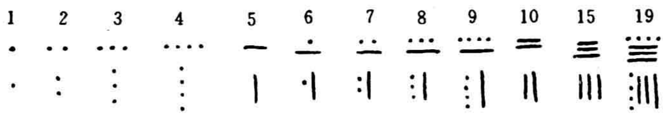

图 6

当今国际上流行的记数符号——阿拉伯数字最早是由印度人发明的，后来流传到阿拉伯国家，几经演化而成为今天

的模样(图 7)：

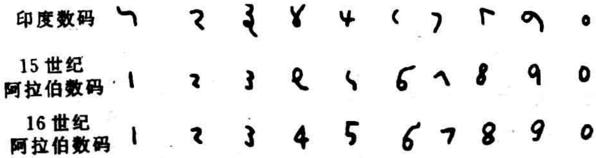

图 7

由于阿拉伯数码书记方便、快捷，因而得以在世界广泛流行、传播、使用。

顺便说一句，阿拉伯数码未流行之前，欧洲国家多采用罗马数字(图 8)：

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	L	C	D	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	50	100	500	1000

图 8

用这种数码记数显然既冗长又不方便。

“存优汰劣”，数字演化也是如此。这儿的优、劣是以书写、运算是否便捷为尺度(标准)的。

2. 算筹与筹算

随着科学技术的飞跃发展，20 世纪 40 年代出现的电子计算机如今已成为相当普及的计算(当然还有其他用途)工具了。然而计算工具的演化，同样经历了十分漫长的过程。

在纸、笔和数字、数学符号未出现之前，人们用手指或石子、树枝等进行数的运算。古希腊学者毕达哥拉斯发明的形数——即用石子摆成某些几何图形(如三角形、正方形、……)而构成的数(它们分别称为三角数、四角数、……)，可视为人们曾用石子计算的佐证(图 9)：

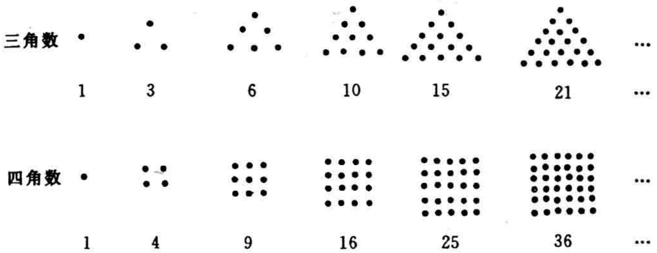

图 9

当然，毕达哥拉斯是出于其他目的研究形数的(主要考察这类数的生成规律、自身性质，以及彼此间的联系等)。

我国古代则是用“算筹”来进行计算的，这种计算工具在当时要比其他工具先进得多。所谓算筹是用木、竹或动物骨骼制成的用来计算的小细棍。其实“算”字的篆文筭正是用手摆弄竹棒的意思。

“算筹”摆数有纵、横两种方式，目的是为了分辨计算过程的数位(图 10)：

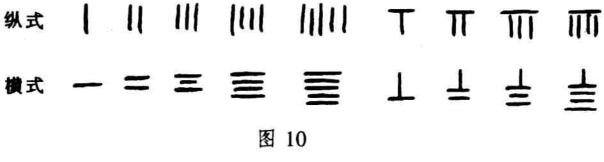

图 10

算筹计数格式有个规定，即个位一定摆成纵式，其余各位纵横式相间，即所谓“一纵十横、百立千僵”。如若遇到数字0则以空位表示。

比如325107这个数用算筹可摆成(图11)：

3　2　5　1　0　7

图11

这样一来，人们就可用算筹进行运算了。这种方法称为“筹算”。它的运算规则与如今的笔算差不多，只是摆弄起来稍稍困难(因为一个数码有时要用几根算筹去摆放)。

古代希腊人则是将细砂铺在木板上，然后用木棍在其上面划痕计算。

我国算盘的发明，堪称计算工具的一大飞跃：它制作简单、使用方便、易于携带，配上各种口诀，便能运算自如。即使在电子计算器普及的今天，算盘在计算工具中仍占有一席之地。

中国的算盘还曾流传到日本和俄罗斯等国。

此后，欧洲人还发明了另外一些计算工具如纳皮尔算筹(图12)和计算尺等，这些如今已被淘汰。

17世纪，德国人希卡德发明了手摇式计算机(它的实际制作出自帕斯卡之手)，利用它能进行加、减法运算。

1946年，世界上第一台电子计算机在美国诞生，它标志着人类的计算(不仅仅是计算)活动进入一个全新的革命时期。

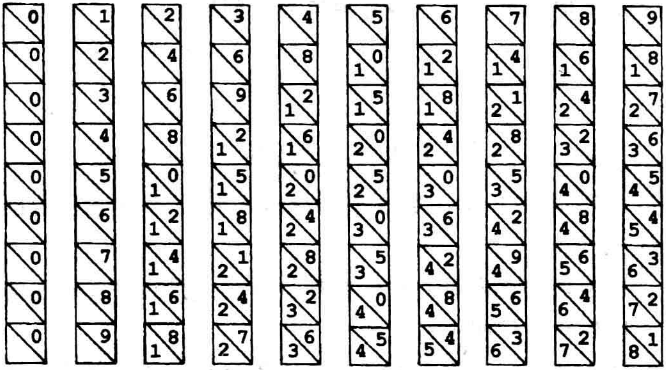

图 12　纳皮尔算筹

3. 埃及分数

分数的产生甚为久远。在我国使用算筹的年代已知道了分数概念。古代埃及的分数运算独具特色：当时埃及人是将分数先化为单位分数(即分子是 1 的分数)然后再去运算的，后人常称这种单位分数为埃及分数。比如$\frac{5}{13}$化成分母不同的埃及分数为：

$$\frac{5}{13}=\frac{1}{4}+\frac{1}{13}+\frac{1}{26}+\frac{1}{52}$$

古代埃及人还将$\frac{2}{n}$型分数化为埃及分数和的结论列成数表，以备计算时查阅。这样做显然使某些分数运算变得

复杂了，但这也引来许多有趣的数学问题：

1202 年，意大利人斐波那契在其名著《算盘书》中提出：

任何分数$\frac{a}{b}$皆可化为有限个埃及分数之和。

直到 1880 年英国数学家薛尔维斯特才给出上述结论的一种证明。

近年来又有人对此种分数进行研究，得到许多有趣的结果，比如有人证明了：

分母是奇数的分数皆可以表示为分母全部是相异奇数的埃及分数之和。

又如有人提出：如何将 1 用不同奇数作分母的埃及分数和表示?最少要用多少项?

1976 年有人给出了上面问题的答案：1 用分母为不同奇数的埃及分数和来表示时至少要九个，并且这种表示仅有五种形式，比如：

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{45}+\frac{1}{231}$$

其余四种形式的前六项与上式相同，后面三项的分母分别是：

21、135、10395	21、165、693
21、231、315	33、45、385

1969 年布累策在其所著《数学游览》中给出分数$\frac{5}{121}$表为埃及分数和问题：

$$\frac{5}{121}=\frac{1}{25}+\frac{1}{759}+\frac{1}{208725}$$

他在书中写道：①上述表示的项数不能再少；②最大分母208725可否再小？

1983年我国华东交大学生刘润根给出表达式：

$$\frac{5}{121}=\frac{1}{33}+\frac{1}{99}+\frac{1}{1089}$$

尔后，江西钢厂的王晓明又发现了下面两个等式：

$$\frac{5}{121}=\frac{1}{27}+\frac{1}{297}+\frac{1}{1089}$$

$$\frac{5}{121}=\frac{1}{33}+\frac{1}{91}+\frac{1}{33033}$$

显然他们均给出了上述问题的正面回答，但最大分母1089可否再小？目前尚不得知。

埃及分数还有一些其他问题等待人们去研究。

4. 无理数的发现

毕达哥拉斯发明了在我国被称为“勾股定理”的直角三角形三边间平方和关系(见后文)。除此之外，他所创建的学派还有大量的数学发现：他们研究了“形数”，发现了“完全数”(见后文)等等。然而学派的封闭与保守(他们的研究秘而不宣)，也曾束缚了他们事业的发展。

比如，他们认为：世上的一切数皆可用两个整数之比来表示。然而毕氏死后他的学派成员希伯斯却发现正方形对角

线与其边长是不可比的(不可通约)。换言之，正方形对角线长无法用两个整数之比来表示(图 13)。

这一发现显然是对学派笃守信条的致命打击，它也使学派的成员们惶恐不安，他们妄图用严守秘密的办法掩盖这个"可怕"的事实，甚至不惜将发现者希伯斯推入大海。

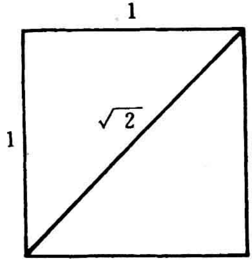

图 13

然而，希伯斯的发现却使人们对数的认识又大大前进一步：存在不可用两个整数比来表示的数——无理数。

无理数的名称系公元 6 世纪罗马人卡西奥多拉斯首先使用的，其实"无理"两字系希腊文字"不可比"的转译失误所致。

希伯斯虽为真理而献身，他的发现却永存史册，无理数的诞生为数学的发展起到划时代的作用。

二、数的趣味

数的四则运算可产生许多有趣的现象，尽管看上去有的结果很简单，然而要彻底揭开它们的面纱，有时又十分艰难。

1. 由十个数码组成的算式

数 13717421 看上去没有什么特别，但是只要它和 9 一做乘法，奇妙便出现了：

$$13717421 \times 9 = 123456789$$

积恰好是由 1~9 这九个数码按顺序依次出现而成的一个九位数。

1~9 这九个数码全部出现，且每个数码仅出现一次的算式，无疑会令大家感兴趣。这方面的趣题不少，我们再来看一个由十个数码组成的数的有趣性质。

由 0、1、2、……、8、9 这十个数码组成的十位数 1037246958 是一个有特性的数，比如，当它除以 2 时：

$$1037246958 \div 2 = 518623479$$

这是一个由数码 1～9 组成的一个九位数(每个数码均出现，且仅出现一次)。

当这个九位数再除以 9 时：

$$518623479 \div 9 = 57624831$$

仔细观察你同样会发现：它是一个由数码 1～8 组成的八位数。

有上述性质的十位数(由数码 0、1、2、……、8、9 组成)还有：

1046389752　　1286375904　　1307624958

1370258694　　1462938570

验算工作当然希望由你去完成。

如果你熟知(这一点在珠算课练习加法时你不会陌生)：

$$987654312 \div 123456789 = 8$$

$$(\text{或 } 123456789 \times 8 = 987654312)$$

请注意被除数(或积)是 1～9 这九个数码的倒序，仅仅在末两位上数字交换了一下，而除数恰好是 1～9 数码的正序。

再请看算式(请与上面算式比较)：

$$987654321 \div 123456789 = 8\ .\overbrace{0000000}^{7\text{个}}\ 729\ \overbrace{00000}^{5\text{个}}\ 66339\ \overbrace{000}^{3\text{个}}$$

$$6036849\ \overbrace{0}^{1\text{个}}\ 549353269911470239\cdots\cdots$$

你仔细观察一下便不难发现：右边的商中小数点后“0”的连续个数分别是 7、5、3、1 个，而连续非 0 数字的个数(从商的个位数起)恰好分别是 1、3、5、7(画波浪线的数字)个。这个现象的产生，人们已找到了原因，这要用到稍多的数学知识，也许你在以后的学习中会遇到。