〔日〕矢野健太郎 著

TO MASTER TECHNIQUES

数学解题技巧

2 下

解法のテクニック

数 学 解 题 技 巧

（第二卷下册）

〔日〕矢野健太郎 著
李 开 成 译

黑 龙 江 人 民 出 版 社
1983年·哈尔滨

译 者 的 话

本书译自日本东京工业大学名誉教授、理学博士矢野健太郎著《解法のテクニツク》一书1979年三订版。

原书是根据日本现行高中数学的全部内容，按解题技巧加以分类、整理而编成的一部供高中学生系统复习和准备高考用的完备的参考指南。全书分3卷（数学Ⅰ、数学ⅡB、数学Ⅲ）28章127节，共精选出782个典型问题及约2000道习题，并给出了详细解答。这些问题及习题包括了所能想到的各种数学问题及其解题技巧。它对学生熟练地运用数学基础知识，提高数学解题能力十分有益，确实是广大高中学生、中学数学教师以及数学爱好者不可多得的一部内容丰富的好参考书。

为了使读者能够有效而全面地掌握数学解题技巧，作者通过精心的协调和安排，以条理清晰的形式，将有关的基础知识及其应用方法展示给读者，为此在各章的每一节中都安排了如下内容：

首先介绍基础知识(*Fundamentals*)，简明扼要地分条列出该节有关的基本定义、公式、定理等，并指出了注意事项。

其次将该节的具体内容编排成一个一个的典型问题，并详细阐述解答问题的思路和方法。对于解题中出现的，对其它

问题也有普遍应用价值的常用技巧，冠以“关键”(*Technique*)字样；对于解题时要用到的，有普遍意义的公式、定理等，冠以“理论”(*Theory*)字样。凡“关键”和“理论”部分，一律用简洁的语言或公式表示出来，以便于读者复习和记忆。

在阐明解题的思路和方法的基础上，给出了问题的完整的解答。其中对于容易出错的地方，冠以“当心”(*Remark*)字样，以提醒读者注意。对于解题过程中所依据的公式、计算方法和论证等，通过反向箭头“←”列在相应步骤的右边。

在每一问题的后面配备了若干同类型的习题，以供练习之用。对于个别较难的习题，标上“*”号，以示区别，初读时可以略过。这些习题的解题技巧与解答附于书末。

由于原书是按照日本高中数学大纲编写的，所以有个别章节（如空间坐标和向量、矩阵、概率分布、统计推断、微分方程、平面几何公理的构成、映射等）超过了我国现行中学数学教学大纲范围。但是，考虑到这些内容有的将陆续纳入我国三年制高中数学教学大纲，有的对中学教师和广大数学爱好者有一定的参考价值，因此，中译本将原书全部内容译出，以保持其完整性和系统性。

原书中，冠以“理论”、“关键”、“当心”字样的部分，都是以醒目的红蓝套色印刷的，中译本则一律用黑体字排出。对于原书中数字和符号上的个别印刷错误，我们已作纠正，不再一一注出。

本书中译本改为三卷六分册（每卷分上、下两册）出版。译者分工如下：第一卷上册由马宝珊、李俊杓、安永德译，下册由李俊杓、安永德译；第二卷上册由颜秉海、颜建设译，

下册由李开成译；第三卷上册由张卓澄、马宝珊、李俊杓译，下册由安永德、马宝珊译。李诵权、周师颖承担了第一、三卷各册的部分校对工作，林龙威承担了第二卷下册的校对工作。全书由颜秉海、李开成担任总审校。

在此谨向原著者、东京工业大学名誉教授矢野健太郎先生及黑龙江人民出版社致谢。

由于译者水平所限，难免出现缺点和错误，欢迎各位读者批评指正。

黑龙江大学数学系　颜秉海

1981年11月于哈尔滨

目　　录

第四章　积　　分

第五章 矩 阵

第六章　平面几何的公理体系

第四章　积　　分

§ 23　不 定 积 分

基 础 知 识

1. 不定积分的概念

微分后得 $f(x)$ 的函数，用 $\int f(x)dx$ 表示，称此为 $f(x)$ 的不定积分或原函数。

$$\frac{dF(x)}{dx}=f(x) \Longleftrightarrow \int f(x)dx=F(x)+c$$ （c 为积分常数）

2. 不定积分公式

（1）$\int kdx=kx+c$

（2）$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$

（3）$\int (ax+b)^n dx=\frac{1}{a}\cdot\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}+c \quad (a\neq 0)$

（4）$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$

（5）$\int \{f(x)\pm g(x)\}dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$（符号同序）

这里，c 是积分常数（任意常数），n 是正整数，k 是常数。

设微分后得 $f(x)$ 的函数为 $F(x)$，则 $F(x)'=f(x)$。由此若 $F(x)=x^2$，则 $\frac{dF}{dx}=2x$，所以 $\int 2xdx=x^2+c$。若 $F(x)=x^3$，则 $\frac{dF}{dx}=3x$，所以 $\int 3xdx=x^3+c$。最重要的是要牢固地掌握微分与积分的互逆关系。

注意：微分和积分互为逆运算。

$$\left\{\frac{1}{a}\cdot\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}\right\}'=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{n+1}\{(ax+b)^{n+1}\}' \quad (a\neq0)$$

$$=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot(n+1)(ax+b)^n\cdot a$$

$$=(ax+b)^n$$

由上式得

$$\textbf{理论：} \int(\boldsymbol{ax}+\boldsymbol{b})^n\boldsymbol{dx}=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}}\cdot\frac{(\boldsymbol{ax}+\boldsymbol{b})^{n+1}}{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}}+\boldsymbol{c}\ (\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}).$$

此外，若设 $F(x)$ 是微分后得 $f(x)$ 的函数之一，那么这种函数的全体可用 $F(x)+c$ 表示，即

$$\int f(x)dx=F(x)+c$$

【注意】 求函数之积的不定积分时，要在展开后再积分。下记的运算是完全错误的

$$\int x^2(x+1)dx=\int x^2dx\cdot\int(x+1)dx$$

130. 不定积分

问　题　求不定积分

(1) $\int(4x^3-6x^2+x-3)dx$　　　(2) $\int(2t-1)^3dt$

【技巧】 因为不定积分是微分的逆运算，因此可以逆用微分

公式.

$$\textbf{理论：}\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c\ (n\ \textbf{为正整数}).$$

求 (2) 这种乘方形式的积分，应先展开化为和的形式后再求积分.

【解答】 (1) $(\text{原式})=4\int x^3dx-6\int x^2dx+\int xdx-3\int dx$

$$=4\cdot\frac{x^4}{4}-6\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-3x+c \quad \leftarrow \int dx=\int 1dx=x.$$

$$=x^4-2x^3+\frac{x^2}{2}-3x+c \leftarrow \text{熟练后可直接写答.}$$

(2) $(\text{原式})=\int(8t^3-12t^2+6t-1)dt \quad \leftarrow (2t-1)^3\text{展开.}$

$$=8\cdot\frac{t^4}{4}-12\cdot\frac{t^3}{3}+6\cdot\frac{t^2}{2}-t+c$$

$$=2t^4-4t^3+3t^2-t+c$$

【研究】 $\textbf{理论：}\int(ax+b)^n dx=\frac{1}{a}\cdot\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}+c(a\neq 0).$

(2)亦可使用上记公式来解.

$$(\text{原式})=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2t-1)^4}{4}+c=\frac{(2t-1)^4}{8}+c$$

如果将 x^n 的积分公式推广为

$$\int(2t-1)^3dt=\frac{(2t-1)^{3+1}}{3+1}+c$$

则是错误的.

【注意】 因为积分是微分的逆运算，因此要想检查积分结果是否正确，可将积分结果进行微分，然后检验一下微分的结果是否等于被积函数就行了. 例如，对于问题中的(1)

$$\left(x^4-2x^3+\frac{x^2}{2}-3x+c\right)'=4x^3-6x^2+x-3$$

这表明积分的结果是完全正确的。

习　题　130

1. 计算以下的不定积分：

(1) $\int(3x^2-2x+1)dx$　　(2) $\int(4t^3-3t^2+2)dt$

(3) $\int(t+a)^3dt$　　(4) $\int(y+1)(y^2-y+2)dy$

(5) $\int(2x+1)^2dx-\int(2x-1)^2dx$

(6) $\int(x-y)^2dy$

131. 积分常数与函数的确定(1)

问　题　试求满足下述各条件的函数：

(1) $f'(x)=x^2-x$ 且 $f(1)=1$

(2) $\dfrac{d\{f(x)+g(x)\}}{dx}=3$，$\dfrac{d\{f(x)g(x)\}}{dx}=4x+1$

$f(0)=-3$，$g(0)=2$

【技巧】　(1) 已知导函数而求原函数为不定积分。

关键：$f(x)$ 的导数 $f'(x)\to f'(x)=\int f'(x)dx$。

即　$\dfrac{dF(x)}{dx}=f(x)\longrightarrow F(x)=\int f(x)dx$

由 $f(1)=1$ 确定积分常数。

(2)注意积分后得到 $f(x)$,$g(x)$ 的方程组。

【解答】 (1) $f(x)=\int(x^2-x)dx$

$$=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+c$$ ←$f(x)=\int f'(x)dx$.

由 $f(1)=1$ 得 $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+c=1$ $\quad\therefore\quad c=\frac{7}{6}$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{7}{6}$$

(2) $f(x)+g(x)=\int 3dx=3x+c_1$ ① ←$\{f(x)+g(x)\}'=3$.

$$f(x)g(x)=\int(4x+1)dx$$

$$=2x^2+x+c_2$$ ②←$\{f(x)g(x)\}'=4x+1$.

$x=0$ 时，$f(0)-3$，$g(0)=2$ ③

由①，$c_1=-3+2=-1$，由②，$c_2=-6$

因此 $f(x)+g(x)=3x-1$

$$f(x)\cdot g(x)=2x^2+x-6=(2x-3)(x+2)$$

$$\therefore\quad \begin{cases}f(x)=2x-3\\ g(x)=x+2\end{cases} \text{或} \begin{cases}f(x)=x+2\\ g(x)=2x-3\end{cases}$$

其中满足③的为$\begin{cases}f(x)=2x-3\\ g(x)=x+2\end{cases}$ ←千万不可忘记最后一步的检查。

习 题 131

1. 将"$f(x)$积分"误为将 $f(x)$微分，其结果得 $3x^2+6x-2$。试求正确的答案。已知 $f(0)=1$。

2. u, v 是关于 x 的函数，当 $x=2$ 时 $u=2$，$v=-1$，并且

$$\frac{d}{dx}\{u+v\}=2x+1,\ \frac{d}{dx}\{uv\}=3x^2-2x+2,$$

求 u, v。

3. 已知 $f(x)$ 是关于 x 的 5 次多项式，以 $(x-1)^3$ 除之余 3，以 $(x+1)^3$ 除之余 -1。

(1) 试证 $f'(x)$ 能被 $(x-1)^2(x+1)^2$ 所整除；

(2) 求 $f(x)$。

132. 积分常数与函数的确定(2)

问　题　对于一切 x 值函数 $f(x)$ 均可微

(1) $x \leqslant 1$ 时 $f'(x)=a^2x$，$x \geqslant 1$ 时 $f'(x)=-2ax+8$

(2) $f(0)=0$

试求满足上记条件的正常数 a，并绘 $y=f(x)$ 的图象。

【技巧】　导数⟶积分⟶原函数。

理论：$f(x)$ 在某区间可微⟶$f(x)$ 在该区间光滑且连续.

因此，由于光滑可知，在 $x=1$ 处的 $f'(x)$ 的值相等. 由于连续，在 $x=1$ 处的 $f(x)$ 的值相等。

【解答】　$[a^2x]_{x=1}=[-2ax+8]_{x=1}$　　←因为对 x 的一切值可微。

$\therefore\ a^2=-2a+8$。另外 $a>0$，$\therefore\ a=2$

对于 $x \leqslant 1$，$f(x)=\int 4x\,dx=2x^2+c$　　←将 $a=2$ 代入。

$\because\ f(0)=0$，$\therefore\ c=0$

$\therefore\ f(x)=2x^2\ (x \leqslant 1)$　　①

对于 $x \geqslant 1$，$f(x)=\int(-4x+8)dx$

$=-2x^2+8x+c'$　　②

因为对于 x 的一切值 $f(x)$ 连续，所以 $x=1$ 时，① 和 ② 的 $f(x)$的值相等．由①，②可知

$$[2x^2]_{x=1}$$
$$=[-2x^2+8x+c]_{x=1}$$
$$\therefore \quad c'=-4$$

由此可知 $f(x)=-2x^2+8x-4$ $(x\geqslant 1)$

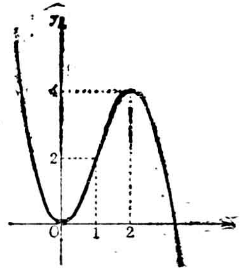

图 4·1

习 题 132

1. 函数 $f(x)$的导数如下：

$x\leqslant -3$ 时，$f'(x)=-1$

$-3<x\leqslant 3$ 时，$f'(x)=3x^2$

$3<x$ 时，$f'(x)=0$

设 $f(x)$的图象是过原点的连续曲线，试绘 $f(x)$的图象．

2. 函数 $f(x)$的导函数 $f'(x)$ 的图象如图 4·2 所示的抛物线，设 $f(x)$的极大值是 4，极小值是 0，求 $f(x)$．

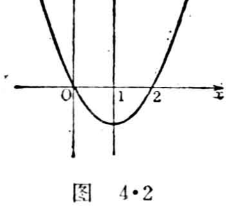

图 4·2

§ 24 定　积　分

基础知识

1. 定积分的计算

$$\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b$$
$$=F(b)-F(a)\text{（这里}F(x)=\int f(x)dx\text{）}$$

2. 微分与积分的互逆关系

设 x 为变数，则 $\int_a^x f(t)dt$ 是积分上限 x 的函数，令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$（a 为常数）。则 $F'(x)=f(x)$。

若 a, b 为常数，定积分 $\int_a^b f(t)dt$ 表示一个常数。

3. 定积分的性质

（1）$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$（$k$ 为常数）

（2）$$\int_a^b\{f(x)+g(x)\}dx$$
$$=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

（3）$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

（4）$$\int_a^b f(x)dx$$
$$=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

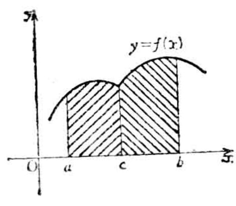

图　4·3

4. 偶函数与奇函数

（1）若 $f(x)$ 为偶函数，$f(-x)=f(x)$，其图象对称于 y 轴），则