



普通高等教育“十二五”规划教材

杨慧春 张 茹 编著

# 电磁场理论与 天线技术

DIANCICHANG LILUN YU  
TIANXIAN JISHU

0441.4-43  
64



北京邮电大学出版社  
[www.buptpress.com](http://www.buptpress.com)

013061922

0441. 4-43

64

普通高等教育“十二五”规划教材

# 电磁场理论与天线技术

杨慧春 张 茹 编著



北京邮电大学出版社

· 北京 ·



北航

C1669840

0441.4-43

64

013061855

杨慧春、张茹编著“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

## 内 容 简 介

本书包含电磁场理论与天线技术两部分内容。电磁场理论部分介绍了矢量分析、静电场、恒定磁场、恒定电场、时变电磁场、平面电磁波等内容,全面阐述麦克斯韦方程及电磁问题的边界条件,并阐述了均匀平面波的传播、反射、折射等特性;天线技术部分介绍了电磁辐射及天线基础知识,包括单极天线、阵列天线、引向天线、微带天线、抛物面天线等内容。每章末均附有习题,同时附录给出了一些常用的矢量恒等式以便读者查阅。

本书内容精练,注重实践性和新颖性;物理概念清晰、文字易懂、图文并茂。本书可供高等院校电子信息、通信工程、微波工程及相近专业本科生作为教材或教学参考书,亦可作为有关科技人员的参考书。

本书配有电子教案,需要的老师可与出版社联系,免费提供。

杨慧春 张茹 编著

### 图书在版编目(CIP)数据

电磁场理论与天线技术/杨慧春,张茹编著.--北京:北京邮电大学出版社,2013.8  
ISBN 978-7-5635-3628-3

I. ①电… II. ①杨… ②张… III. ①电磁场—高等学校—教材②天线—高等学校—教材  
IV. ①O441.4②TN82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 184443 号



书 名: 电磁场理论与天线技术

责任著作者: 杨慧春 张茹 编著

责任编辑: 张珊珊

出版发行: 北京邮电大学出版社

社 址: 北京市海淀区西土城路 10 号(100876)

发行部: 电话:010-62282185 传真:010-62283578

E-mail: publish@bupt.edu.cn

经 销: 各地新华书店

印 刷: 北京源海印刷有限责任公司

开 本: 787 mm×1092 mm 1/16

印 张: 9.25

字 数: 221 千字

版 次: 2013 年 8 月第 1 版 2013 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-3628-3

定价: 19.00 元

· 如有印装质量问题,请与北京邮电大学出版社发行部联系 ·

# 前 言

现代电子技术和通信技术发展迅速,门类众多,但都离不开电磁波的发射、传播、接收和控制。因此,电磁场理论和天线技术是电类各专业技术人员必须掌握的基础理论之一。本教材编写的目的就是使读者获得足够的电磁场基础理论和天线技术的相关知识,保证系统的理论性及简洁的推导,重视基本概念的阐述,注重理论联系实际,关注新技术的发展。

本书注重基本理论、数学方法和实际应用;在思路和方法上力求简洁高效,在逻辑推理上则保持严谨;物理概念清晰,文字易懂;内容紧扣大纲,重点突出。在内容的安排上,注重电磁场的基本概念、基本规律和基本分析方法,重视电磁场理论与天线技术中重点和难点问题或一般教材中讲述较少的内容的介绍以及富有启发性的内容编排,用以扩大知识面和建立浓厚兴趣,激发学生运用电磁理论与天线技术解决综合性问题的能力和创新思维。

同时,本书注重电磁场理论与天线技术发展的新进展,将国外先进的教学理念引入教材,适时地加强电磁场与天线技术同工程实际的有机结合,激发学生运用电磁场与天线技术解决工程实际问题的兴趣,培养学生的工程意识。

本书的内容是作者结合多年教学经验并参考国内外优秀教材编写的,书中配有大量例题,以期帮助读者提高分析问题的能力。本书共8章。第1章由张茹教授编写;第2~8章由杨慧春博士编写。感谢平子良教授对本书的框架和内容提出的宝贵意见;感谢北京高等学校“青年英才计划”的资助。

编 者

# 目 录

第 1 章 矢量分析 .....	(1)
1.1 矢量代数 .....	(1)
1.1.1 标量和矢量 .....	(1)
1.1.2 矢量的乘积 .....	(1)
1.2 正交坐标系 .....	(3)
1.2.1 直角坐标系 .....	(4)
1.2.2 圆柱坐标系 .....	(4)
1.2.3 球坐标系 .....	(5)
1.3 矢量场 .....	(6)
1.3.1 矢量的通量及散度 .....	(7)
1.3.2 矢量的环量及旋度 .....	(10)
1.4 标量场 .....	(13)
1.4.1 标量场的等值面 .....	(13)
1.4.2 标量场的方向导数 .....	(13)
1.4.3 标量场的梯度 .....	(14)
1.5 亥姆霍兹定理 .....	(15)
习题 .....	(16)
本章附录 1 不同坐标系中的微分表达式 .....	(17)
本章附录 2 二阶微分运算 .....	(19)
本章附录 3 $\nabla$ 运算于乘积及其证明 .....	(19)
第 2 章 静电场 .....	(21)
2.1 静电场的基本方程 .....	(21)
2.1.1 电场强度及电位移矢量 .....	(21)
2.1.2 静电场的散度方程 .....	(22)
2.1.3 静电场的旋度方程 .....	(25)
2.2 电位及其方程 .....	(26)
2.2.1 电位函数 .....	(26)
2.2.2 电位方程 .....	(29)
2.3 静电场中的导体 .....	(30)

2.4	静电场中的介质	(31)
2.4.1	介质的极化	(31)
2.4.2	介质中的高斯定理	(31)
2.5	静电场的边界条件	(34)
2.5.1	电位移矢量的边界条件	(34)
2.5.2	电场强度的边界条件	(36)
2.6	导体的电容	(37)
2.6.1	双导体的电容	(37)
2.6.2	导体系的部分电容	(39)
2.7	静电场能量	(40)
2.7.1	静电场能量	(40)
2.7.2	电场能量体密度	(41)
2.8	静电场边值问题的解法	(42)
2.8.1	静电场的边值问题	(42)
2.8.2	直角坐标系中的分离变量法	(42)
2.8.3	镜像法	(46)
	习题	(48)
<b>第3章</b>	<b>恒定磁场</b>	(51)
3.1	恒定磁场的基本方程	(51)
3.1.1	磁感应强度	(51)
3.1.2	电流密度	(52)
3.1.3	磁场的基本方程	(53)
3.2	恒定磁场中的介质	(57)
3.3	恒定磁场的边界条件	(58)
3.4	电感	(60)
3.5	磁场能量	(61)
	习题	(63)
<b>第4章</b>	<b>恒定电场</b>	(65)
4.1	恒定电场基本方程	(65)
4.2	欧姆定律的微分形式	(66)
4.3	恒定电场的边界条件	(67)
4.4	恒定电场与静电场的比拟	(69)
	习题	(69)
<b>第5章</b>	<b>时变电磁场</b>	(71)
5.1	法拉第电磁感应定律	(71)

5.2	位移电流	(72)
5.3	麦克斯韦第三方程	(74)
5.4	麦克斯韦第四方程	(75)
5.5	麦克斯韦方程组	(75)
5.6	复数形式的麦克斯韦方程	(76)
5.6.1	时谐电磁场的复数表示	(76)
5.6.2	麦克斯韦方程组的复数表示	(77)
5.7	时变场的边界条件	(79)
5.7.1	法向场的边界条件	(79)
5.7.2	切向场的边界条件	(80)
5.8	坡印廷定理和坡印廷矢量	(82)
5.8.1	坡印廷定理	(82)
5.8.2	坡印廷矢量及其平均值	(82)
	习题	(86)
<b>第 6 章</b>	<b>平面电磁波</b>	<b>(87)</b>
6.1	波动方程	(87)
6.2	理想介质中的均匀平面波	(88)
6.2.1	均匀平面波	(88)
6.2.2	均匀平面波的传播参数	(89)
6.2.3	均匀平面波的场量关系	(90)
6.3	导电媒质中的平面波	(93)
6.3.1	导电媒质的分类	(93)
6.3.2	导电媒质中的波动方程	(93)
6.4	平面波的极化	(96)
6.4.1	线极化波	(96)
6.4.2	圆极化波	(97)
6.4.3	椭圆极化波	(98)
6.5	平面边界上的正投射	(98)
6.5.1	对理想导体的正投射	(99)
6.5.2	对理想介质的正投射	(101)
	习题	(103)
<b>第 7 章</b>	<b>电磁辐射</b>	<b>(105)</b>
7.1	时变场的位函数	(105)
7.1.1	时变场位与场的关系	(105)
7.1.2	位函数的波动方程	(106)

7.1.3 时变场的滞后位 .....	(106)
7.2 电基本振子的辐射 .....	(107)
7.2.1 近场区 .....	(108)
7.2.2 远场区 .....	(109)
7.3 磁基本振子的辐射 .....	(110)
习题 .....	(112)
<b>第 8 章 天线基础</b> .....	<b>(113)</b>
8.1 天线的电参数 .....	(113)
8.1.1 发射天线 .....	(113)
8.1.2 接收天线 .....	(118)
8.2 对称振子 .....	(120)
8.3 单极天线 .....	(122)
8.4 阵列天线 .....	(127)
8.5 引向天线 .....	(130)
8.6 微带天线 .....	(133)
8.7 抛物面天线 .....	(135)
习题 .....	(137)
<b>参考文献</b> .....	<b>(138)</b>



# 第 1 章 矢量分析

本章首先从定义标量和矢量出发,复习矢量及其运算;接着,建立球坐标、柱坐标与直角坐标的关系,讨论矢量在直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系中的表示法;然后介绍了矢量场的散度和旋度、标量场的梯度;最后,引入总结矢量场性质的亥姆霍兹定理。

## 1.1 矢量代数

### 1.1.1 标量和矢量

一个只有大小的量称为标量(scalar)。赋予物理单位便成为具有物理含义的标量,如温度、时间、面积、能量等。而一个既有大小又有方向特性的量称为矢量(vector)。赋予物理单位便成为具有物理含义的矢量,如电场强度矢量、作用力矢量、速度矢量、力矩加速度等。矢量的表达式

$$\mathbf{A} = |\mathbf{A}| \mathbf{e}_A = A \mathbf{e}_A \quad (1-1-1)$$

$|\mathbf{A}|$  称为矢量  $\mathbf{A}$  的模,即矢量的长度; $\mathbf{e}_A$  为矢量方向的单位矢量。

两个矢量相等不仅是其大小相等,其方向也必须一致,即

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \Rightarrow A = B, \mathbf{e}_A = \mathbf{e}_B \quad (1-1-2)$$

任一矢量  $\mathbf{A}$  在三维正交坐标系中都可以给出其三个分量。例如,在直角坐标系中,矢量  $\mathbf{A}$  的三个分量分别是  $A_x$ 、 $A_y$ 、 $A_z$ ,利用三个单位矢量  $\mathbf{e}_x$ 、 $\mathbf{e}_y$  和  $\mathbf{e}_z$  可以将矢量  $\mathbf{A}$  表示成:

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z \quad (1-1-3)$$

矢量  $\mathbf{A}$  的大小  $A$  为

$$|\mathbf{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (1-1-4)$$

矢量  $\mathbf{A}$  的单位矢量为

$$\mathbf{e}_A = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{1}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}} (\mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z)$$

### 1.1.2 矢量的乘积

矢量的乘积包括点积和叉积。

#### 1. 点积 (标量积)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta \quad (1-1-5)$$

式中  $\theta$  为矢量  $\mathbf{A}$  和矢量  $\mathbf{B}$  的夹角。两矢量的点积如图 1-1 所示。由式(1-1-5)可得如下性质:

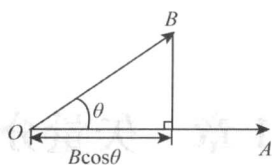


图 1-1 矢量点积

①两矢量同向,如  $A$  与  $B$  同向,其点积为最大  $A \cdot B = |A| \times |B|$ ,等于两矢量的模相乘。

②两矢量反向,其点积为负最大  $A \cdot B = -|A| \times |B|$ ,等于两矢量的模相乘的负数。

③两矢量垂直  $A \perp B$ ,则两矢量的点积等于零  $A \cdot B = 0$ ;反之,如果两矢量的点积等于零,即  $A \cdot B = 0$ ,则这两个矢量必垂直,即  $A \perp B$ 。

对于坐标单位矢量

$$e_i \cdot e_j = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

则在直角坐标系中

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z) \cdot (e_x B_x + e_y B_y + e_z B_z) \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \end{aligned} \quad (1-1-6)$$

点积满足交换律分配率

$$\begin{aligned} A \cdot B &= B \cdot A \\ A \cdot (B+C) &= A \cdot B + A \cdot C \end{aligned} \quad (1-1-7)$$

$$A \cdot A = A^2$$

## 2. 叉积(矢量积)

叉积用  $A \times B$  来表示,其模为

$$|A \times B| = |A| |B| \sin \theta \quad (1-1-8)$$

方向符合右手螺旋法则,如图 1-2 所示。

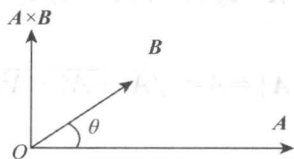


图 1-2 矢量叉积

则由式(1-1-8)可得如下性质:

①如果两矢量垂直  $A \perp B$ ,则叉积可得最大值;反之,如果  $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ ,则  $A \perp B$ 。

②如果两矢量平行,则  $A \times B = 0$ ;反之,如果  $A \times B = 0$ ,则两矢量平行。

直角坐标系中坐标单位矢量的叉积

$$\begin{aligned} e_i \times e_i &= 0, \quad i = x, y, z \\ e_x \times e_y &= e_z, \quad e_y \times e_z = e_x, \quad e_z \times e_x = e_y \end{aligned} \quad (1-1-9)$$

对于一般的矢量在直角坐标中的矢量积的表达式

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (\mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z) \times (\mathbf{e}_x B_x + \mathbf{e}_y B_y + \mathbf{e}_z B_z) \\ &= \mathbf{e}_x (A_y B_z - A_z B_y) + \mathbf{e}_y (A_z B_x - A_x B_z) + \mathbf{e}_z (A_x B_y - A_y B_x) \end{aligned}$$

行列式表示

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1-1-10)$$

叉积满足反交换律

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

**例 1-1** 已知空间中三点  $P_1(1, 2, -1)$ ,  $P_2(5, 2, -2)$ ,  $P_3(7, 3, 6)$ , 求证:  $P_1 P_2 \perp P_2 P_3$ 。

**证明**  $\overline{P_1 P_2} = \mathbf{e}_x(x_2 - x_1) + \mathbf{e}_y(y_2 - y_1) + \mathbf{e}_z(z_2 - z_1) = 4\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_z = 4.123\mathbf{e}_1$

$\overline{P_2 P_3} = \mathbf{e}_x(x_3 - x_2) + \mathbf{e}_y(y_3 - y_2) + \mathbf{e}_z(z_3 - z_2) = 2\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + 8\mathbf{e}_z = 8.31\mathbf{e}_2$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \overline{P_1 P_2} \cdot \overline{P_2 P_3} &= (4\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_z) \cdot (2\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + 8\mathbf{e}_z) = 8 - 8 = 0 = \cos\theta \\ \theta &= 90^\circ; P_1 P_2 \perp P_2 P_3 \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \overline{P_1 P_2} \times \overline{P_2 P_3} = (4\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_z) \times (2\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + 8\mathbf{e}_z)$$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} \\ &= [0 \times 8 - (-1) \times 1]\mathbf{e}_x + [(-1) \times 2 - 4 \times 8]\mathbf{e}_y + [4 \times 1 - 0 \times 2]\mathbf{e}_z \\ &= \mathbf{e}_x - 34\mathbf{e}_y + 4\mathbf{e}_z = 35.25\mathbf{e}_R \end{aligned}$$

$$|\overline{P_1 P_2} \times \overline{P_2 P_3}| = 34.25 = |\overline{P_1 P_2}| \cdot |\overline{P_2 P_3}| \sin\theta = 4.123 \times 8.31 \sin\theta = 34.25 \sin\theta$$

$$\sin\theta = 1, \quad \theta = 90^\circ; \quad P_1 P_2 \perp P_2 P_3$$

## 1.2 正交坐标系

说到场,除了矢量以外,还有一个问题不得不提,那就是“坐标系”。因为场函数的自变量除了时间以外就是位置。确定一点的位置就需要用到坐标系和点的坐标,那什么是坐标系呢?

在参照系中,为确定空间一点的位置,按规定方法选取的有次序的一组数,叫做“坐标”。在某一问题中规定坐标的方法,就是该问题所用的坐标系。

在通常的三维坐标系中,由坐标原点指向空间一点的矢量叫做该点的位置矢量。一个坐标系中的三个基本单位矢量满足右手法则。场中任何一点对应的矢量都可以用坐标系中各基本单位矢量的叠加形式来表示。因为某一个坐标发生微小增大,而产生的新位置矢量和原位置矢量之间差矢量的方向称为该坐标变量增加的方向。沿坐标增加方向的单位矢量叫做基本单位矢量。

在实际应用中,除最常应用的直角坐标系外,有时还采用圆柱坐标系和球坐标系,下面来介绍三种坐标系。

### 1.2.1 直角坐标系

以常用的直角坐标系为例,坐标原点和  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴构成了一个参照系,任意一点的坐标可以通过如下方法来唯一确定:连接该点和坐标原点构成一个线段,该线段在轴上的投影取为坐标。直角坐标系中的基本单位矢量的方向正好沿轴的正方向,因此它们不随位置的变化而变化,是常矢量。空间任一点  $P$  的位置用直角坐标系中的三个变量  $(x, y, z)$  来表示,如图 1-3 所示,单位矢量  $e_x, e_y, e_z$  三者满足右手螺旋关系。

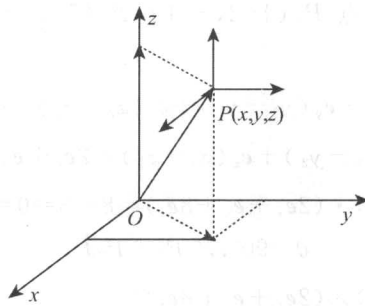


图 1-3 直角坐标系中的点

矢量

$$OP = e_x x + e_y y + e_z z$$

各坐标出现微小变化而形成的新点和原点的矢量差就是微分线元,在直角坐标系中的表达式是显而易见的。微分线元可以表示成三个沿基本单位矢量方向的矢量的叠加;这三个矢量两两组合形成了三个微分面元;这三个矢量作为边长形成了微分体积元。线元、面元、体积元表示如下:

线元

$$dr = e_x dx + e_y dy + e_z dz \tag{1-2-1}$$

面元

$$\begin{aligned} dS_x &= e_x dydz \\ dS_y &= e_y dx dz \\ dS_z &= e_z dx dy \end{aligned} \tag{1-2-2}$$

体积元

$$dV = dx dy dz \tag{1-2-3}$$

### 1.2.2 圆柱坐标系

空间任一点  $P$  的位置也可以用圆柱坐标系中的三个变量  $(\rho, \varphi, z)$  来表示,如图 1-4 所示,其中,  $\rho$  是位置矢量  $OP$  在  $xy$  面上的投影,  $\varphi$  是从正  $x$  轴到位置矢量  $OP$  在  $xy$  面上的投影之间的夹角,  $z$  是  $OP$  在  $z$  轴上的投影。圆柱系三个互相垂直的坐标面如图 1-5 所示。

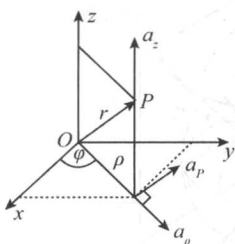


图 1-4 圆柱坐标系一点的投影

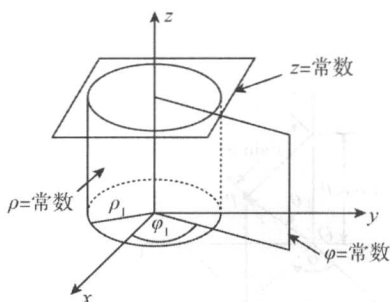


图 1-5 圆柱坐标系三个互相垂直的坐标面

由图 1-4 可以看出,圆柱坐标与直角坐标之间的关系为

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad (1-2-4)$$

坐标面

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \text{常数} \quad (1-2-5)$$

是一个以  $z$  轴作轴线的半径为  $\rho$  的圆柱面,  $\rho$  的变化范围为  $0 \leq \rho < \infty$ 。

坐标面

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \text{常数} \quad (1-2-6)$$

是一个以  $z$  轴为界的半平面,  $\varphi$  的变化范围为  $0 \leq \varphi < 2\pi$ 。

坐标面

$$z = \text{常数} \quad (1-2-7)$$

是一个平行于  $xy$  平面的平面。  $z$  的变化范围为  $-\infty < z < +\infty$ 。

沿圆柱面、 $\varphi = \text{常数}$  平面以及  $z = \text{常数}$  圆盘平面的三个面元矢量分别为

$$dS_\rho = e_\rho d\varphi dz \quad (1-2-8)$$

$$dS_\varphi = e_\varphi \rho d\rho dz \quad (1-2-9)$$

$$dS_z = e_z \rho d\varphi d\rho \quad (1-2-10)$$

柱坐标的体积元为

$$dV = \rho d\varphi d\rho dz \quad (1-2-11)$$

### 1.2.3 球坐标系

在球坐标系中,空间一点  $P$  唯一地用三个坐标变量  $(r, \theta, \varphi)$  来表示,如图 1-6 所示。此处,  $r$  即是位置矢量  $\mathbf{r}$  的大小,又称为矢径,  $\theta$  是位置矢量  $\mathbf{r}$  与  $z$  轴的夹角,  $\varphi$  是从正  $x$  轴到位置矢量  $\mathbf{r}$  在  $xy$  面上的投影  $OM$  之间的夹角,  $\theta = \text{常数}$ ,  $r = \text{常数}$ 。由图 1-7 可以看出,球坐标与直角坐标之间的关系为

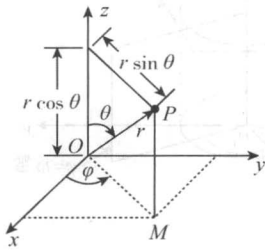


图 1-6 球坐标系一点的投影

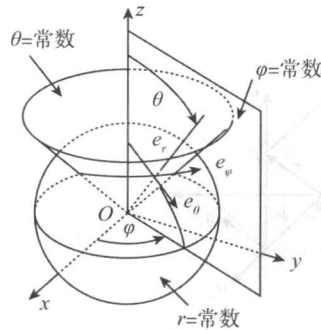


图 1-7 球坐标系三个互相垂直的坐标面

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (1-2-12)$$

坐标面

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1-2-13)$$

是一个半径为  $r$  球面,  $r$  的变化范围为  $0 \leq r \leq \infty$ 。

坐标面

$$\theta = \text{常数}$$

是一个以原点为顶点、以  $z$  轴为轴线的圆锥面,  $\theta$  的变化范围为  $0 \leq \theta \leq \pi$ 。

坐标面

$$\varphi \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \text{常数} \quad (1-2-14)$$

是一个以  $z$  轴为界的半平面,  $\varphi$  的变化范围为  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ 。

沿球面、 $\theta = \text{常数}$  平面以及  $\varphi = \text{常数}$  平面的三个面元矢量分别为

$$dS_r = e_r r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \quad (1-2-15)$$

$$dS_\theta = e_\theta r \sin \theta dr d\varphi \quad (1-2-16)$$

$$dS_\varphi = e_\varphi r dr d\theta \quad (1-2-17)$$

球坐标的体积元为

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \quad (1-2-18)$$

### 1.3 矢量场

发生物理现象的那部分空间称为场(field)。如果这个物理量是标量,就称其为标量场;如果物理量是矢量就称为矢量场。若场不随时间变化,则称该场为静态场,否则,称为动态场或时变场。

为了考察矢量场在空间的分布状况及变化规律,引入矢量线、矢量的通量和散度及矢量的环量和旋度的概念。

我们知道,矢量场在空间的分布状况可以用矢量线来形象直观地描述,如位于坐标原点的点电荷  $q$ ,它在空间所产生的电场强度矢量线图如图 1-8 所示。

由图 1-8 可见,电力线是一组从点电荷出发向空间发散的径向辐射线,这一组矢量线形象地描绘出点电荷的电场分布。

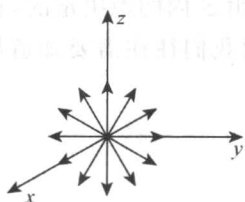


图 1-8 点电荷的电场矢量线

### 1.3.1 矢量的通量及散度

#### 1. 矢量场的通量

在流速为  $V$  的水流中,有一小面元,面积为  $dS$ ,则单位时间内流过  $dS$  的水的量为  $Q=VdS\cos\theta$ ,为更好地表达这个  $\cos\theta$ ,可以用法线方向给面元也定义方向,具体分两种情况:

(1) 开表面上的面元:此时按围成开表面的闭合曲线的方向来规定,即先选择闭合曲线的方向,然后面元正方向的定义与闭合曲线的方向成右手关系。

(2) 闭合表面上的面元:指向曲面外面的方向为正方向。

有了这个定义,面元可以表示为  $dS=e_n dS$ ,上述水流问题可以表示为  $V\cos(\theta)=V \cdot e_n$ ,  $Q=(V \cdot e_n)dS=V \cdot dS$ ,如图 1-9 所示。可以用面元与水流速度的点积来表述单位时间内通过面元的水的量,如果是某一个表面的话,就可以表示为  $Q=\int_S V \cdot dS$ ,类似于水的流速场。

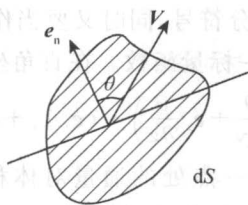


图 1-9 矢量场的通量

定义任意一个矢量场  $A$  在某个面上的通量

$$Q = \int_S A \cdot dS = \int_S (A \cdot e_n) dS$$

研究场在一个面上的通量有什么意义呢?当讨论一个闭合曲面上时,意义是最明显的,此时

$$Q = \oint_S A \cdot dS \quad (1-3-1)$$

假定矢量场  $A$  为流体的速度,则式(1-3-9)的物理意义为:表示在单位时间内流体从内

穿出曲面  $S$  的正流量与从外穿入曲面  $S$  的负流量的代数和。当  $\Phi < 0$ , 表示流出多于流入, 此时在  $S$  内必有产生流体的正源; 当  $\Phi > 0$  则表示流入多于流出, 此时在  $S$  内必有吸收流体的负源, 我们称之为沟; 当  $\Phi = 0$  则表示流入等于流出, 此时在  $S$  内正源与负源的代数和为零, 或者说  $S$  内没有源。我们把该类源称为发散源。

矢量场在闭合面  $S$  上的通量是由  $S$  内的源决定的, 它是一个积分量, 因而它描绘的是闭合面内较大范围的源的分布情况, 而我们往往需要知道场中每一点上发散源的性质, 为此, 引入矢量场散度的概念。

## 2. 矢量场的散度

### (1) 散度的定义

设有矢量场  $\mathbf{A}$ , 在场中任一点  $P$  处作一个包含  $P$  点在任一的闭合曲面  $S$ ,  $S$  所限定的体积为  $\Delta V$ , 当体积  $\Delta V$  以任意方式缩向  $P$  点时, 取下列极限

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left( \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} \right) \quad (1-3-2)$$

如果式(1-3-2)的极限存在, 则称此极限为矢量场  $\mathbf{A}$  在点  $P$  处的散度(divergence), 记作

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left( \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} \right) \quad (1-3-3)$$

在直角坐标系中, 散度的表达式

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1-3-4)$$

### (2) 哈密顿(Hamilton)算子

为了方便, 我们引入一个矢性微分算子, 在直角坐标系中有

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1-3-5)$$

称作哈密顿算子, 记号  $\nabla$  是一个微分符号, 同时又要当作矢量看待。

算子  $\nabla$  与矢性函数  $\mathbf{A}$  的点积为一标量函数。在直角坐标系中

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \left( \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z) = \operatorname{div} \mathbf{A} \quad (1-3-6)$$

可见,  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  为一数量, 表示场中一点处的通量对体积的变化率, 也就是在该点处对一个单位体积来说所穿出的通量, 称为该点处源的强度, 它描述的是场分量沿着与各自方向上的变化规律。当  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  的值不为零时, 其符号为正或为负。当  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  的值为正时, 表示矢量场  $\mathbf{A}$  在该点处有散发通量之正源, 称为有源; 当  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  的值为负时, 表示矢量场  $\mathbf{A}$  在该点处有吸收通量之负源, 称之为有洞; 当  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  的值等于零时, 则表示矢量场  $\mathbf{A}$  在该点处无源。

### (3) 高斯散度定理

在矢量分析中, 一个重要的定理是

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (1-3-7)$$

该式称为散度定理, 它说明了矢量场散度的体积分等于矢量场在包围该体积的闭合面上的



法向分量沿闭合面的面积分。散度定理广泛地用于将一个封闭面积分变成等价的体积分,或者将一个体积分变成等价的封闭面积分,有关它的证明这里略去。

**例 1-2** 在  $\mathbf{A} = e_x x^2 + e_y xy + e_z yz$  的矢量场中,有一个边长为 1 的立方体,它的一个顶点在坐标原点上,如图 1-10 所示。试求:(1)矢量场  $\mathbf{A}$  的散度;(2)从六面体内穿出的通量,并验证高斯散度定理。

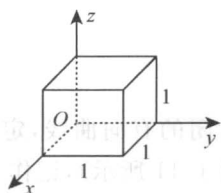


图 1-10 单位立方体

解 (1) 矢量场  $\mathbf{A}$  的散度:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial(x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(xy)}{\partial y} + \frac{\partial(yz)}{\partial z} = 3x + y$$

(2) 从单位立方体内穿出的通量为:

$$\Phi = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{前}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{后}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{左}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{右}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{上}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{下}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\int_{\text{前}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{后}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{前}} \mathbf{A} \cdot e_x dydz \Big|_{x=1} + \int_{\text{后}} \mathbf{A} \cdot (-e_x) dydz \Big|_{x=0} = 1 + 0 = 1$$

$$\int_{\text{左}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{右}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{左}} \mathbf{A} \cdot (-e_y) dx dz \Big|_{y=0} + \int_{\text{右}} \mathbf{A} \cdot e_y dx dz \Big|_{y=1} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\int_{\text{上}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{下}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{上}} \mathbf{A} \cdot e_z dx dy \Big|_{z=1} + \int_{\text{下}} \mathbf{A} \cdot (-e_z) dx dy \Big|_{z=0} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (3x + y) dx dy dz = 2$$

可见,从单位立方体内穿出的通量为 2,且有

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

成立。

**例 1-3** 有矢量场  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$ , 计算此矢量场穿过一个球心在原点, 半径为  $a$  的球面的通量及其散度。

解  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = e_x A_x(\mathbf{r}) + e_y A_y(\mathbf{r}) + e_z A_z(\mathbf{r}) = \mathbf{r} = r e_r = e_x x(\mathbf{r}) + e_y y(\mathbf{r}) + e_z z(\mathbf{r})$

在球面上  $r = a$ :

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S e_r r \cdot e_r dS = \oint_S a dS = a \oint_S dS = 4\pi a^2$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{r} = \left( e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} + e_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (e_x x + e_y y + e_z z)$$

$$= \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$