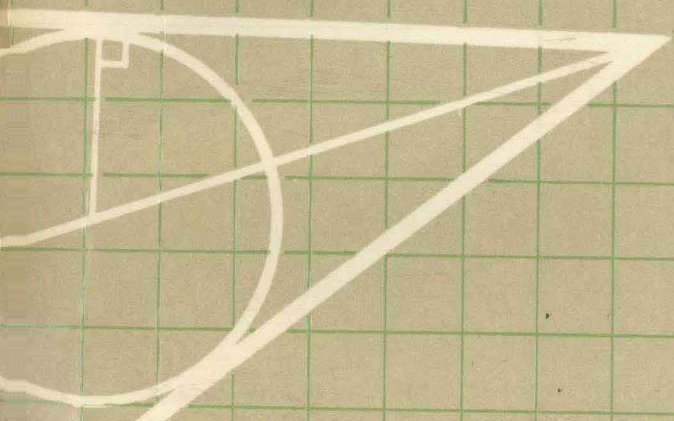
中学数学题解手册

（续集）

●姚元基　编著　　●朱家骏　主审



電子工業出版社

中学数学题解手册

（续　集）

姚元基　编著
朱家骏　主审

電子工業出版社

（京）新登字 055 号

内 容 提 要

本手册收集了中学数学里各类题型，以国内竞赛题、高考题、模拟题为主，还列选了部分国外入学考试和竞赛题。一题力求从几个角度出发求解，由浅入深，从简到繁，使广大读者的解题能力一步步提高。

本书适合于广大中学生和数学爱好者阅读，同时也是高考学生的良师益友。

中学数学题解手册（续集）

姚元基　编著

朱家骏　主审

电子工业出版社出版（北京市万寿路）
电子工业出版社发行　各地新华书店经售
中国科学院印刷厂印刷
开本：850×1168 毫米 1/32　印张：12.5　字数：640 千字
1994 年 8 月第 1 版　　1994 年 8 月第 1 次印刷
印数：3500 册　　定价：12.50 元（平）
印数：500 册　　定价：16.80 元（精）
ISBN 7-5053-2203-6/G·175（平）
ISBN 7-5053-2204-4/G·176（精）

审稿者的话

因从脱稿到出版之间有时间差，以致《中学数学题解手册》一书从收集素材到读者使用其中已相隔不少时间，为了弥补这一不足，姚老师虽已耄耋之年，犹仍笔耕不已，现在又完成了这本《续集》。

《续集》的编写体例不变，由于受到陈省身教授题词的鼓励和1991年在北京举行的国际奥林匹克数学竞赛上中国选手们突出优势的启示，深感为我国青少年继续提供数学食粮，既有现实意义又有深远意义，为此在《续集》中除按既往原则收集了1985～1991全国高考题和中学竞赛题以外，又在美、日、加等国家的各类试题中选收了若干属于我国中学数学教学大纲范围及其边缘部分的题目，内容丰富，但与原《手册》无重复，故既可与原手册混成一体，也可各自单独使用。

姚老师在编写题解时，不以答出为满足，力求方法初等，尽量与中学数学的讲解相一致，释义务使详细，说理寻根究底，往往为了一个解答的探索数易其稿，务使具有中学水平的读者能够完全看懂为止，与市场上所见同类书籍迥然不同，实为自学类书籍的楷模。我作为该书的审稿者，大部分时间也都是花在下笔的商榷上。

《中学数学题解手册》第一版早已售罄，值此重印之际，能以《续集》一起献给读者，应该归功于出版社同志们对广大青少年的关心和对基础科学的重视。

朱家骏于上海工业大学

1992年3月

续编说明

《中学数学题解手册》一书出版以后，精装本迅即售罄，平装本旋亦陆续卖完，而至今仍有不少人来要买。为此我们决定把《手册》重印一次，同时把后来收集到的、最近几年所用的模拟考题、部分国内、外的高考题及竞赛题，按照《手册》原来体例，再出一本《续集》，与《手册》一起发行，以满足读者各方面的需要。

《续集》的使用方法同原《手册》，题前加注了题目、出处，便于读者选择。

检 题 说 明

1. 题前字符是指题目出处，其中

▲	各类模拟试题
〈××沪〉	上海高考统一试题
〈××粤〉	广东高考统一试题
〈全或文或理〉	全国高考统一试题
〈××赛〉	全国高中数学竞赛
〈日高〉	日本高考入学试题
〈美邀〉	美国数学邀请赛
〈美赛〉	美国高中数学竞赛
〈它外〉	其它国外中学数学竞赛

2. 题后号码是指参考解答的编号。

总 目 录

检 题 目 录

（字条右边的号码是指检题的页码）

检　题

第一类　数

1. 数　论

一、约　数

▲ 105 的约数共有几个？ [1111]

▲ 600 的约数共有几个？ [1112]

▲ 含有 8 个不同的约数的最小的自然数是什么数？ [1113]

二、正 整 数

〈87 赛〉对任意给定的自然数 n，若 n^6+3a 为正整数的立方，其中的 a 为正整数，则这样的 a：

(A) 有无穷多个；(B) 存在，但只有有限个；

(C) 不存在；　(D) 以上结论都不正确。 [1121]

三、奇 偶 数

〈它外〉当 $n=2^m$ 时，证明 $C_{n-1}^0, C_{n-1}^1, \cdots, C_{n-1}^{n-1}$ 都是奇数。 [1131]

四、质 合 数

〈美赛〉小于 100 的个位数是 7 的素数共有多少个？（假设用通常的十进制数）。

(A) 4；(B) 5；(C) 6；(D) 7；(E) 8 [1141]

〈它外〉求所有的质数 a 和 b，使得数 $a^{a+1}+b^{b+1}$ 也是质数。 [1142]

〈它外〉求证：若对

$$0\leqslant k\leqslant\frac{\sqrt{n}}{3},\ k^2+k+n$$

是质数，则对 $0\leqslant k\leqslant n-2$，$k^2+k+n$ 也是质数，其中 $n>2$。 [1143]

五、平 方 数

〈它外〉设 g 是自然数，证明：当且仅当 $g=3$ 时 $g^4+g^3+g^2+g+1$ 才是一个完全平方数。 [1151]

〈它外〉设正整数 d 不等于 2、5、13，证明在集合 $\{2,5,13,d\}$ 中可以找到两个不同元素 a、b，使得 $ab-1$ 不是完全平方数。 [1152]

〈它外〉若正整数 a 和 b 使得 $ab+1$ 整除 a^2+b^2，求证 $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$ 是某个正整数的平方。 [1153]

六、整　除

〈它外〉如果一个混循环小数所表示的既约分数为 p/q，求证：分母 q 必可被 2 或 5 整除，或同时被它们整除。 [1161]

〈它外〉设 n 为自然数，求证方程 $z^{n+1}-z^n-1=0$ 有模为 1 的复根的充要条件是 $n+2$ 可被 6 整除。 [1162]

▲ 找 k 个自然数，使得其中任意两数之积，能被它们之和整除。 [1470]

用二项法证整除

▲ 求证 $77^{77}-1$ 能被 19 整除。 [2491]

▲ 求证 $55^{55}-13$ 能被 14 整除。 [2492]

▲ 求证 $n^{n-1}-1$ 能被 $(n-1)^2$ 整除。 [2493]

▲ 求证 7^n-6n-1 能被 36 整除。

[2494]

▲ 求证 $3^{2n+2}-8n-9$ 能被64整除。 [2495]

▲ 求证 4^n+1 不能被7整除。 [2496]

七、整　数

▲ 用一个整数去除300，262，500后得到相同的余数，问这个整数是什么？ [1164]

▲ 500，626，315除以同一个整数后所得余数都相同，问这个整数是什么？ [1165]

八、数的最大整数

〈美邀〉给定由121个整数组成的一个整数组，每一个数都在1和1000之间，可以重复，这组数有个"最大机率值"（即在该数附近取值的可能性最大）。令D为这个值与这组数的算术平均值之差，如果D尽可能大，求$[D]$。

[1168]

九、余　数

▲ 一个数，除以3余2，除以4余1，问这个数除以12时余数是几？ [1171]

▲ 问71427乘19的积被7除余数是几？

[1172]

▲ 72455、8471和997三个数的积除以9，问余数是几？ [1173]

▲ 69、90和125被某整数除时余数相同，试求281被这个整数除后所得的余数。 [1174]

〈它外〉设 $f(x)=x^{99}+x^{98}+x^{97}+\cdots+x^2+x+1$，

求 $f(100)$ 除以 $f(x)$ 后所得的余数。

[1175]

十、分　数

〈美邀〉化简分数

$$\{(10^4+324)(22^4+324)(34^4+324)\times(46^4+324)(58^4+324)\}/\{(4^4+324)\times(16^4+324)(28^4+324)(30^4+324)\times(52^4+324)\}$$ [1181]

〈美赛〉对任何实数a和正整数k，定义分数

$$\binom{a}{k}=\frac{a(a-1)(a-2)\cdot\cdots\cdot[a-(k-1)]}{a(k-1)(k-2)\cdot\cdots\cdot(2)(1)}.$$

问 $\binom{-\frac{1}{2}}{100}\div\binom{\frac{1}{2}}{100}$ 是多少？

(A) -199； (B) -197； (C) -1；
(D) 197； (E) 199。 [1182]

十一、循环小数

▲ 在下列式子中正确的是

(A) $0.\dot{9}=1$； (B) $0.\dot{9}\approx1$； (C) $0.\dot{9}<1$；
(D) $0.\dot{9}+0.\dot{1}=1$。 [1186]

▲ 分别在$2.71828\dot{1}$的某一位上添一点，使得它（1）尽可能大；（2）尽可能小。 [1187]

〈它外〉如果一个混循环小数所表示的既约分数为p/q，求证：分母q必可被2或5整除，或同时被它们整除。 [1161]

2. 实　数

一、有理无理数

〈美邀〉计算$\sqrt{(30)(31)(29)(28)+1}$。

[1201]

〈美邀〉求积

$$(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})(-\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})(\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{7})(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7})$$ [1202]

〈美赛〉$\sqrt{8}+\sqrt{18}=$____。

(A) $\sqrt{26}$； (B) $2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$； (C) 7；

(D) $5\sqrt{2}$； (E) $2\sqrt{13}$。 [1203]

〈它外〉对任意自然数$n\geqslant3$，欧氏平面上存在n个点，求证任意两点间的距离是无理数，每三点构成的三角形非退化且有有理面积。 [1204]

〈87粤〉若实数a、b、c不全为负数，则a、b、c中

(A) 至少有一个正数； (B) 既有正数又有

负数；（C）乘积不为负数；（D）至多有两个负数。 [1205]

二、实数的绝对值

〈美邀〉设 $|x_i|<1\ (i=1,2,\cdots,n)$ 及

$$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n| = 19+|x_1+x_2+\cdots+x_n|,$$

满足以上条件的 n 的最小值是什么？ [1251]

3. 数的进位制

〈美赛〉编码员设计一种把正整数译成密码的方法如下：首先把正整数用五进制表示，其次建立在五进制数中出现的数码与集合 $\{V, W, X, Y, Z\}$ 的元素间的一一对应，利用这个对应关系，编码员发现有三个递增的相邻正整数所译成的密码分别是 VYZ、VYX、VVW，问密码为 XYZ 的正整数的十进制写法是：

（A）48； （B）71； （C）82； （D）108； （E）113。 [1301]

4. 数学归纳法

一、证 整 除

▲ 用数学归纳法求证：对于一切的正偶数 n，a^n-b^n 可被 $a+b$ 整除。 [1401]

▲ 求证：$1+2+2^2+\cdots+2^{5n-1}$ 可被 31 整除。 [1402]

二、证 成 立

▲ 已知 $a_1=1$、$a_2=5$、$a_{n+1}=3a_{n-1}-2a_n$，证明 $a_n=2-(-3)^{n-1}$。 [1403]

▲ 用数学归纳法求证

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}.$$ [1404]

▲ 求证：

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n},\ n\geqslant 2.$$ [1405]

▲ 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，用数学归纳法证明当 $n\geqslant 2$ 时，

$$C_n^0a_1-C_n^1a_2+C_n^2a_3-\cdots+(-1)^nC_n^na_{n+1}=0$$ [1406]

〈89 文〉用数学归纳法证明

$$(1\cdot 2^2-2\cdot 3^2)+(3\cdot 4^2-4\cdot 5^2)+\cdots+[(2n-1)(2n)^2-2n(2n+1)^2]=-n(n+1)(4n+3)$$ [1407]

〈89 理〉是否存在常数 a、b、c，使得

$$1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\cdots+n(n+1)^2=\frac{1}{12}n(n+1)(an^2+bn+c)$$

对一切自然数 n 都成立？证明你的结论。 [1408]

〈它外〉设 $x_0=0$、$x_1=1$，且

$$x_{n+1}=4x_n-x_{n-1},\ y_0=1、\ y_1=2,$$

且

$$y_{n+1}=4y_n-y_{n-1},\quad n=1、2、3、\cdots$$

求证：对一切整数 $n\geqslant 0$，有 $y_n^2=3x_n^2+1$。 [1409]

〈88 赛〉已知 a、b 为正实数，且

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1,$$

试证：对每一个 $n\in N$，

$$(a+b)^n-a^n-b^n\geqslant 2^{2n}-2^{n+1}.$$ [4625]

▲ 证明 $1^2+2^2+\cdots+n^2+(n-1)^2+\cdots+2^2+1^2=\frac{1}{3}n(2n^2+1)$ [6267]

用数学归纳法证下面各题

▲ 当 $n\geqslant 5$、$n\in N$，求证 $2^n>n^2$。 [4661]

▲ 设 $x>-1$ 且 $x\neq 0$、$n\geqslant 2$，求证

$$(1+x)^n>1+nx.$$ [4662]

▲ 求证：当 $a>0$、$b>0$ 时

$$\frac{a^n+b^n}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^n$$ [4663]

▲ 求证：$2!\cdot 4!\cdot 6!\cdot\cdots\cdot(2n)!$

$$\geqslant[(n+1)!]^n$$ [4664]

▲ 求证：

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$>2(\sqrt{n+1}-1)\ (n\in N).$$ [4665]

▲ 求证：

$$\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

$$<\sqrt{n}\ (n\in N).$$ [4666]

〈85 沪〉对于一切大于 1 的自然数 n，证明：

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)$$

$$>\frac{\sqrt{2n+1}}{2}$$ [4667]

5. 排列组合数

〈87 沪〉$C_{10}^1+C_{10}^2+\cdots+C_{10}^9+C_{10}^{10}=?$ [1501]

▲ 已知 $P_m^n=120$，$P_{m+1}^n=360$，求 m,n. [1502]

〈它外〉当 $n=2^m$ 时，证明 $C_{n-1}^0, C_{n-1}^1, \cdots, C_{n-1}^{n-1}$ 都是奇数. [1131]

6. 指　　数

〈87 沪〉设 $2^a=5^b=10$，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=?$ [1621]

〈美赛〉$(1+x^2)(1-x^3)$ 等于 $(A)1-x^5$；$(B)1-x^6$；$(C)1+x^2-x^3$；$(D)1+x^2-x^3-x^5$；$(E)1+x^2-x^3-x^6$. [1622]

〈美赛〉$\dfrac{2^1+2^0+2^{-1}}{2^{-2}+2^{-3}+2^{-4}}$ 等于 $(A)6$；$(B)8$；$(C)\frac{31}{2}$；$(D)24$；$(E)512$. [1623]

7. 对　　数

▲ $\lg(\cos x-1)^2$ 与下面各式哪个相等
$(A)[\lg(\cos x-1)]^2$；$(B)2\lg(\cos x-1)$；$(C)\ 2\cos\lg x$；$(D)4\lg\left|\sin\frac{x}{2}\right|+2\lg 2$. [1711]

▲ 设 α 为锐角，则 $\pi^{|\log_\pi \sin\alpha|}$ 等于
$(A)\sin\alpha$；$(B)-\sin\alpha$；$(C)\sec\alpha$；$(D)\csc\alpha$. [1712]

〈85 沪〉设 $\lg 2=a$，则 $\log_2 25=$_____. [1721]

〈87 粤〉$\log_2\sqrt{2}+\log_9 27$ 的值是_____. [1722]

〈美邀〉如果 $\log_2(\log_8 x)=\log_8(\log_2 x)$ 求 $(\log_2 x)^2$ [1723]

8. 三角比数

一、概　念　题

▲ 1327° 是第__象限角. −1327° 是第__象限角. [0101]

▲ 如果 α 是第 IV 象限角，那么 (1) $\frac{\alpha}{2}$ 是第几象限角？(2) 2α 是第几象限角？ [0102]

▲ 若 $0<\alpha<90°$、$0<\beta<90°$，则 (1) $\alpha+\beta$ 的范围是__；(2) $\alpha-\beta$ 的范围是__. [0103]

▲ 求下面各式中角 θ 所在范围.

1. $|\sin\theta|=\sin(-\theta)$ [0104]

2. $\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}=\cos\dfrac{\theta}{2}$ [0105]

3. $\operatorname{tg} a\theta\cdot\operatorname{ctg} a\theta=1\ (a\neq 0)$ [0106]

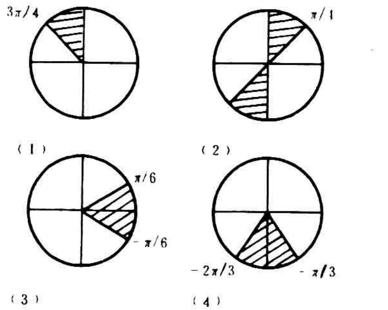
4. $\dfrac{\sqrt{1-\sin\theta}}{\sqrt{1+\sin\theta}}=\operatorname{tg}\theta-\sec\theta$

$$\left(\theta\neq k\pi\pm\frac{\pi}{2}\right)$$ [0107]

5. $2\theta \in \pi$①，且

$\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{1-\sin 2\theta}$②. [0108]

▲ 写出终边在下列阴影部分的角 α 的集合. [0109]



▲ 若 $\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\theta+1}}+\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\theta+1}}=-1$，则 θ 是_ (A) 第Ⅰ象限角；(B) 第Ⅱ象限角；(C) 第Ⅲ象限角；(D) 第Ⅳ象限角.

[0110]

▲ 已知 α、β 均为锐角，且 $\cos\alpha > \sin\beta$，则下列关系正确的是

(A) $\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{2}$；(B) $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$；

(C) $\alpha+\beta>\dfrac{\pi}{2}$；(D) 前列 (A)、(B)、(C) 均不正确. [0111]

▲ 在 $\triangle ABC$ 中若 $A<B<C$，则 A 所在的范围是____.

(A) $0<A<\dfrac{\pi}{2}$；(B) $0<A<\dfrac{\pi}{3}$；

(C) $0<A\leqslant\dfrac{\pi}{3}$；(D) $\dfrac{\pi}{4}\leqslant A\leqslant\dfrac{\pi}{3}$.

[0112]

▲ 下列关系式中使得 $\angle\alpha$ 存在的只有____

(A) $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$，且 $\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$；

(B) $\sin\alpha=\dfrac{a^2+b^2}{2ab}$，($|a|\neq|b|$)；

(C) $\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{4}{3}$；

(D) $\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\alpha$ 为锐角. [0113]

〈89 沪〉若 α 是第 Ⅳ 象限的角，则 $\pi-\alpha$ 是_

(A) 第一象限的角；(B) 第二象限的角；

(C) 第三象限的角；(D) 第四象限的角.

[0114]

〈86 沪〉若 $\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{3}{5}$、$\cos\dfrac{\theta}{2}=-\dfrac{4}{5}$，则 θ 的终边在_

(A) 第一象限；(B) 第二象限；

(C) 第三象限；(D) 第四象限. [0115]

二、化　简

▲ 化简下列各式

1. $\sin(-840°)$ [0116]

2. $\cos\left(-\dfrac{17}{3}\pi\right)$ [0117]

3. $\cos 78°\cos 3° + \cos 12°\sin 3°$ [0118]

4. $\sqrt{1+\sin 560°}+\sin 10°$ [0119]

5. $1+\sin(\alpha-2\pi)\sin(\pi+\alpha)-\operatorname{tg}(\pi-\alpha)\operatorname{ctg}(\alpha-\pi)-2\cos^2(-\alpha)$ [0120]

6. $\dfrac{1-\operatorname{tg}75°}{1+\operatorname{tg}75°}$ [0121]

7. $\{\sin[\alpha+(2n+1)\pi]+\sin[\alpha-(2n+1)\pi]\}/\{\sin(\alpha+2n\pi)\cos(\alpha-2n\pi)\}$，($n\in Z$) [0122]

8. $\dfrac{1-2\sin^2\theta}{1+\sin 2\theta}-\dfrac{1-\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}\theta}$ [0123]

9. $\left\{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\alpha-\dfrac{3}{2}\pi\right)\csc\left(\alpha+\dfrac{3}{2}\pi\right)\right\}\Big/\{\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)\sec(-\alpha)\}$

[0124]

10. $\left(\sin^2A+\operatorname{tg}A\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}+\cos^2A\right)\dfrac{\sin 2A}{2\cos A}$

[0125]

11. $\dfrac{1+\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\alpha}$ [0126]

12. $\sqrt{1-\sin A}+\sqrt{1+\sin A}$, $(0<A<\pi)$ [0127]

13. $\sqrt{\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha}+\sqrt{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}$, $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ [0128]

14. $\dfrac{\sqrt{1-2\sin 10^\circ\cos 10^\circ}}{\cos 10^\circ-\sqrt{1-\sin^2 100^\circ}}$ [0129]

15. $\dfrac{(1+\sin\theta+\cos\theta)\left(\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{2+2\cos\theta}}$, $(270^\circ<\theta<360^\circ)$ [0130]

▲ $\sqrt{1-\sin\frac{3}{2}}$ 等于____

(A) $\cos\sqrt{\frac{3}{2}}$; (B) $\cos\frac{3}{2}$;

(C) $\sin\frac{3}{4}-\cos\frac{3}{4}$;

(D) $\cos\frac{3}{4}-\sin\frac{3}{4}$. [0131]

〈87 沪〉 $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=$____

(A) $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$; (B) $-\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$;

(C) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta$; (D) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}$. [0132]

三、求角比

〈88 文〉 $\sin\left(-\frac{19}{6}\pi\right)$的值等于

(A) $\frac{1}{2}$; (B) $-\frac{1}{2}$; (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

(D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. [0133]

▲ 设 $\operatorname{ctg}\varphi=m$，求$\varphi$的其它三角比。 [0134]

▲ 设 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$、$\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}$，$\alpha$、$\beta$为锐角，求 $\sin\beta$。 [0135]

▲ 已知 $\frac{\theta}{2}$ 是第Ⅱ象限角，且 $\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{x-1}{2x}}$，那么 $\sin\theta$ 的值是

(A) $\sqrt{\frac{x+1}{2x}}$; (B) $\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}$;

(C) $-\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}$; (D) $\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}$ 或 $-\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}$. [0136]

▲ 已知 $5\operatorname{tg}\alpha+\sec\alpha=5$，求 $\cos\alpha$。 [0137]

〈85 沪〉 若 $\operatorname{tg}\alpha=-2$ 且 $\sin\alpha<0$，则 $\cos\alpha$ 的值是__。 [0138]

〈87 粤〉 若 $\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}=3$，则 $\cos\theta$ 的值是

(A) $\frac{3}{5}$; (B) $-\frac{3}{5}$; (C) $-\frac{4}{5}$; (D) $\frac{4}{5}$. [0139]

▲ 已知 $\begin{cases}\operatorname{tg}\theta+\sin\theta=a\text{①}\\ \operatorname{tg}\theta-\sin\theta=b\text{②}\end{cases}$，用 a、b 表 $\cos\theta$。 [0140]

▲ 已知 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{\frac{2}{3}}$，求 $\operatorname{tg}\theta$。 [0141]

▲ 已知 $0<\alpha<\pi$，且 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$，则 $\operatorname{tg}\alpha$ 的值是__。

(A) $-\frac{4}{3}$; (B) $-\frac{3}{4}$; (C) $\frac{4}{3}$; (D) $\frac{3}{4}$. [0142]

〈89 全〉 $|\cos\theta|=\frac{1}{5}$，$\frac{5\pi}{2}<\theta<3\pi$，那么 $\sin\frac{\theta}{2}$ 的值等于

(A) $-\frac{\sqrt{10}}{5}$; (B) $\frac{\sqrt{10}}{5}$; (C) $-\frac{\sqrt{15}}{5}$;

(D) $\frac{\sqrt{15}}{5}$. [0143]

▲ 对任何 $180^\circ<\alpha<360^\circ$，$\csc\dfrac{\alpha}{2}$ 等于

(A) $\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$；(B) $\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$；

(C) $-\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$；(D) $-\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$. [0144]

▲ 若 $\sin\theta=-\dfrac{3}{5}$，$540^\circ<\theta<630^\circ$，则 $\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}=$____ (A) -3；(B) $\dfrac{1}{9}$；

(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$；(D) $-\dfrac{1}{3}$. [0145]

〈88 沪〉若 $\sin\alpha=\dfrac{5}{13}$，α 为第 Ⅱ 象限角，则 $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ 的值为 (A) $\dfrac{1}{5}$；(B) 5；(C) -5；(D) $-\dfrac{1}{5}$. [0146]

〈88 全〉已知 $\sin\theta=-\dfrac{3}{5}$，$3\pi<\theta<\dfrac{7\pi}{2}$，求 $\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}$ 的值. [0147]

▲ 设 $\sin\theta=-\dfrac{24}{25}$，且 $540^\circ<\theta<630^\circ$，求 $\sin 2\theta$；$\cos\dfrac{\theta}{2}$. [0148]

▲ 若 $\lg(\sin\theta)=a$，$\lg(\cos\theta)=b$，则 $\sin 2\theta=$_

(A) $\dfrac{a+b}{2}$；(B) $2(a+b)$；

(C) $10^{\frac{a+b}{2}}$；(D) $2\times10^{a+b}$. [0149]

▲ 已知 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=3$，$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=5$. 求 $\operatorname{tg}2\alpha$；$\operatorname{tg}2\beta$. [0150]

▲ 设 $\sin\theta=-\dfrac{24}{25}$，且 $540^\circ<\theta<630^\circ$，求 $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$. [0151]

▲ 若 $\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{3\pi}{4}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{4}$，$\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{3}{5}$，$\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}+\beta\right)=\dfrac{5}{13}$，求 $\sin(\alpha+\beta)$. [0152]

〈85 沪〉已知 $\cos\alpha=-\dfrac{1}{3}$，$\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$，求 $\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{5\pi}{6}\right)$. [0153]

▲ 若 $\sin\alpha\cdot\sin\beta=1$，则 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值是(A)0；(B)1；(C)±1；(D)-1. [0154]

▲ 若 $\cos\left(\alpha-\dfrac{\beta}{2}\right)=-\dfrac{1}{9}$，$\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}-\beta\right)=\dfrac{2}{3}$，且 $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，求 $\cos(\alpha+\beta)$. [0155]

〈美邀〉若 $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=25$，$\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}y=30$，求 $\operatorname{tg}(x+y)$. [0156]

〈86 沪〉已知 $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$ 且 $\pi<\theta<\dfrac{3\pi}{2}$，则 $\operatorname{ctg}\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=$____. [0157]

四、求式值

〈89 沪〉已知 $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$，$2\pi<\alpha<3\pi$，那么 $\sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2}=$____. [0158]

▲ 已知 $\sin 2\alpha=\dfrac{1}{4}$，则 $\cos\alpha-\sin\alpha=$____. [0159]

▲ 已知 $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{2mn}{m^2-n^2}$，($|m|\neq|n|$) 求 $2mn\cos^2\theta-(m^2-n^2)\sin\theta\cos\theta$ 之值. [0160]

▲ 若 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，则 $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha=$____. [0161]

〈86 理〉已知 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，求 $\sin^3\theta-\cos^3\theta$ 的值. [0162]

▲ 若 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{\frac{2}{3}}$，求 $\sin^4\theta+\cos^4\theta$ 之值。　[0163]

〈美赛〉若 $\sin x=3\cos x$，则 $\sin x\cdot\cos x$ 的值是

(A) $\frac{1}{6}$；(B) $\frac{1}{5}$；(C) $\frac{2}{9}$；(D) $\frac{1}{4}$；

(E) $\frac{3}{10}$.　[0164]

▲ 若 $4\cos A\cos B=\sqrt{6}$，$4\sin A\sin B=\sqrt{2}$，则 $(1-\cos 4A)(1-\cos 4B)=$ ___.　[0165]

▲ 已知 $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=\frac{\sqrt{3}}{3}$，求 $(2-\cos 2\alpha)\times(2-\cos 2\beta)$ 之值。　[0166]

▲ 已知 $\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=3+2\sqrt{2}$，求 $\frac{1-\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$ 之值。　[0167]

〈88理〉已知 $\operatorname{tg}x=a$，求 $\frac{3\sin x+\sin 3x}{3\cos x+\cos 3x}$ 的值。　[0168]

〈美邀〉设 a、b、c 是一个三角形的三条边，α、β、γ 分别是这三边的对角，如果 $a^2+b^2=1989c^2$，求 $\frac{\operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$.　[0169]

五、计算代数和

▲ 计算下列各式

1. $\cos 20°+\cos 60°+\cos 100°+\cos 140°$　[0170]

2. $a^2\cos 2\pi-b^2\sin\frac{3\pi}{2}+ab\cos\pi-ab\csc\frac{\pi}{2}$　[0171]

3. $\cos\frac{\pi}{3}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\frac{3}{4}\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{6}+\sin\frac{3\pi}{2}$　[0172]

4. $\operatorname{tg}9°+\operatorname{ctg}117°-\operatorname{tg}243°-\operatorname{ctg}351°$　[0173]

5. $\frac{1}{2\sin 10°}-2\sin 70°$　[0174]

6. $\frac{1}{\cos 50°}+\operatorname{tg}10°$　[0175]

六、计算连乘积

▲ 计算下列各式

1. $\sin 20°\cdot\sin 40°\cdot\sin 60°\cdot\sin 80°$　[0176]

2. $\cos\frac{1}{7}\pi\cos\frac{2}{7}\pi\cos\frac{3}{7}\pi\cos\frac{4}{7}\pi\cos\frac{5}{7}\pi\times\cos\frac{6}{7}\pi$　[0177]

3. $\operatorname{tg}384°\operatorname{tg}396°\operatorname{tg}405°\operatorname{tg}414°\operatorname{tg}426°$　[0178]

4. $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$　[0179]

5. $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}$　[0180]

6. $\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}$　[0181]

7. $\operatorname{tg}(18°+\alpha)\operatorname{tg}(37°-\alpha)\operatorname{tg}(72°-\alpha)\times\operatorname{tg}(307°-\alpha)$　[0182]

8. $(1+\operatorname{tg}1°)(1+\operatorname{tg}2°)\cdot\cdots\cdot(1+\operatorname{tg}43°)(1+\operatorname{tg}44°)$　[0183]

〈87理〉求 $\sin 10°\sin 30°\sin 50°\sin 70°$ 的值　[0184]

七、和积混合计算

▲ 计算下列各式

1. $\sin 170°\sin 130°-\sin 50°\sin 110°-\sin 70°\sin 10°$　[0185]

2. $\sin^2 62°+\operatorname{tg}54°\cdot\operatorname{tg}45°\cdot\operatorname{tg}36°+\sin^2 28°$　[0186]

3. $\cos^2 73°+\cos^2 47°+\cos 73°\cdot\cos 47°$　[0187]

4. $2\cos\frac{1}{13}\pi\cos\frac{9}{13}\pi+\cos\frac{3}{13}\pi+\cos\frac{5}{13}\pi$　[0188]