大学数学

线性代数

主编 李林曙 施光燕

教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材

中央廣播電視大學出版社

教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材

大学数学

线性代数

主编　李林曙

施光燕

中央广播电视大学出版社

北　京

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/李林曙,施光燕主编. —北京:中央广播电视大学出版社,2002.7

教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材

ISBN 978-7-304-02247-1

Ⅰ.线… Ⅱ.①李… ②施… Ⅲ.线性代数—电视大学—教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 053355 号

教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材

大 学 数 学

线 性 代 数

主编 李林曙 施光燕

出版·发行: 中央广播电视大学出版社

电话: 营销中心:010-58840200 总编室:010-68182524

网址: http://www.crtvup.com.cn

地址: 北京市海淀区西四环中路 45 号

邮编: 100039

经销: 新华书店北京发行所

印刷: 北京泽明印刷有限责任公司 **印数:** 237001～257000

版本: 2002 年 6 月第 1 版 2012 年 9 月第 19 次印刷

开本: 850 × 1168 1/32 **印张:** 9.875 **字数:** 237 千字

书号: ISBN 978-7-304-02247-1

定价: 14.00 元

(如有缺页或倒装,本社负责退换)

前　言

《大学数学》这套文字教材是中央电大基础课改造工程中“数学课程整合”教学改革的阶段性成果.

我们知道，大学数学课程的改革是高校教学改革的重点，特别是在大学数学如何满足不同规格层次、不同专业科类的需要的改革上，更加困难.随着中央电大人才培养模式改革和开放教育试点的开展，电大专科和专科起点本科的理工、文经类专业相继开出，中央电大数学课程的教学改革同样成为十分重要和紧迫的工作.为配合试点工作，深化以人才培养模式改革为核心、以教学内容和课程体系改革为重点的教学改革，中央电大从1999年起，与试点工作同步启动了中央电大基础课改革工程，“数学课程整合”便是其中的一个重点项目.

为搞好大学数学课程的建设，项目组经过较长时间的调研和教学实验，确定了“科学性、应用性、开放性；模块化、信息化、一体化”的课程建设和改革原则.

①科学性：通过数学大师和数学教育家的联合把关，确保数学课程教学内容的准确无误，并在此基础上，充分考虑各类大学生在数学基本素养和能力的培养上应有的要求，以调整和改革人才培养的知识、能力和素质结构.

②应用性：坚持“必需、够用”的原则，在保证学生数学基本素养和后续课程需要的前提下，强调数学方法的掌握、计算能力的培养和数学建模的训练，注重数学在各有关学科、特别是在社会经济生活和工作实际中应用，注重典型例子的选取和案例教学，全方位提高学生的数学实践和应用能力，以实现电大应用性人才培养目标.

③开放性：教学内容的可选择性是远程开放教育的重要特征. 本教材在教学内容的选择上，力求在尽可能大的范围内适应不同类别、不同专业、不同层次和不同水平学生的需要. 既考虑电大内部各类学生的需要，也考虑社会各种办学形式的需要；既考虑当前专业教学之急需，也考虑学科发展与学生未来知识更新、拓宽视野的需要，在教学内容的选择、阐述和教学媒体的设计等方面留有充分的开口和接口.

④模块化：为体现“科学性、应用性、开放性”的原则，在内容的选择上，将大学数学基本内容按照多元函数微积分、线性代数（行列式、矩阵、线性方程组、二次型）、概率论与数理统计（概率论、数理统计）等三大部分进行模块化设计、编排，使这套教材具有更好的模块组合能力、更大的可选择性和更广泛的适应性. 按照教学计划，这些模块的具体安排如下：

经济管理类（专科起点本科）：多元函数微积分、线性代数、概率论与数理统计.

工科水利水电工程专业（专科）：高等数学（2）、概率论与数理统计.

计算机数学基础（A）（工科计算机应用专业（专科））：多元函数微积分（多元函数微分、多元函数积分）、线性代数（行列式、矩阵、线性方程组）、概率论与数理统计（概率论、数理

统计).

工科土木工程专业(本科):线性代数(行列式、矩阵、线性方程组、二次型)、概率论与数理统计(概率论、数理统计).

⑤信息化:充分应用现代信息技术和教育技术进行本课程的设计和开发.根据课程目标要求和各模块特点,发挥现代远程教育媒体手段的教学功能和技术实现优势,采用文字、音像、CAI课件、计算机网络等多种教学媒体和手段实施课程教学,使本课程教学媒体更为丰富、教学方式和方法更为灵活、学生的学习更具自主性.

⑥一体化:按照现代教育理论和教学设计思想,对课程选择的多种教学媒体进行优化设计,使各种不同的教学媒体根据其不同的教学功能和特点,在远程教学中发挥出应有的作用,力争达到各媒体间密切配合、优势互补、导学、助学、整体化、一体化的优良教学效果.

按照上述原则,在众多专家直接指导下,课程组做了大量工作.《线性代数》由大连理工大学施光燕教授编写第1、4章,中央电大李林曙教授编写第3章、赵坚副教授编写第2章,《概率论与数理统计》由中央电大顾静相副教授编写第1章、陈卫宏副教授编写第2章、张旭红副教授编写第3章,《多元函数微积分》由中央电大周永胜编写,大连理工大学施光燕教授、中央电大李林曙教授担任本套教材的主编,首都师范大学石生明教授担任主审.赵坚副教授和张旭红副教授协助主编分别在《多元函数微积分》、《线性代数》和《概率论与数理统计》的统稿中做了大量工作.

在此,特别感谢主审专家石生明教授和审定专家:北京师范大学杨文礼教授、北京大学姚孟臣副教授,他们在教材编写过程

中，自始至终给予了认真、细致的指导，提出了许多宝贵意见；中央电大出版社何勇军副编审也为本书的编辑出版付出了不少心血，特别是在本书的版式工艺教学设计上提出了许多很好的建议，在此一并表示感谢.

教学改革需要各位同学、老师和读者的共同参与，我们的工作一定有不尽如人意的地方，我们真诚地期待大家的使用反馈意见，以便再版时及时改进，切实推进以人才培养模式改革为核心、教学内容和课程体系改革为重点的教学改革.

数学课程整合项目组

2002 年 7 月

目　录

第 1 章　n 阶行列式

[学习目标]

1. 理解 n 阶行列式的递归定义，掌握利用行列式的性质计算行列式的方法，知道线性方程组解的克莱姆法则；
2. 掌握代数余子式的计算；
3. 掌握行列式按一行（列）展开的方法.

用二阶行列式可以简明地表示某些二元一次方程组的解，把二阶行列式推广到 n 阶行列式后，可以类似地表示某些 n 元一次方程组的解. 另外，对矩阵的深入研究也需要行列式，在其他的一些理论和应用问题中也要使用行列式这一工具. 因此，在线性代数中，行列式是一个基本工具，但从上一世纪初以来，行列式理论已不是线性代数的中心，所以对它不拟多加论述.

1.1　n 阶行列式的定义

在初等数学中，解二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (2) \end{cases}$$

用消元法，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \tag{3}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \tag{4}$$

为了便于使用与记忆，把上面出现的那种 4 个数之间的特定算式记为

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \stackrel{\Delta}{=} ad - bc \tag{5}$$

并把左边的记号称为二阶行列式，其中每个数称为元素，横的称行，竖的称列，(5) 式左边共有两行和两列，故称二阶行列式，由上面的定义可知二阶行列式即是由其元素之间的特定运算所得到的一个数值. 例如

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 5 - (-1) \times 4 = 19$$

利用二阶行列式的这个算式，当二元一次方程组 (1)，(2) 的系数组成的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

时，其解就可简单地表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{6}$$

很容易抓住 (6) 式的规律并进行记忆，分母均是由方程组的系

数所构成的行列式，x_i 的分子则是把系数行列式的第 i 列换成方程组中右端常数列，其余列不动所得的行列式. 用公式（6）来解方程组（1），（2）的方法称为**克莱姆法则**.

例 1　利用克莱姆法则解二元一次方程组：

$$\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 = 6 \\ 2x_1 - 5x_2 = -7 \end{cases}$$

解　利用公式（6），由于系数行列式

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = (-3) \times (-5) - 4 \times 2 = 15 - 8 = 7 \neq 0$$

所以

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -7 & -5 \end{vmatrix}}{7} = \frac{6 \times (-5) - 4 \times (-7)}{7} = -\frac{2}{7}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 2 & -7 \end{vmatrix}}{7} = \frac{(-3) \times (-7) - 6 \times 2}{7} = -\frac{9}{7}$$

为要得到 n 元一次方程组的克莱姆法则，首先要推广二阶行列式的概念，定义 n 阶行列式.

定义 1.1　由 n^2 个数排列成 n 行、n 列，并左、右各加一竖线，即

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 ***n* 阶行列式**，它代表一个由特定的运算关系所得到的算式，当 $n = 1$ 时，$D_1 = |a| = a$；当 $n = 2$ 时，

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \stackrel{\Delta}{=} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

当 $n>2$ 时,

$$D_n \stackrel{\Delta}{=} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j} \tag{7}$$

其中数 a_{ij} 为第 i 行第 j 列的元素,

$$A_{ij} \stackrel{\Delta}{=} (-1)^{i+j}M_{ij} \tag{8}$$

称为 a_{ij} 的**代数余子式**, M_{ij} 为由 D_n 划去第 i 行和第 j 列后余下元素构成的 $n-1$ 阶行列式,即

$$M_{ij} \stackrel{\Delta}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{9}$$

称为 a_{ij} 的**余子式**.

例如四阶行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 6 & 7 \\ -3 & -4 & 8 & 0 \\ 9 & -7 & -5 & -6 \end{vmatrix}$$

中,元素 a_{23} 的余子式即为划去第二行和第三列后的三阶行列式

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \\ 9 & -7 & -6 \end{vmatrix}$$

而 a_{23} 的代数余子式即为 M_{23} 前再加一符号因子

$$A_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \\ 9 & -7 & -6 \end{vmatrix}$$

根据定义可以知道任何一个行列式均代表一个数值，而且这个数值可以利用定义由第一行所有元素与其相应的代数余子式乘积之和而求得，通常把这定义简称为按第一行展开.

例 2 计算三阶行列式：

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

解 由定义

$$D_3 = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + (-4)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 4\times(15-6) + 2\times 12 = 72$$

例 3 计算四阶行列式：

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 \\ 7 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & -3 & -5 \end{vmatrix}$$

解 由定义

$$D_4 = 2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 6 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$+(-4)\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}7 & -1 & 0\\ -2 & 6 & 1\\ 8 & 4 & -3\end{vmatrix}$$

$$=2\left\{(-1)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 0\\ -3 & -5\end{vmatrix}+5\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}6 & 1\\ 4 & -3\end{vmatrix}\right\}$$

$$+4\left\{7\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}6 & 1\\ 4 & -3\end{vmatrix}+(-1)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 8 & -3\end{vmatrix}\right\}$$

$$=-834$$

计算此例可以体会到第一行的零元素越多，按第一行展开时计算越方便.

练习 1.1

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix}4 & 1\\ 5 & 6\end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}$

2. 求下列行列式的第二行第三列元素的代数余子式 A_{23}：

(1) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 4 & -3 & 8\\ 0 & -1 & 2\end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & -1\\ 4 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 2 & -1\\ 5 & 0 & 4 & 3\end{vmatrix}$

3. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix}1 & 3 & 5\\ -1 & 4 & 1\\ 2 & -2 & 6\end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix}2 & -1 & 5\\ 3 & 1 & -2\\ 1 & 4 & 6\end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

4. 设

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

(1) 由定义计算 D_4；

(2) 计算 $a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24}$，即按第二行展开；

(3) 计算 $a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} + a_{34}A_{34}$，即按第三行展开；

(4) 按第四行展开.

5. 两个不同阶的行列式可以相加吗？

1.2　行列式的性质

为了应用行列式来处理问题或简化行列式本身的计算，现介绍行列式的性质.

我们把行列式 D 中的行与列按原顺序互换以后的行列式称为 D 的转置行列式，记为 D'.

如

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

则

$$D' = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

性质 1 行列式与其转置行列式相等.

对于二阶行列式可由定义直接验证.

$$D_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$D'_2 = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$D_2 = D'_2$$

至于一般 n 阶行列式则可以用数学归纳法加以证明，此处从略.

这个性质说明对于行列式而言，行与列的地位是相当的，凡是行列式对行成立的性质对列也是成立的. 譬如 n 阶行列式的定义是按第一行展开，由于行与列的地位相当，所以行列式也等于按第一列展开，读者不妨自己验证. 以下行列式的性质仅对行来叙述，但由性质 1，以下所有性质实际上对列同样是成立的.

性质 2 行列式的两行对换，其值变号.

对于二阶行列式可以直接验证.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

两行交换为