应用数学论文集

(1984)

清华大学应用数学系

1985.1.

目录

朱世杰 李善兰恒等式及其推广

栾汝书

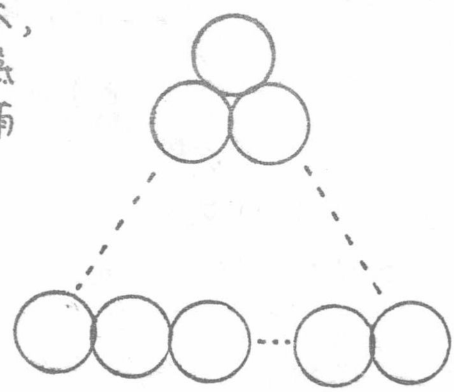
朱世杰，李善兰分别是我国元朝，清末的著名数学家，他们各自给出一个驰名中外的组合恒等式，为我国在组合学方面获得声誉。

一. 朱世杰恒等式

朱世杰恒等式为

$$\binom{m}{m}+\binom{m+1}{m}+\binom{m+2}{m}+\cdots\cdots+\binom{n}{m}=\binom{n+1}{m+1} \qquad (1)$$

朱世杰在研究垛积术[1]问题时得到这个恒等式。所谓"一级垛"是将一些圆木垛成一堆，最上层为一根圆木，第二层为两根，以后每层增加一根，最底层为 n 根圆木（如图），这个一级垛共有圆木数为



$$1+2+3+\cdots\cdots+n$$
$$=\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\binom{3}{1}+\cdots\cdots+\binom{n}{1}$$
$$=\binom{n+1}{2}$$

"二级垛"是每层为一级垛，即各层分别为 $\binom{2}{2}$，$\binom{3}{2}$，……，$\binom{n}{2}$ 根圆木，其总和为

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\cdots\cdots+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{3}$$

同样可定义"三级垛"，"四级垛"，……，对于"n 级垛"，其和就是朱世杰恒等式

$$\binom{m}{m}+\binom{m+1}{m}+\binom{m+2}{m}+\cdots\cdots+\binom{n}{m}=\binom{n+1}{m+1}$$

利用组合等式

$$\binom{K}{l-1}+\binom{K}{l}=\binom{K+1}{l}$$

及 $\binom{m}{m}=\binom{m+1}{m+1}$，我们很容易证明上述恒等式。为了揭示其实际意义，便于进一步推广，我们介绍组合意义的证明。

从 1，2，3，……，$n+1$ 这 $n+1$ 个数中任选出 $m+1$ 个不同的数，共有 $\binom{n+1}{m+1}$ 种选法。任一种选法可表示为

$$1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots\cdots < a_{m+1} \leqslant n+1$$

今按 a_{m+1} 的值 $j+1$ 将这些选法分成类，显然

$$m \leqslant j \leqslant n$$

当 j 固定，这一类的选法其前 m 个数是从 1，2，……，j 中选取的，因此这一类共有选法数为 $\binom{j}{m}$，将 j 从 m 到 n 求出 $\binom{j}{m}$ 的和，就得到总选法数 $\binom{n+1}{m+1}$，即得到等式

$$\sum_{j=m}^{n}\binom{j}{m}=\binom{n+1}{m+1}$$

这就证明了(1)式。

我们可以作一些推广如下：

首先，考虑按所选出的第 $k+1$ 个数 a_{k+1} 的值 $a_{k+1}=j+1$ 将所有选法分类，此时显然应有

$$k \leqslant j \leqslant n+k-m$$

且 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_k$ 应从 1，2，……，j 中选取；$a_{k+2}, a_{k+3}, \cdots\cdots, a_{m+1}$ 应从 $j+2, j+3, \cdots\cdots, n+1$ 中选取，这一类的选法数为 $\binom{j}{k}\binom{n-j}{m-k}$，将各类选法数相加得到总选法数，即

$$\sum_{j=k}^{n+k-m}\binom{j}{k}\binom{n-j}{m-k}=\binom{n+1}{m+1} \qquad (2)$$

当 $k=m$，(2)式化为(1)式，因此(2)式是(1)式的一种推广。

(2)式还可以表示为

$$\sum_{j=r}^{n-s}\binom{j}{r}\binom{n-j}{s}=\binom{n+1}{r+s+1} \qquad (2)'$$

这是一个熟知的恒等式，见[2]中附录中第37式。

从下我们考虑按第 $K+1$，第 $\ell+1$ 个所选取的数的值分类，设

$$a_{K+1}=i+1,\quad a_{\ell+1}=j+1,$$

这里假定 $0\leqslant K<\ell\leqslant m$，$K\leqslant i$，$j-i\geqslant \ell-K$，$m+j\leqslant n+\ell$．这时 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_K$ 应从 $1, 2, \cdots\cdots, i$ 中选取；$a_{K+2}, a_{K+3}, \cdots\cdots, a_\ell$ 应从 $i+2, i+3, \cdots\cdots, j$ 中选取；$a_{\ell+2}, a_{\ell+3}, \cdots\cdots, a_{m+1}$ 应从 $j+2, j+3, \cdots\cdots, n+1$ 中选取，这一类的选法个数为

$$\binom{i}{K}\binom{j-i-1}{\ell-K-1}\binom{n-j}{m-\ell}$$

将各类选法个数相加，得到总的选法个数，即

$$\sum_{i,j}\binom{i}{k}\binom{j-i-1}{\ell-k-1}\binom{n-j}{m-\ell}=\binom{n+1}{m+1} \tag{3}$$

上式中 m, n, K, ℓ 是固定数；i, j 是取值为正整数的变量，(3)式还可表示为下列形式

$$\sum_{p+q+r=N}\binom{p}{a}\binom{q}{b}\binom{r}{c}=\binom{N+2}{a+b+c+2} \tag{3$'$}$$

其中 a, b, C, N 是固定数；p, q, r 是变量．

一般地，(2)$'$，(3)$'$ 还可推广为

$$\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=N}\binom{i_1}{a_1}\binom{i_2}{a_2}\cdots\cdots\binom{i_n}{a_n}=\binom{N+n-1}{A+n-1} \tag{4}$$

其中 $A=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$；$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$，$N$ 是固定数；$i_1, i_2, \cdots\cdots, i_n$ 是变量，(4)式可由数学归纳法证明，当 $n=2$，(4)式化为(2)$'$式，已证明成立，今假定(4)式中和式中因子的个数 $<n$ 的已成立，对于(4)式，

$$\sum_{i_1+\cdots+i_n=N}\binom{i_1}{a_1}\binom{i_2}{a_2}\cdots\cdots\binom{i_n}{a_n}=\sum_{i_1\geqslant a_1}\binom{i_1}{a_1}\left\{\sum_{i_2+\cdots+i_n=N-i_1}\binom{i_2}{a_2}\cdots\binom{i_n}{a_n}\right\}$$

$$=\sum_{i_1\geqslant a_1}\binom{i_1}{a_1}\binom{N-i_1+n-2}{A-a_1+n-2}=\binom{N+n-1}{A+n-1}$$

(4) 式得到证明。

最后，我们从另一种组合意义来考虑所有选法的分类法，按 a_1，a_{m+1} 间所包含数字的个数 j 分类，显然 $m-1\leqslant j\leqslant n-1$，对固定的 j，a_1 可以在 1，2，……，$n-j$ 中选取，当 a_1 选定，$a_{m+1}=a_1+j+1$ 也随之而定，a_2，a_3，……，a_m 的选法个数为 $\binom{j}{m-1}$，因此这一类的选法个数为 $(n-j)\binom{j}{m-1}$，对不同的 j 求选法个数求和，得到

$$\sum_{j=m-1}^{n-1}(n-j)\binom{j}{m-1}=\binom{n+1}{m+1}$$

值得注意的是，这样考虑的结果并没有得到新的内容，它是 (2) 式中 $K=m-1$ 的特例。

二、李善兰恒等式

李善兰恒等式为

$$\binom{n+K}{K}^2=\sum_{j\geqslant 0}\binom{n+2K-j}{2K}\binom{K}{j}^2 \qquad (5)$$

施惠同* 将〔5〕式推广为

$$\binom{n+K}{K}\binom{n+\ell}{\ell}=\sum_{j\geqslant 0}\binom{n+K+\ell-j}{K+\ell}\binom{K}{j}\binom{\ell}{j} \qquad (6)$$

当 $K=\ell$，(6) 式化为 (5) 式。现在我们进一步将 (6) 推广为

$$\binom{n+K}{r}\binom{n+\ell}{S}=\sum_{j\geqslant 0}\binom{n+K+\ell-j}{r+S}\binom{S+K-\ell}{K-j}\binom{r+\ell-K}{\ell-j} \qquad (7)$$

---

*施惠同是清华大学1938年数学系毕业生，于1966年初因病逝世于成都　施惠同恒等式(6)见〔3〕。

当 $r=k$，$s=l$，(7) 式化为 (6) 式，由于(5)、(6)都是(7)式的特例，我们只要证明 (7) 式就可以了。

先介绍两个引理

引理1.
$$\binom{n}{p}\binom{p}{q}=\binom{n}{q}\binom{n-q}{p-q} \qquad (8)$$

证. 这个等式很容易证明，我们给出它的组合意义的证明，左端表示从 n 个人中选出 p 个值班，这 p 个人中选出 q 个值夜班，其余 $p-q$ 个值白班的选法数，等式右端表示先选出值夜班的 q 个人，然后由剩下的 $n-q$ 个人中再选出 $p-q$ 个值白天班的人，显然两种选法的结果是相同的。

引理2.（Vandermonde 恒等式）
$$\binom{n}{m}=\sum_{j\geq 0}\binom{k}{j}\binom{n-k}{m-j} \qquad (9)$$

证. 左端表示从 n 个数中选出 m 个的选法个数，右端表示先将这 n 个数分成两组，一组有 k 个数，另一组是剩下的 $n-k$ 个数，要从这两组选 m 个数，可以按第一组所选个数 j 分类，得到这一类的选法数为 $\binom{k}{j}\binom{n-k}{m-j}$，将各类选法数相加，得到右端和式，这就证明了 (9) 式。

现在我们分别利用 (8)、(9) 两次及三次就可以证明 (7) 式，(7) 式右端

$$\sum_{j\geq 0}\binom{n+k+l-j}{r+s}\binom{s+k-l}{k-j}\binom{r-l-k}{l-j}$$

$$\overset{(9)}{=}\sum_{j\geq 0}\left[\sum_{i\geq 0}\binom{n+k}{s+i}\binom{l-j}{r-i}\right]\binom{s+k-l}{k-j}\binom{r+l-k}{l-j}$$

$$=\sum_{i,j}\binom{n+k}{s+i}\binom{s+k-l}{k-j}\binom{r+l-k}{l-j}\binom{l-j}{r-i}$$

$$\overset{(8)}{=}\sum_{i,j}\binom{n+k}{s+i}\binom{s+k-l}{k-j}\binom{r+l-k}{r-i}\binom{l+i-k}{l-j+i-r}$$

$$=\sum_{i,j}\binom{n+k}{s+i}\binom{r+l-k}{r-i}\binom{s+k-l}{k-j}\binom{l+i+k}{j+r-k}$$

$$=\sum_{i}\binom{n+k}{s+i}\binom{r+l-k}{r-i}\left[\sum_{j}\binom{s+k-l}{k-j}\binom{l+i-k}{j+r-k}\right]$$

$$\overset{(9)}{=}\sum_{i}\binom{n+k}{s+i}\binom{r+l-k}{r-i}\binom{s+i}{r}$$

$$=\sum_{i}\binom{r+l-k}{r-i}\binom{n+k}{s+i}\binom{s+i}{r}$$

$$\overset{(8)}{=}\sum_{i}\binom{r+l-k}{r-i}\binom{n+k}{r}\binom{n+k-r}{s+i-r}$$

$$=\binom{n+k}{r}\sum_{i}\binom{r+l-k}{r-i}\binom{n+k-r}{s+i-r}$$

$$\overset{(9)}{=}\binom{n+k}{r}\binom{n+l}{s}$$

于是(7)式得到证明。

李善兰还利用他的恒等式及朱世杰恒等式得到下列恒等式

$$\sum_{n=0}^{m}\binom{n+k}{k}^2=\sum_{j\geqslant 0}\binom{m+2k+1-j}{2k+1}\binom{k}{j}^2 \qquad (10)$$

证明 $$\sum_{n=0}^{m}\binom{n+k}{k}^2=\sum_{n=0}^{m}\left[\sum_{j\geqslant 0}\binom{n+2k-j}{2k}\binom{k}{j}^2\right]$$

$$=\sum_{j\geqslant 0}\left\{\sum_{n=0}^{m}\binom{n+2k-j}{2k}\binom{k}{j}\right.=\sum_{j\geqslant 0}\binom{m+1+2k-j}{2k+1}\binom{k}{j}^2$$

参考文献

〈1〉 钱宝琮，中国数学史（1964），科学出版社；

（下转21页）

在组合学中常遇到的一个行列式

栾汝书

本文先计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}
\binom{1}{1} & & & & & a_1\\
\binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & a_2\\
\binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & a_3\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
\binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{2} & \binom{n-1}{3} & \cdots\cdots & \binom{n-1}{n-1} & a_{n-1}\\
\binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \cdots\cdots & \binom{n}{n-1} & a_n
\end{vmatrix}$$

然后给出它在组合学中的几个应用。

定理1.

$$D_n=\sum_{K=1}^{n}(-1)^{n+K}\binom{n}{K}a_K \tag{1}$$

证. 将D_n按末列展开，得到

$$D_n=\sum_{K=1}^{n}(-1)^{n+K}a_K\,\Delta_{n,K}\ ,$$

其中

$$\Delta_{n,K}=\begin{vmatrix}
\binom{K+1}{K} & \binom{K+1}{K+1} & & & \\
\binom{K+2}{K} & \binom{K+2}{K+1} & \binom{K+2}{K+2} & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
\binom{n-1}{K} & \binom{n-1}{K+1} & \binom{n-1}{K+2} & \cdots\cdots & \binom{n-1}{n-1}\\
\binom{n}{K} & \binom{n}{K+1} & \binom{n}{K+2} & \cdots\cdots & \binom{n}{n-1}
\end{vmatrix},\quad(1\leqslant K<n)$$

并规定 $\Delta_{n,n}=1$，因此问题化为证明

$$\Delta_{n,K}=\binom{n}{K} \tag{2}$$

当K固定，对n进行数学归纳，当$n=K+1$，$n=K+2$，公式(2)显然成立，假定公式对$K+1$，$K+2$，……，$n-1$成立，对于n，按照$\Delta_{n,K}$的末行展开，并注意$\Delta_{n,K}$是一个$n-K$阶行列式．得到

$$\Delta_{n,K}=\sum_{j=K}^{n-1}(-1)^{(n-K)+(j-K+1)}\binom{n}{j}\Delta_{j,K}$$

$$=\sum_{j=K}^{n-1}(-1)^{n+j+1}\binom{n}{j}\binom{j}{K}.$$

利用等式

$$\binom{n}{j}\binom{j}{K}=\binom{n}{K}\binom{n-K}{j-K}$$

上式化为

$$\Delta_{n,K}=\binom{n}{K}\sum_{j=K}^{n-1}(-1)^{n+j-1}\binom{n-K}{j-K}$$

利用二项式定理

$$\sum_{j=K}^{n}(-1)^{j-K}\binom{n-K}{j-K}=(1-1)^{n-K}=0$$

于是又得到

$$\Delta_{n,K}=\binom{n}{K}(-1)^{n+K-1}\sum_{j=K}^{n-1}(-1)^{j-K}\binom{n-K}{j-K}$$

$$=\binom{n}{K}(-1)^{n+K-1}\left[-(-1)^{n-K}\right]=\binom{n}{K}$$

定理1得到证明．

以下讨论几个问题。

问题1．要考虑n个数字1，2，……，n的排列$a_1a_2\cdots\cdots a_n$，要求$a_i\neq i$，$i=1,2,\cdots\cdots,n$，这个排列的每一个数字与自然排列$12\cdots\cdots n$的相应数字都不同，这样的排列称为n个数字的一个全部紊乱排列（derangement），今求n个数字全部紊乱排列的

个数 $f(n)$，例如 $f(1)=0$，$f(2)=1$，$f(3)=2$。

在一般组合学书中，$f(n)$ 的计标是通过容斥原理，或者通过递推公式

$$f(n)=(n-1)\{f(n-1)+f(n-2)\}$$

的计标得到参改文献[1],[2] 现在我们给出另一种解法，将所有 n 个数字的非自然排列按 $a_i \neq i$ 的数字 i 的个数 r 分类，$2\le r\le n$，对个数 r 的排列的个数为

$$\binom{n}{r}f(r)$$

于是得到递推公式

$$\binom{n}{2}f(2)+\binom{n}{3}f(3)+\cdots\cdots+\binom{n}{n}f(n)=n!-1 \qquad (3)$$

由公式 (3) 可逐次地标出 $f(2)$，$f(3)$，……。以下给出 $f(n)$ 的显式表达式。

将 n 用 2，3，……，n 分别代入 (3) 式，得到 $f(2)$，$f(3)$，…… $f(n)$ 的线性方程组

$$\begin{aligned}
&\binom{2}{2}f(2) &&=2!-1\\
&\binom{3}{2}f(2)+\binom{3}{3}f(3) &&=3!-1\\
&\vdots\\
&\binom{n-1}{2}f(2)+\binom{n-1}{3}f(3)+\cdots\cdots+\binom{n-1}{n-1}f(n-1) &&=(n-1)!-1\\
&\binom{n}{2}f(2)+\binom{n}{3}f(3)+\cdots\cdots+\binom{n}{n-1}f(n-1)+\binom{n}{n}f(n) &&=n!-1
\end{aligned}$$

利用 Cramer 法则，得到

$$f(n)=\begin{vmatrix}
\binom{2}{2} & & & & 2!-1\\
\binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & 3!-1\\
\vdots & & & & \\
\binom{n-1}{2} & \binom{n-1}{3} & \cdots\cdots & \binom{n-1}{n-1} & (n-1)!-1\\
\binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \cdots\cdots & \binom{n}{n-1} & n!-1
\end{vmatrix}$$

由公式(1)，令$a_i = i!-1$，得到

$$f(n)=\sum_{K=1}^{n}(-1)^{n+K}\binom{n}{K}(K!-1) \qquad (4)$$

又

$$\binom{n}{K}(K!-1)=\binom{n}{K}K!-\binom{n}{K}=\frac{n!}{(n-K)!}-\binom{n}{K},$$

(4)式化为

$$f(n)=n!\sum_{K=1}^{n}(-1)^{n+K}\frac{1}{(n-K)!}-(-1)^{n}\sum_{K=1}^{n}(-1)^{K}\binom{n}{K}$$

$$=n!\sum_{K=1}^{n}(-1)^{n+K}\frac{1}{(n-K)!}+(-1)^{n}$$

于是得到

$$f(n)=n!\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{j}}{j!}$$

这是我们熟悉的结果参考文献[1],[2]

<u>推论</u>

$$\begin{pmatrix} \binom{1}{1} & & & & \\ \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & \text{O} & \\ \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & \\ \cdots\cdots & & & \ddots & \\ \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & & \binom{n}{n} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \binom{1}{1} & & & & \\ -\binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & \text{O} & \\ \binom{3}{1} & -\binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & \\ \cdots\cdots & & & \ddots & \\ (-1)^{n+1}\binom{n}{1} & (-1)^{n+2}\binom{n}{2} & (-1)^{n+3}\binom{n}{3} & \cdots & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

也就是　矩阵的第i行第j列元素

$$=\begin{cases} 0, & 当\ j>i \\ (-1)\ \binom{i}{j}, & 当\ j\leqslant i \end{cases}$$

问题2．利用n个不同字母构成一个m位的字，字母可重复，但每一个字母至少要用一次，求满足这样条件的m位字的个数$f(n,m)$，

显然可设$n\leqslant m$，否则$f(n,m)=0$

容易看出$f(2,m)=2^{m}-2$，$f(m,m)=m!$对于一般的$f(n,m)$，我们可以用下列方法计标，将所有n^{m}个m位字按使用不同字母的个数r分类，对于恰用r个字母的m位字的个数为

$$\binom{n}{r}f(r,m)$$

这样就得到等式

$$\binom{n}{1}f(1,m)+\binom{n}{2}f(2,m)+\cdots\cdots+\binom{n}{n}f(n,m)=n^m \quad (5)$$

当 n 分别取 1，2，3，……，我们得到 $f(1,m)$，$f(2,m)$，……$f(n,m)$.

为了得到 $f(n,m)$ 的显式表达式，由(5)得到线性方程组(6)：

$$\begin{cases}\binom{1}{1}f(1,m) & =1^m\\ \binom{2}{1}f(1,m)+\binom{2}{2}f(2,m) & =2^m\\ \vdots & \\ \binom{n-1}{1}f(1,m)+\binom{n-1}{2}f(2,m)+\cdots+\binom{n-1}{n-1}f(n-1,m) & =(n-1)^m\\ \binom{n}{1}f(1,m)+\binom{n}{2}f(2,m)+\cdots+\binom{n}{n-1}f(n-1,m)+\binom{n}{n}f(n,m) & =n^m\end{cases}$$

解这个方程组，得到

$$f(n,m)=\begin{vmatrix}\binom{1}{1} & & & & 1^m\\ \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & 0 & 2^m\\ \vdots & & & & \vdots\\ \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{2} & \cdots & \binom{n-1}{n-1} & (n-1)^m\\ \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & & \binom{n}{n-1} & n^m\end{vmatrix}$$

利用(1)式，又得

$$f(n,m)=\sum_{K=1}^{n}(-1)^{n+K}\binom{n}{K}K^m \quad (7)$$

推论1. $\sum_{K=1}^{n}(-1)^{n+K}\binom{n}{K}K^n=n!$

推论2. $\sum_{K=1}^{n}(-1)^{n+K}\binom{n}{K}K^m$ 是 $n!$ 的倍数，当 $n\leqslant m$.

定理2. 当 $n>m$，

$$\begin{vmatrix}\binom{1}{1} & & & & 1^m\\ \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & 0 & 2^m\\ \vdots & & \ddots & & \vdots\\ \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{2} & \cdots\cdots & \binom{n-1}{n-1} & (n-1)^m\\ \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots\cdots & \binom{n}{n-1} & n^m\end{vmatrix}=0$$

证. 利用方程组，当 $n=m$，我们有

$$\begin{cases}\binom{1}{1}f(1,m) & =1^m\\ \binom{2}{1}f(1,m)+\binom{2}{2}f(2,m) & =2^m\\ \vdots & \vdots\\ \binom{m}{1}f(1,m)+\binom{m}{2}f(2,m)+\cdots+\binom{m}{m}f(m,m) & =m^m\end{cases}$$

当 $n>m$，同样有

$$\binom{n}{1}f(1,m)+\binom{n}{2}f(2,m)+\cdots+\binom{n}{m}f(m,m)=n^m.$$

这些等式表示定理2中的行列式的末列是前m列的线性组合，故行列式的值为0.

推论. 设V是无穷维或n维向量空间，$n>m$，又

$$\alpha_1=\left(\binom{1}{1},\binom{2}{1},\binom{3}{1},\cdots\cdots,\binom{m}{1},\binom{m+1}{1},\cdots\cdots\right),$$

$$\alpha_2=\left(0,\binom{2}{2},\binom{3}{2},\cdots\cdots,\binom{m}{2},\binom{m+1}{2},\cdots\cdots\right),$$

$$\vdots$$

$$\alpha_m=\left(0,\ 0,\ 0,\cdots\cdots,m^m,(m+1)^m,\cdots\cdots\right),$$

$$\beta=\left(1^m,2^m,3^m,\cdots\cdots,m^m,(m+1)^m,\cdots\cdots\right)$$

都是V中的向量，则β就是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_m$的线性组合。

最后，我们考虑与问题类似的一个问题作为本文的结束，用n个不同字母构成m位字，相邻两字母不相同，n个字母都要用到，允许重复使用，求所有n位字的个数$g(n,m)$，显然$2\leq n\leq m$，且$g(n,m)\leq f(n,m)$.

类似问题2，我们可以得到相应的递推公式

$$\binom{n}{2}g(2,m)+\binom{n}{3}g(3,m)+\cdots\cdots+\binom{n}{n}g(n,m)=n(n-1)^{m-1}$$

及

$$g(n.m)=\begin{vmatrix}\binom{2}{2} & & & & 2\cdot1^{m-1}\\ \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & 3\cdot2^{m-1}\\ & & & & \\ \binom{n-1}{2} & \binom{n-1}{3} & \cdots\cdots & \binom{n-1}{n-1} & (n-1)(n-2)^{m-1}\\ \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \cdots\cdots & \binom{n}{n-1} & n(n-1)^{m-1}\end{vmatrix}$$

$$= \sum_{K=2}^{n} (-1)^{n+K} \binom{n}{K} K (K-1)^{m-1}$$

并有相应的结论：

$$\sum_{K=2}^{n} (-1)^{n+K} \binom{n}{K} (K-1)^{n-1} = n!$$

$$\sum_{K=2}^{n} (-1)^{n+K} \binom{n}{K} (K-1)^{m-1} \text{ 是 } n! \text{ 的倍数，当 } n \le m,$$

$$\sum_{K=2}^{n} (-1)^{n+K} \binom{n}{K} (K-1)^{m-1} = 0 \quad \text{当 } n > m.$$

参考文献

〔1〕. H. J. Ryser: Combinatorial Mathematics

〔2〕. D. I. A. Cohen: Basic Techniques of Combinotorial Theory.

（上接38页）

参考文献与资料

〔1〕. J. A. Bondy. V. chvátal, Discrete Math, 15, (1976), 111—135.

〔2〕 Moon J. W. and Moser L., Publ. Math Inst., Hungar, Acad. Sci. 7 (1962), 283—286.

〔3〕 V. Chvátal, J. Comb. Theory, 12. B 1972, 163–168.

〔4〕 Béla Bollobás, Extremal Graph Theory, Academic press, 1978, 167.

有限元误差的数值估计

胡显承

1. 引言

在实际的有限元计算中，常常希望在有限元解的精度做出数值估计，从而能对所采取的剖分和单元做出优劣的评价。对于实现自适应的有限元计算，得到能在一定意义上反映误差的局部性质的数值估计更是必要的。本文目的就是对有限元离散化误差提供一种数值估计。在第2节中，描述了模型问题及其有限元逼近；在第3节中，提出了一种反映误差局部性质的特征量；最后，在第4节中，给出了离散化误差的一种数值估计，这种估计可以用有限元解计算出来。〔1〕中提出了基于有限元解的误差后验估计的基本思想，但无数值估计，〔2〕中仅对一维问题给出了数值估计。本文对二维的一般椭圆型问题给出了数值估计。

2. 模型问题及其有限元逼近

我们考虑二维区域上的二阶椭圆型方程的Dirichlet问题

$$(2.1)\quad \begin{cases} Lu \equiv -\sum_{i,j=1}^{2} \partial_j a_{ij} \partial_i u + \sum_{i=1}^{2} b_i \partial_i u + cu = f & (\text{在}\Omega\text{内}) \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

假定$\Omega \subset R^2$为多边形区域；$a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega)$，$f \in L^2(\Omega)$，且均为分片充分光滑。在系数间断线$\Sigma$上，要求满足

$$(2.2)\quad \frac{\partial u}{\partial n_L}\bigg|_{\Sigma}^{+} = \frac{\partial u}{\partial n_L}\bigg|_{\Sigma}^{-}$$

其中$\frac{\partial u}{\partial n_L} = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\, \partial_i u \cdot n_j$，$(n_1, n_2)$为$\Sigma$的单位法向量。

问题的Galerkin弱形式是

$$(2.3)\quad \begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ a(u,v) = F(v) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$