杨燕均　徐传芳　郑庆玉　主编

GAILÜLUNYUSHULITONGJI

概率论与数理统计

济南出版社

概率论与数理统计

杨燕均 徐传芳 郑庆玉 主编

济南出版社

1989年·济南

概率论与数理统计

杨燕均 徐传芳 郑庆玉 主编

*

济南出版社出版发行

(山东省济南市经二路182号)

山东师范大学印刷厂印刷

*

850×1168毫米 32开本 12.5印张 302千字

1989年11月第1版 1989年11月第1次印刷

印数:1—10,000册

ISBN7—80572—091—6/O·1

定价：3.80元

前　言

概率统计是研究随机现象统计规律性的数学学科。它理论严谨，应用广泛，发展迅速，已成为数学领域中一个很有特色的分支。它的理论和方法广泛应用于工业、农业、国防和科学技术中，并且不断向各个领域渗透。在理论联系实际方面，概率统计是最活跃的数学分支之一。

本教材是根据国家教委最新颁布的师范专科学校《概率论与数理统计》教学大纲编写的。考虑到师专的特点，我们在内容上选择了一些最基本的理论和某些应用较广的方法。力求通俗易懂而又不失严谨性，以便使读者了解和掌握处理随机现象的基本理论和方法，为从事中学数学教学和进一步的学习奠定基础。

本教材由二十所师专、教育学院和电大的部分教师参加编写。主编：杨燕均、徐传芳、郑庆玉；副主编：董毅、冯强、任怀廷；编委（按姓氏笔划为序）：孙世明、刘金岭、巩建闽、花文秀、李冬梅、李怀群、杜庆坤、张忠义、肖起予、周建华、季桂林、赵彦珠、施美容、徐传胜、高京广、郭斌彩、董超、虞筱宁、裴道武。

由于水平所限，书中缺点和错误一定不少，欢迎批评指正。

编　者

1989年7月

内 容 提 要

本书是根据国家教委最新颁布的师范专科学校《概率论与数理统计》教学大纲编写的一部教材.内容紧扣大纲，取舍得当，自成体系、并配有大量的例题和习题，可作为师专、电大、教育学院及专科函授等数学专业的教材，也可作其它有关专业的教学参考书和自学参考书.其主要内容包括:随机事件和概率、随机变量及分布、随机变量的数字特征、大数定率、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析，教育测量与统计等.

本书考虑到师专特点，避免涉及实变函数、复变函数、测度论等理论，读者只要掌握数学分析和高等代数课程的内容，就可顺利阅读全书.

目　录

第一章　随机事件和概率

§1　样本空间和随机事件

一、随机现象

自然界与人类社会中有许多现象，我们完全可以预言它们在一定的条件下是否会发生。例如："在没有外力作用的条件下，作匀速直线运动的物体必然继续作匀速直线运动"；"在欧几里得几何学中，三角形的三内角之和必为180°"；"傍晚，太阳必从西方落下"等等是一定会发生的，而上述现象的反面，即"在不受外力作用的条件下，作匀速直线运动的物体改变其匀速直线运动的状态"；"在欧氏几何学中，三角形三内角之和不等于180°"；"傍晚，太阳不从西方落下"等等必然不会发生。所有这些现象，我们称之为确定性现象或必然现象。

但是在自然现象与社会现象中也广泛存在与必然现象有着本质差异的另一类现象：往桌面上投一枚均匀硬币，可能正面向上也可能反面向上，而且在投掷前不能预先断言一定哪一个面向上；从含有一定个数次品的一批产品中任意取出3件，取到次品的件数可能是0，1，2，3；一门炮对一目标射击，尽管经过瞄准，炮弹却可能落在目标附近的各个位置；新生婴儿可能是男或女。

总之，所列这些现象的一个共同特点是：它是事前不可预言的，即在相同条件下重复进行试验，每次结果未必相同，或是知道它过去的状况，在相同的条件下未来的发展事前却不能

完全肯定。这一类现象，我们称之为偶然性现象或随机现象。

二、随机试验

我们约定“一定条件的实现”称之为试验，用E表 示之，先看下面例：

E_1：将一枚硬币抛二次，观察正反面出现的情况；

E_2：将一枚硬币抛三次，记录正面出现的次数；

E_3：将一颗骰子掷二次，记录出现的点数和；

E_4：记录某电话交换台一分钟内接到的呼唤次数；

E_5：一射手进行射击，直到击中目标为止，观察 其射 击情况；

E_6：在一 批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命。

上面列举了6个试验的例子，这些例子都具有以下特性：

（1）可以在相同的条件下重复地进行；

（2）每次试验中可以出现不同的结果，而究竟出现哪一个结果，试验前不能预先断言；

（3）试验中的一切可能结果是事先已知的，并假定在一次试验中必有其中一个结果出现（因为它们是一切 可 能 的 结果），且仅有其中一个结果出现（这表示它们中的任何两个都不能同时发生）。我们把具有上述三个特性的试验称为随机试验，简称试验。由此可见，随机试验就是对随机现象的观察。而随机现象就是随机试验的观察对象。

二、样本空间

我们把根据观察要求所确定的随机试验E的每一个可能 发生的直接结果，叫做一个样本点（或一个基本事件）。也就是说，随机试验E的最简单 不可分解的结果，叫做样本点（或基本事件），其特点是：每次试验必发生一个而且只能发生一个样本点，任何两个样本点都不能同时发生，作为例子，下面分别考察E_1，E_2中的样本点。

例1　在E_1中，抛两次硬币是一次试验（注意：并非两次试验）。因此这一试验可能发生的结果有4个：（正，正），（正，反），（反，正），（反，反）。记号（正，正）表示{第一次出现正面，第二次出现正面}，其余类此，所以试验E_1的样本点分别为（正，正），（正，反），（反，正），（反，反）。

例2　在E_2中，将一枚硬币抛三次是一次随机试验。试验的内容是记录正面发生的次数，因此，抛三次硬币均未出现正面，即出现正面数是0；恰出现1次正面；恰出现2次正面；出现3次正面，是这一试验可能发生的四种直接结果，所以，试验E_2的样本点分别是0，1，2，3。

随机试验E的所有样本点组成的集合，称为E的**样本空间**，记为Ω。Ω中的元素，即样本点，记为ω。有$\omega \in \Omega$。

仿照对E_1、E_2的讨论，可写出二中试验E_k（$1 \leqslant K \leqslant 6$）的样本空间$\Omega_k$（$1 \leqslant K \leqslant 6$）。

Ω_1：{（正，正），（正，反），（反，正），（反，反）}；

Ω_2：{0，1，2，3}；

Ω_3：{2，3，4，…，11，12}；

Ω_4：{0，1，2，…}

Ω_5：{+，−+，−−+，…}；其中“+”表示击中，“−”表示未击中。

Ω_6：{t：$t \geqslant 0$}。

注意：样本空间中的样本点是由试验的内容所确定的。例如，在试验E_1中，若试验的要求是记录出现正面的次数，则样本空间不再是Ω_1了，而是{0，1，2}；又如，在E_3中，若试验的内容是观察出现的点数的情况，则样本空间亦不是Ω_3了，而是{（1，1），（1，2），（1，3），（1，

4），（1，5），（1，6），…，（6，1），（6，2），（6，3），…，（6，6）} 有36个样本点。

四、随机事件

我们把随机现象的表现，也就是随机试验的结果，称为**随机事件**，简称为**事件**，一般用大写字母A、B、C等表示。事件有**样本点**与**复合事件**之分。所谓复合事件是由两个或两个以上的样本点组合而成的事件。例如，在E_2中{出现正面次数小于3}是一个复合事件，它是由{出现0次正面}，即{三次中均未出现正面}、{恰出现1次正面}、{恰出现2次正面}这三个样本点组合而成的事件，当且仅当这三个样本点中有一个发生，{出现正面次数小于3}这一事件发生。又如，在E_3中{掷两次骰子，点数和是偶数}也是一个复合事件，它是由{点数和为2}、{点数和为4}、…、{点数和为12}等6个样本点组合而成的。

在试验中，如果事件A中所包含的某一个样本点ω发生，则称为A发生，记为$\omega\in A$。因为试验E的样本空间Ω包含了E的全体样本点，而随机事件是具有某种特征的样本点的组合。所以，从这个意义上讲，一个随机事件正好是样本空间Ω的一个子集。例如，在E_3中，设A＝{点数和为偶数}，则A＝{2，4，6，8，10，12}显然，A是Ω_3的子集。又如，在E_1中，设A_1＝{第一次出现正面}，A_2＝{两次出现同一面}，A_3＝{只有一次出现正面}则A_1＝{（正，正），（正，反）}，A_2＝{（正，正），（反，反）}，A_3＝{（正，反），（反，正）}。显见，A_1，A_2，A_3都是Ω_1的子集。

在每次随机试验中一定会发生的事件，称为**必然事件**。因为Ω是由所有样本点所组成，因而在每一次试验中，必然要发生Ω中的某一样本点ω，即$\omega\in\Omega$，也就是说，在试验中Ω必

然会发生，所以，又用Ω表示必然事件。在任何一次试验中都不会发生的事件是不可能事件，以ϕ表示之。例如，在E_3中，｛点数和不大于12｝是必然事件；｛点数和为13｝是不可能事件。必然事件和不可能事件本来没有不确定性，也就是说，它们不是随机事件。但为了今后讨论方便起见，我们把它们当作随机事件的极端情形来处理。

五、事件的关系和运算

一个样本空间Ω中，可以有很多的随机事件。为了研究随机试验的规律，需要研究事件之间的关系和运算。我们约定，今后对事件的研究是在确定的试验下进行的，且样本空间Ω及Ω中的一些事件已经给定。

1．包含关系："若事件A发生必然导致事件B发生"，则称事件B包含事件A。记为$B\supset A$或$A\subset B$。

例如，在E_3中，设A＝｛点数和为4，6｝，B＝｛点数和为偶数｝，事件A发生必然导致事件B发生。所以$A\subset B$。又如，在考察某动物的寿命试验中，设A＝｛某种动物活到10岁｝，B＝｛某动物活到15岁｝，因为｛若某动物活不到10岁｝必然导致｛某动物活不到15岁｝，所以｛某动物活到15岁｝必然导致｛某动物活到10岁｝即$B\subset A$。

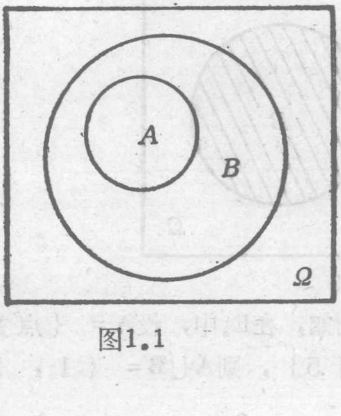

图1.1

包含关系的直观解释如图1.1。

容易理解$A\subset B$的充要条件是若$\omega\in A\Rightarrow\omega\in B$

因为不可能事件ϕ不含有任何ω。所以我们约定对于任一事件A有$\phi\subset A$

2．相等关系："若$A\subset B$，$B\subset A$同时成立"，则称事件A与B相等。

例如，在E_3中，设A＝｛点数和为2，4，6，8，10，12｝，B＝｛点数和为偶数｝，显然，$A\subset B$，$B\subset A$，所以，A＝B。可见，相等的事件由完全相同的样本点组成。

3．事件的和："两事件A与B中至少有一个发生"的事件，称为事件A与B的和（或并），记为$A\cup B$。它的直观解释如图1.2或图1.3

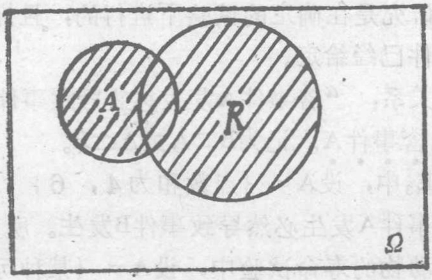

图1.2

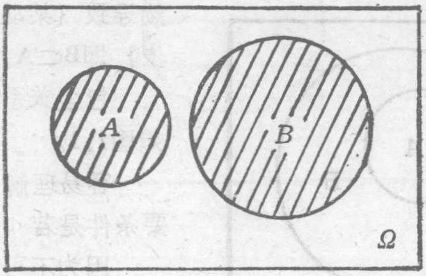

图1.3

图中阴影部分是$A\cup B$。例如，在E_3中，设A＝｛点数和为偶数｝，B＝｛点数和不大于5｝，则$A\cup B$＝｛1，2， 3，4，5，6，8，10，12}

事件和的概念可推广为事件有限个的情形。若用A记“事件A_1，A_2，…，A_n中至少有一个发生”这一事件，则称事件A为事件A_1，A_2，…，A_n的和，记为$A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$

还可推广可列无穷的情形。若用B记“事件B_1，B_2，…，B_n，…中至少有一个发生”这一事件，则称事件B为事件B_1，B_2，…，B_n，…的和，记为$B=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i$。

4．事件的积：“两事件A与B同时发生”这一事件称为事件A与B的积（或交）记为$A\cap B$或AB。

例如，在E_3中，若A，B同上，则

$A\cap B=\{2, 4\}$

事件的积直观解释如图1.4所示

易得　$A\cap A=A$，

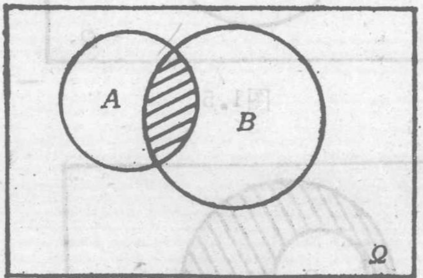

图1.4

$A\cap\Omega=A$，　　　　$A\cap\phi=\phi$

$A\cap B\subset A$，　　　　$A\cap B\subset B$

事件的积的概念可推广为有限个及可列无穷的情形“事件A_1，A_2，…，A_n同时发生”这一事件，称为事件A_1，A_2，

…，A_n的积，记为$\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$或$\prod\limits_{i=1}^{n} A_i$；

"事件A_1，A_2，…，A_n，…，同时发生"这一事件，称为事件A_1，A_2，…的积，记为$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 或 $\prod\limits_{i=1}^{\infty} A_i$。

5．事件的差："事件A发生而事件B不发生"这事件称为**事件A与B的差**。记为$A-B$。

例如，在E_3中，若A，B同上，则

$$A-B=\{6,\ 8,\ 10,\ 12\}$$

其直观解释如图1.5；图1.6

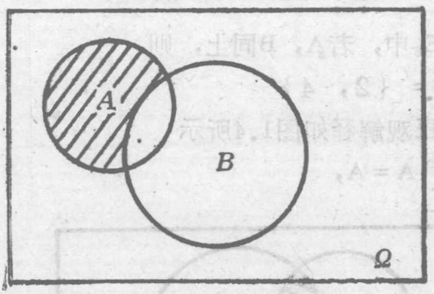

图1.5

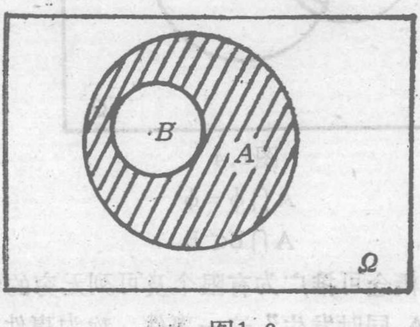

图1.6

显然，$A-A=\phi$，$A-\phi=A$

$A-\Omega=\phi$。

6．互斥事件："两事件A与B不能同时发生"，即$A\cap B=\phi$，则称A与B是互斥的（或互不相容）

例如，在E_3中，设A＝{点数和为偶数}，B＝{点数和为3，5}，则A与B不能同时发生，即$A\cap B=\phi$，所以A与B互斥

其直观解释如图1.7。

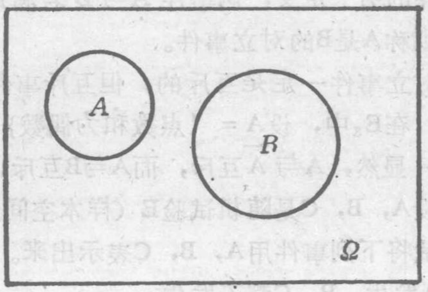

图1.7

若n个事件中，任意两个事件都互斥，则称这n个事件彼此互斥，或称这n个事件两两互斥。任一随机试验的样本点是两两互斥的。

7．对立事件："Ω与A之差"，即$\Omega-A$这一事件称为A的对立事件，或称A的逆事件。记为$\overline{A}$。

例如，在E_3中，若A＝{点数和为偶数} 则$\overline{A}=\Omega_3-A$＝{点数和为奇数}

其直观解释如图1.8

显然 $\overline{\Omega}=\phi$，$\overline{\phi}=\Omega$

$\overline{\overline{A}}=A$，$A\subset B$的充要条件是$\overline{B}\subset\overline{A}$

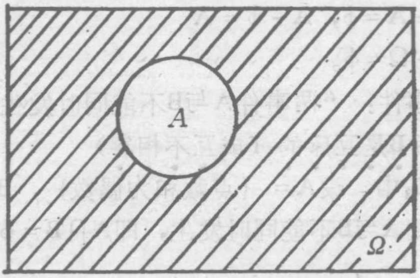

图1.8

对立事件的另一定义：两事件 A与 B 若满足 $A\bigcup B=\Omega$，$A\bigcap B=\phi$，则称A是B的对立事件。

注意：对立事件一定是互斥的，但互斥事件未必是对立事件。例如，在E_3中，设A＝｛点数和为偶数｝，B＝｛点数和为3，5｝显然，A与$\bar{A}$互斥，而A与B互斥，但不对立。

例1　设A，B，C是随机试验E（样本空间为Ω）的三个随机事件，试将下列事件用A，B，C表示出来。

（1）A发生，B、C都不发生；

（2）A、B都发生，而C不发生；

（3）三事件都发生；

（4）三个事件中至少一个发生；

（5）三个事件都不发生；

（6）不多于一个事件发生；

（7）不多于二个事件发生；

（8）三个事件至少两个发生；

（9）恰有一个事件发生；

（10）恰有两个事件发生。

解：（1）$A\bar{B}\bar{C}$或$A-B-C$　注意：不是ABC；

（2）$AB\bar{C}$ 或$AB-C$；