序信息系统与粗糙集

徐伟华　著

科学出版社

序信息系统与粗糙集

徐伟华 著

科学出版社

内 容 简 介

本书系统地介绍序信息系统与粗糙集的基本理论、方法，以及国内外最新的研究成果. 主要介绍序信息系统的不确定性度量、属性约简理论、变精度序信息系统、区间值序信息系统、集值序信息系统以及直觉模糊序信息系统的粗糙集理论与方法；同时从粒计算的角度给出了序信息系统、模糊序信息系统的多粒化粗糙集模型，以及加权多粒化粗糙集模型的理论与方法.

本书可作为应用数学、计算机科学、管理科学、自动控制等专业的高年级本科生及研究生的教材，也可作为研究粗糙集、模糊集理论与方法的科技人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

序信息系统与粗糙集/徐伟华著. —北京：科学出版社，2013
ISBN 978-7-03-038208-5

I. ①序…　II. ①徐…　III. ①模糊集理论　IV. ①O159

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013) 第 172956 号

责任编辑：徐园园　赵彦超 / 责任校对：韩　杨
责任印制：钱玉芬 / 封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2013 年 8 月第　一　版　开本：B5(720 × 1000)
2013 年 8 月第一次印刷　印张：14
字数：270 000

定价：59.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

随着计算机技术与网络信息技术的飞速发展, 各个领域的信息与数据急剧增加, 同时各种电子设备的大量使用, 人们收集数据的能力极大增强. 由于人类的参与, 数据与信息的不确定性更加显著, 信息与数据的关系更加复杂. 研究发现, 如果采取适当的方法和技术, 就可以从海量数据中挖掘出更多更有用的信息、知识, 这些知识可以形成预测和分类模型, 最终提供给决策支持系统. 知识发现就是专门描述这些方法和技术的一个学科分支.

知识发现一直是人工智能的核心问题. 在知识发现的众多方法中, 粗糙集 (Rough Set, RS) 方法对于处理复杂信息系统是一种非常有效的方法. 该理论是由波兰数学家 Pawlak 于 1982 年提出, 是进行数据分析的一种数学工具, 是经典集合论的又一推广形式, 其主要思想是在保持分类能力不变的前提下, 通过属性约简导出问题的决策或分类规则. 国内对粗糙集理论的研究开始于 20 世纪 90 年代中期. 目前, 许多高校和科研单位相继开展了粗糙集的基础理论及应用研究, 曾黄麟、王国胤、刘清、张文修、吴伟志、梁吉业、米据生、陈德刚、李德玉、史开泉、胡寿松、王长忠等一批学者先后出版了关于粗糙集理论的专著, 而且在粗糙集领域已有数百篇论文. 这些工作表明我国粗糙集理论科研工作者在该领域取得了很大的进步.

当然粗糙集的应用不仅限于知识发现领域, 粗糙集理论已经在医疗诊断、故障检测、股票数据分析、地震预报、模式识别、信息系统分析、决策支持与分析及智能控制等领域得到了广泛的应用. 经过计算机科学家和数学家多年的不懈研究, 粗糙集在理论上不断完善, 在应用上广泛拓展. 粗糙集理论已成为数学、信息科学、系统工程等专业中最为活跃的研究领域之一.

在实际问题中, 有许多信息系统由于各种原因是基于优势关系的, 即人们面临的是序信息系统. 例如, 在一个项目投资方案决策问题中, 决策者一般希望备选方案的投资成本越低越好, 而投资回报率越高越好. 这时, 偏好属性的顺序特性是很重要的决策信息, 但传统的粗糙集理论对此却无能为力. 为此, Greco, Matarazzo 以及 Slowinski 对此提出了非常有价值的观点, 将原来的粗糙集理论拓展到了序信息系统, 即通常所说的 DRSA(Dominance-Based Rough Sets Approaches). 后来也有不少学者对这一问题进行了大量的研究, 并且取得了相当的成绩. 要想从这种复杂的不协调序信息系统中获取简洁的不确定性命题, 就必须对该系统进行知识发现. 因此, 对于序信息系统知识发现的研究是非常有意义的.

基于上述出发点, 本书以序信息系统的知识发现为研究对象, 以粗糙集理论为工具, 集中介绍了序信息系统的不确定性度量、属性约简理论、变精度序信息系统、区间值序信息系统、集值序信息系统以及直觉模糊序信息系统的粗糙集理论与方法; 同时也给出了多粒化序信息系统、加权多粒化序信息系统以及模糊多粒化序信息系统等新的理论与方法. 本书研究内容为解决序信息系统知识发现、不确定决策分析以及规则获取等问题提供了有利工具.

本书反映了序信息系统知识发现在粗糙集方法方面国内外的最新研究动态, 书中许多内容是作者的最新研究成果, 部分研究结果尚未正式发表, 其中第 5 章和第 6 章为山西大学钱宇华教授的研究成果, 在此特别表示感谢. 此外, 借本书出版之际, 感谢西安交通大学张文修教授、江苏科技大学杨习贝教授以及各位师兄弟 (姐妹) 等对本书提出的宝贵意见. 同时也感谢研究生张先韬、王巧荣、刘玉锋、孙文鑫、庞晋中、罗术群等对本书提出的宝贵意见以及在整理本书过程中付出的辛勤劳动.

本书有关研究成果得到了国家自然科学基金项目 (项目编号: 61105041)、重庆市自然科学基金项目 (项目编号: cstc2011jjA40037)、重庆市教委科技项目 (项目编号: KJ120805), 以及重庆理工大学优秀学术著作出版基金的资助, 在此一并表示感谢.

由于作者才疏学浅, 书中难免有疏漏与不妥之处, 还望读者批评指正.

徐伟华

2012 年 9 月于重庆

符号说明

U	有限非空论域
$P(U)$	集合 U 的幂集
$F(U)$	集合 U 的全体模糊子集
$\sim X$	集合 X 的补集
$\lvert X\rvert$	集合 X 的基数
$\mathcal{I}^{\succcurlyeq}=(U,AT,F)$	序信息系统
$\mathcal{I}^{\succcurlyeq}=(U,AT,F,D,G)$	决策序信息系统
$R_B^{\succcurlyeq}$	属性集 B 上的优势关系
$R_B^{\preccurlyeq}$	属性集 B 上的劣势关系
$[x]^{\succcurlyeq}$	对象 x 关于优势关系 $R^{\succcurlyeq}$ 的优势类
$U/R^{\succcurlyeq}$	对象 x 关于优势关系 $R^{\succcurlyeq}$ 的优势类全体
$\overline{R^{\succcurlyeq}}(X)$	集合 X 关于优势关系 $R^{\succcurlyeq}$ 的上近似
$\underline{R^{\succcurlyeq}}(X)$	集合 X 关于优势关系 $R^{\succcurlyeq}$ 的下近似
$GK(R^{\succcurlyeq})$	知识 $R^{\succcurlyeq}$ 的粒度
$\mathrm{Dis}(R^{\succcurlyeq})$	知识 $R^{\succcurlyeq}$ 的分辨度
$E(R^{\succcurlyeq})$	知识 $R^{\succcurlyeq}$ 的信息熵
$E_r(R^{\succcurlyeq})$	知识 $R^{\succcurlyeq}$ 的粗糙熵
$G(R^{\succcurlyeq})$	知识 $R^{\succcurlyeq}$ 的不确定度量
$\rho_A(X)$	集合 X 的粗糙度
$\mu_A(x)$	对象 x 的分布函数
$\gamma_A(x)$	对象 x 的最大分布函数
$\sigma_A(x)$	对象 x 的分配函数
$\delta_A(x)$	对象 x 的部分一致函数
$\mathrm{Dis}_{\succcurlyeq}(x_i,x_j)$	对象 x_i 与 x_j 的可辨识属性集
$\mathbf{Dis}_{\succcurlyeq}$	可辨识矩阵
$\underline{B^{\succcurlyeq}}_{\beta}(X)$	集合 X 关于 $B^{\succcurlyeq}$ 的 β-优势下近似
$\overline{B^{\succcurlyeq}}_{\beta}(X)$	集合 X 关于 $B^{\succcurlyeq}$ 的 β-优势上近似
$\mathcal{D}_A(x_i,x_j)$	对象 x_i 与 x_j 关于优势关系 $R_A^{\succcurlyeq}$ 的优势度
$\mathcal{D}_A(x)$	对象 x 的整体优势度
$\mathrm{Bel}(X)$	论域 U 上的信任函数

$\mathrm{Pl}(X)$	论域 U 上的似然函数
$m(X)$	论域 U 上的 mass 函数
$S_X^{P_i}(x)$	对象 x 依 P_i 对 X 的支持特征函数
$\rho(P,X)_\beta^\omega$	集合 X 关于 P 的 β-粒化加权粗糙度
$\underline{OM^{\succcurlyeq}_{\sum_{i=1}^{s} A_i}(X)}$	乐观多粒化的下近似
$\overline{OM^{\succcurlyeq}_{\sum_{i=1}^{s} A_i}(X)}$	乐观多粒化的上近似
$\underline{PM^{\succcurlyeq}_{\sum_{i=1}^{s} A_i}(X)}$	悲观多粒化的下近似
$\overline{PM^{\succcurlyeq}_{\sum_{i=1}^{s} A_i}(X)}$	悲观多粒化的上近似

目录

第 1 章　粗糙集与序信息系统

粗糙集[117−123] 是由波兰数学家 Pawlak 提出的处理不精确、不完全数据的理论, 他主要依据对象之间的不可分辨性将论域中的对象聚类成基本知识, 利用基本知识通过上、下近似运算来描述数据对象的不确定性, 再由它导出概念的分类或决策规则. 目前, 粗糙集理论已应用到多个领域[1−3,7−11,13,16,18,19,22,167], 粗糙集理论的推广, 也取得了丰硕的成果[61,72,89−95,152,159,182,184,217,268]. 在保持分类能力不变的前提下, 通过属性约简来简化基本知识和决策规则. 为了后续章节叙述方便, 本章将给出有关粗糙集与序信息系统的基本概念.

1.1　粗糙集的基本概念

设 U 为研究对象的全体, 称为论域, 在实际应用中论域通常是有限集, 称为有限论域, 记为 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, 本书讨论的所有论域均为有限论域.

定义 1.1　设 R 是 U 上的等价关系, 称二元组 (U,R) 为 Pawlak 近似空间.

对于任意的 $x_i\in U$, 对象 x 关于 R 的等价类为

$$[x_i]_R=\{x_j\in U\mid (x_i,x_j)\in R\},$$

记 $U/R=\{[x]_R|x\in U\}$, 则 U/R 构成 U 的一个划分.

定义 1.2　设 $\mathbf{R}$ 为 U 上的等价关系族, 称 $\mathbf{K}=(U,\mathbf{R})$ 为一个知识库. 若 $\mathbf{P}\subseteq\mathbf{R}$ 且 $\mathbf{P}\neq\varnothing$, 则 $\mathbf{P}$ 中所有等价关系的交集 $\cap\mathbf{P}$ 也是一等价关系, 称 $\cap\mathbf{P}$ 为 U 上的不可区分关系, 记作 $\mathrm{Ind}(\mathbf{P})$, 且有

$$[x]_{\mathrm{Ind}(\mathbf{P})}=\bigcap_{R\in\mathbf{P}}[x]_R.$$

一般地, 子集 $X\subseteq U$ 称为 U 中的一个概念, 当 X 是 R 的某些等价类的并时, 称 X 关于 R 是可定义的或精确的, 否则称 X 关于 R 是不可定义的或粗糙的.

每一个不确定概念可由一对称为上近似和下近似的精确概念来表示. 下面给出上、下近似的定义.

定义 1.3[117]　设 U 为论域, R 是 U 上的一个等价关系, 对于任意的 $X\subseteq U$, 记

$$\underline{R}(X)=\{x\in U|[x]_R\subseteq X\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \cup\{[x]_R | [x]_R \subseteq X\}; \\
\overline{R}(X) &= \{x \in U | [x]_R \cap X \neq \varnothing\} \\
&= \cup\{[x]_R | [x]_R \cap X \neq \varnothing\},
\end{aligned}
$$

称 $\underline{R}(X)$ 为 X 的 R- 下近似, $\overline{R}(X)$ 为 X 的 R- 上近似, 简称下近似和上近似.

另外, 记

$$
\begin{aligned}
\mathrm{bn}_R(X) &= \overline{R}(X) - \underline{R}(X); \\
\mathrm{pos}_R(X) &= \underline{R}(X); \\
\mathrm{neg}_R(X) &= U - \overline{R}(X),
\end{aligned}
$$

称 $\mathrm{bn}_R(X), \mathrm{pos}_R(X)$ 和 $\mathrm{neg}_R(X)$ 分别为 X 关于 R 的边界域, 正域和负域.

定义 1.4　设 U 为论域, R 是 U 上的一个等价关系, 若 $\underline{R}(X) = \overline{R}(X)$, 则称 X 为精确集. 否则称 X 为粗糙集, 有时简称粗集.

显然, 粗糙集 X 关于 R 的边界域, 正域和负域构成了 U 的划分, 它们彼此交集为空集, 且

$$
U = \mathrm{bn}_R(X) \cup \mathrm{pos}_R(X) \cup \mathrm{neg}_R(X).
$$

由上定义可知下面结论成立.

定理 1.1　设 (U, R) 为 Pawlak 近似空间, 若 $X, Y \subseteq U$, 则有

(1L)　$\underline{R}(X) \subseteq X$,　(下近似的收缩性)

(1U)　$X \subseteq \overline{R}(X)$,　(上近似的扩张性)

(2)　$\underline{R}(\sim X) = \sim \overline{R}(X)$,　(上、下近似的对偶性)

　　$\overline{R}(\sim X) = \sim \underline{R}(X)$,　(上、下近似的对偶性)

(3L)　$\underline{R}(\varnothing) = \varnothing$,　(下近似的正规性)

(3U)　$\overline{R}(\varnothing) = \varnothing$,　(上近似的正规性)

(4L)　$\underline{R}(U) = U$,　(下近似的余正规性)

(4U)　$\overline{R}(U) = U$,　(上近似的余正规性)

(5L)　$\underline{R}(X \cap Y) = \underline{R}(X) \cap \underline{R}(Y)$,　(下近似的可乘性)

(5U)　$\overline{R}(X \cup Y) = \overline{R}(X) \cup \overline{R}(Y)$,　(上近似的可加性)

(6L)　$\underline{R}(X \cup Y) \supseteq \underline{R}(X) \cup \underline{R}(Y)$,　(下近似的弱可加性)

(6U)　$\overline{R}(X \cap Y) \subseteq \overline{R}(X) \cap \overline{R}(Y)$,　(上近似的弱可乘性)

$$
\begin{array}{lll}
(7\text{L}) & X \subseteq Y \Rightarrow \underline{R}(X) \subseteq \underline{R}(Y), & (\text{下近似的单调性}) \\
(7\text{U}) & X \subseteq Y \Rightarrow \overline{R}(X) \subseteq \overline{R}(Y), & (\text{上近似的单调性}) \\
(8\text{L}) & \underline{R}(\underline{R}(X)) = \underline{R}(X), & (\text{下近似的幂等性}) \\
(8\text{U}) & \overline{R}(\overline{R}(X)) = \overline{R}(X), & (\text{上近似的幂等性}) \\
(9\text{L}) & \underline{R}(\sim \underline{R}(X)) = \sim \underline{R}(X), & (\text{下近似的补性}) \\
(9\text{U}) & \overline{R}(\sim \overline{R}(X)) = \sim \overline{R}(X), & (\text{上近似的补性}) \\
(10\text{L}) & \forall K \in \mathcal{C}, \underline{R}(K) = K, & (\text{下近似的颗粒性}) \\
(10\text{U}) & \forall K \in \mathcal{C}, \overline{R}(K) = K, & (\text{上近似的颗粒性})
\end{array}
$$

其中, $\mathcal{C}$ 表示 U 在 R 下所有可定义集的全体.

需要指出的是: 如果 R 是 U 的一般二元关系, 记

$$
\begin{aligned}
\underline{R}(X) &= \{x \in U | [x]_R \subseteq X\}; \\
\underline{R}(X)' &= \cup\{[x]_R | [x]_R \subseteq X\}; \\
\overline{R}(X) &= \{x \in U | [x]_R \cap X \neq \varnothing\}; \\
\overline{R}(X)' &= \cup\{[x]_R | [x]_R \cap X \neq \varnothing\},
\end{aligned}
$$

则 $\underline{R}(X) = \underline{R}(X)'$ 和 $\overline{R}(X) = \overline{R}(X)'$ 一般不成立. 事实上, 有如下定理.

定理 1.2 若 R 是 U 上的一般二元关系, 则对于任意的 $X \subseteq U$,

$$
\underline{R}(X) = \underline{R}(X)' \text{ 且 } \overline{R}(X) = \overline{R}(X)'
$$

当且仅当 R 是等价关系.

概念的不确定性是由于边界的存在而引起的. 概念的边界越大, 其精确程度越低. 为了更准确地表达这一点, Pawlak 引入了精度的概念.

定义 1.5 设 (U, R) 为 Pawlak 近似空间, $X \subseteq U$, 其上、下近似分别为 $\overline{R}(X), \underline{R}(X)$, 记

$$
\alpha_R(X) = \frac{|\underline{R}(X)|}{|\overline{R}(X)|},
$$

称 $\alpha_R(X)$ 为 X 在近似空间 (U, R) 中的精度, 记

$$
\rho_R(X) = 1 - \alpha_R(X),
$$

称 $\rho_R(X)$ 为 X 在近似空间 (U, R) 中的粗糙度.

精度 $\alpha_R(X)$ 反映了集合 X 在关系 R 下知识的确定程度, 粗糙度 $\rho_R(X)$ 则反映了 X 在关系 R 下知识的不确定程度. 显然, 下面定理成立.

定理 1.3　对于 U 上任意等价关系 R, $X \subseteq U$, 下面结论成立.

(1) $0 \leqslant \alpha_R(X) \leqslant 1$.

(2) $\alpha_R(X) = 1$ 当且仅当 $\overline{R}(X) = X = \underline{R}(X)$, 即 X 为一个可定义集.

(3) $\alpha_R(X) < 1$ 当且仅当 $\overline{R}(X) \neq \underline{R}(X)$, 即 X 为一个不可定义集.

由定理 1.3 可以看出, $\alpha_R(X)$ 越大时 $\rho_R(X)$ 越小, 则 X 关于 R 越精确, 不确定性越小; $\alpha_R(X)$ 越小时 $\rho_R(X)$ 越大, 则 X 关于 R 越粗糙, 不确定性越大.

1.2　序信息系统的基本概念

信息系统是粗糙集理论中对知识进行表达的基本工具. 它具有广泛的适用性[32,76]. 信息系统通常可以直观地表达为一个二维表的形式, 行表示论域中的对象, 列表示属性, 行与列的交点为对象关于属性的取值. 这样的表称为信息表, 它是描述知识的数据表, 其定义如下.

定义 1.6　称四元组 $\mathcal{I} = (U, AT \cup DT, F, G)$ 为一个决策信息系统, 三元组 $\mathcal{I} = (U, AT, F)$ 为信息系统, 其中

$U = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是有限对象集;

$AT = \{a_1, a_2, \cdots, a_p\}$ 是有限条件属性集;

$DT = \{d_1, d_2, \cdots, d_q\}$ 是有限决策属性集, 且 $AT \cap DT = \varnothing$;

$F = \{f|U \to V_a, a \in AT\}$ 是 U 与 AT 的关系集, V_a 为 a 的有限值域;

$G = \{g|U \to V_d, d \in DT\}$ 是 U 与 DT 的关系集, V_d 为 d 的有限值域.

在 Pawlak 近似空间意义下的经典信息系统中, 每个条件属性集和决策属性集都决定了一个二元不可区分关系, 即等价关系[226]. 然而, 在实际生活中有许多问题并不是基于等价关系的, 仍存在不少信息系统是基于优势关系的[25,56], 即对每个条件属性值域和决策属性值域有一个偏序关系, 如一个班级学生的各科成绩, 由偏序关系可以构成一个优势关系. 这时就需要建立基于优势关系的信息系统.

在信息系统中, 根据对象属性值排序可以得到偏序关系. 一般地, 由数据表可以得到递增偏序关系或递减偏序关系, 根据偏序关系可获得优势关系. 在信息系统中, 若属性的值域是递增或递减的偏序关系, 则这个属性称为一个准则. 由若干准则组成的集合称为准则集.

设 $\mathcal{I} = (U, AT, F)$ 是一个信息系统, 属性 $a \in AT$ 是一个准则. 在 a 的值域上建立偏序关系 "$\succcurlyeq_a$". 对于 $x_i, x_j \in U$, 则 $x_j \succcurlyeq_a x_i$ 表示对象 x_j 关于准则 a 优于对象 x_i, 此时对象 x_i 关于 a 和 x_j 至多一样好. 对于准则集 $A \subseteq AT$, 定义 $x_j \succcurlyeq_A x_i \Leftrightarrow [\forall a \in A, x_j \succcurlyeq_a x_i]$. 也就是说对象 x_j 关于准则集 A 优于对象 x_i, 此时 x_i 关于 A 中的所有准则和 x_j 至多一样好.

在信息系统中, 对于准则集 $A\subseteq AT$, 记

$$R_A^{\succcurlyeq}=\{(x_i,x_j)\in U\times U|x_j\succcurlyeq_a x_i\},$$

称 $R_A^{\succcurlyeq}$ 为准则集 A 对应的优势关系. $xR_A^{\succcurlyeq}y$ 则表示 y 关于准则集 A 优于 x. 特别地, 对单个属性 a, 对应优势关系简记为 $R_a^{\succcurlyeq}$. 且有 $R_A^{\succcurlyeq}=\bigcap\limits_{a\in A}R_a^{\succcurlyeq}$.

类似地, 记

$$R_A^{\preccurlyeq}=\{(x_i,x_j)\in U\times U|x_i\succcurlyeq_a x_j\},$$

称 $R_A^{\preccurlyeq}$ 为准则集 A 对应的劣势关系. $yR_A^{\preccurlyeq}x$ 则表示 x 关于准则集 A 劣于 y. 特别地, 对单个属性 a, 对应劣势关系简记为 $R_a^{\preccurlyeq}$, 且有 $R_A^{\preccurlyeq}=\bigcap\limits_{a\in A}R_a^{\preccurlyeq}$.

关系 $x_j\succcurlyeq_a x_i$ 可以由属性值域上的偏序关系得到. 对于一些准则 $a_1\in A$, 用 $f(x_i,a_1)\leqslant f(x_j,a_1)$ 得到 $x_j\succcurlyeq_{a_1}x_i$ 称为递增偏序构成的优势关系. 对于另外一些准则 $a_2\in A$, 用 $f(x_i,a_2)\geqslant f(x_j,a_2)$ 得到 $x_j\succcurlyeq_{a_2}x_i$ 称为递减偏序构成的优势关系.

设 $A\subseteq AT$ 且 $A=A_1\cup A_2$, A_1 是递增偏序构成的优势关系的属性集合, A_2 是递减偏序构成的优势关系的属性集合, 则优势关系和劣势关系可以由属性值的大小关系分别表示为

$$\begin{aligned}R_A^{\succcurlyeq}=\{(x_i,x_j)\in U\times U|&[\forall a_1\in A_1,f(x_i,a_1)\leqslant f(x_j,a_1)]\\&\wedge[\forall a_2\in A_2,f(x_i,a_2)\geqslant f(x_j,a_2)]\};\\R_A^{\preccurlyeq}=\{(x_i,x_j)\in U\times U|&(x_j,x_i)\in R_A^{\succcurlyeq}\}.\end{aligned}$$

由 $R_A^{\succcurlyeq}$ 与 $R_A^{\preccurlyeq}$ 的定义形式可知二者对应的关系矩阵互为转置矩阵. 本书仅以优势关系建立序信息系统并进行相关研究.

定义 1.7 设 $\mathcal{I}=(U,AT\cup DT,F,G)$ 为决策信息系统. 对于任意 $A\subseteq AT$, $D\subseteq DT$, $R_A^{\succcurlyeq}$ 与 $R_D^{\succcurlyeq}$ 称为决策信息系统 $\mathcal{I}$ 中条件属性集 A 和决策属性集 D 对应的优势关系, 此时该信息系统称为决策序信息系统, 记作 $\mathcal{I}^{\succcurlyeq}$, 其中 (U,A,F) 为序信息系统. 若 $|DT|=1$, 则称 $\mathcal{I}^{\succcurlyeq}$ 为单决策序信息系统. 若 $|DT|>1$, 则称 $\mathcal{I}^{\succcurlyeq}$ 为多决策序信息系统.

设 $\mathcal{I}^{\succcurlyeq}=(U,AT\cup DT,F,G)$ 为决策序信息系统. 对于任意的 $A\subseteq AT, D\subseteq DT$, $A=A_1\cup A_2$, $D=DT_1\cup DT_2$. 记

$$\begin{aligned}[x_i]_A^{\succcurlyeq}&=\{x_j\in U|(x_i,x_j)\in R_A^{\succcurlyeq}\}\\&=\{x_j\in U|[\forall a_1\in A_1,f(x_i,a_1)\leqslant f(x_j,a_1)]\\&\qquad\wedge[\forall a_2\in A_2,f(x_i,a_2)\geqslant f(x_j,a_2)]\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[x_i]_D^{\succcurlyeq} &= \{x_j \in U | (x_i, x_j) \in R_D^{\succcurlyeq}\} \\ &= \{x_j \in U | [\forall d_1 \in DT_1, g(x_i, d_1) \leqslant g(x_j, d_1)] \\ &\qquad \wedge [\forall d_2 \in DT_2, g(x_i, d_2) \geqslant d(x_j, d_2)]\}.\end{aligned}$$

称 $[x_i]_A^{\succcurlyeq}$ 为对象 x_i 关于优势关系 $R_A^{\succcurlyeq}$ 的条件优势类, 关于 $R_A^{\succcurlyeq}$ 的条件优势类的全体记作 $U/R_A^{\succcurlyeq}$. 称 $[x_i]_D^{\succcurlyeq}$ 为对象 x_i 关于优势关系 $R_D^{\succcurlyeq}$ 的决策优势类, 关于 $R_D^{\succcurlyeq}$ 的决策优势类的全体记作 $U/R_D^{\succcurlyeq}$.

因为递增偏序构成的优势关系和递减偏序构成的优势关系仅由所考查准则的意义决定, 对于理论研究并无影响. 为表述简便, 本书仅考虑递增偏序构成的优势关系, 对递减偏序构成的优势关系不予考虑. 即对任意 $A \subseteq AT$ 有

$$R_A^{\succcurlyeq} = \{(x_i, x_j) \in U \times U | f(x_i, a) \leqslant f(x_j, a), \forall a \in A\},$$

$$[x_i]_A^{\succcurlyeq} = \{x_j \in U | f(x_i, a) \leqslant f(x_j, a), \forall a \in A\}.$$

当 $A = \{a\}$ 时, 用 a 代替 $\{a\}$ 简记为 $R_a^{\succcurlyeq}$ 和 $[x]_a^{\succcurlyeq}$.

由 $R_A^{\succcurlyeq}$ 和 $[x_i]_A^{\succcurlyeq}$ 的定义, 有下面定理成立.

定理 1.4　设 $\mathcal{I}^{\succcurlyeq} = (U, AT \cup DT, F, G)$ 为决策序信息系统, $A \subseteq AT$, 下面结论成立.

(1) $R_A^{\succcurlyeq}$ 是自反和传递的, 未必是对称的, 因而一般不再是等价关系;

(2) 若 $B \subseteq A$, 则 $R_A^{\succcurlyeq} \subseteq R_B^{\succcurlyeq}$;

(3) 若 $B \subseteq A$, 则 $[x_i]_A^{\succcurlyeq} \subseteq [x_i]_B^{\succcurlyeq}$;

(4) $x_j \in [x_i]_A^{\succcurlyeq}$ 当且仅当 $[x_j]_A^{\succcurlyeq} \subseteq [x_i]_A^{\succcurlyeq}$;

(5) $[x_i]_A^{\succcurlyeq} = \cup\{[x_j]_A^{\succcurlyeq} | x_j \in [x_i]_A^{\succcurlyeq}\}$;

(6) $[x_j]_A^{\succcurlyeq} = [x_i]_A^{\succcurlyeq}$ 当且仅当 $f(x_i, a) = f(x_j, a)$, $\forall a \in A$;

(7) $\mathcal{J} = \cup\{[x]_A^{\succcurlyeq} | x \in U\}$ 是 U 的一个覆盖.

定义 1.8[35–43]　设 $\mathcal{I}^{\succcurlyeq} = (U, AT \cup DT, F, G)$ 为决策序信息系统, $X \subseteq U$, $A \subseteq AT$. 记

$$\underline{R_A^{\succcurlyeq}}(X) = \{x \in U | [x]_A^{\succcurlyeq} \subseteq X\};$$

$$\overline{R_A^{\succcurlyeq}}(X) = \{x \in U | [x]_A^{\succcurlyeq} \cap X \neq \varnothing\},$$

称 $\overline{R_A^{\succcurlyeq}}(X)$ 和 $\underline{R_A^{\succcurlyeq}}(X)$ 分别为 X 关于优势关系 $R_A^{\succcurlyeq}$ 的上、下近似.

显然它们也有类似于 Pawlak 近似空间中近似算子的性质.

定理 1.5　设 $\mathcal{I}^{\succcurlyeq} = (U, AT \cup DT, F, G)$ 为决策序信息系统, $X, Y \subseteq U$, $A \subseteq AT$, 则它们的上、下近似满足下列性质.

(1L) $\underline{R_A^{\succcurlyeq}}(X) \subseteq X$, (下近似的收缩性)

(1U) $X \subseteq \overline{R_A^{\succcurlyeq}}(X)$, (上近似的扩张性)

(2) $\underline{R_A^{\succcurlyeq}}(\sim X) =\sim \overline{R_A^{\succcurlyeq}}(X)$, (上、下近似的对偶性)

$\overline{R_A^{\succcurlyeq}}(\sim X) =\sim \underline{R_A^{\succcurlyeq}}(X)$, (上、下近似的对偶性)

(3L) $\underline{R_A^{\succcurlyeq}}(\varnothing) = \varnothing$, (下近似的正规性)

(3U) $\overline{R_A^{\succcurlyeq}}(\varnothing) = \varnothing$, (上近似的正规性)

(4L) $\underline{R_A^{\succcurlyeq}}(U) = U$, (下近似的余正规性)

(4U) $\overline{R_A^{\succcurlyeq}}(U) = U$, (上近似的余正规性)

(5L) $\underline{R_A^{\succcurlyeq}}(X \cap Y) = \underline{R_A^{\succcurlyeq}}(X) \cap \underline{R_A^{\succcurlyeq}}(Y)$, (下近似的可乘性)

(5U) $\overline{R_A^{\succcurlyeq}}(X \cup Y) = \overline{R_A^{\succcurlyeq}}(X) \cup \overline{R_A^{\succcurlyeq}}(Y)$, (上近似的可加性)

(6L) $\underline{R_A^{\succcurlyeq}}(X \cup Y) \supseteq \underline{R_A^{\succcurlyeq}}(X) \cup \underline{R_A^{\succcurlyeq}}(Y)$, (下近似的弱可加性)

(6U) $\overline{R_A^{\succcurlyeq}}(X \cap Y) \subseteq \overline{R_A^{\succcurlyeq}}(X) \cap \overline{R^{\succcurlyeq}}(Y)$, (上近似的弱可乘性)

(7L) $X \subseteq Y \Rightarrow \underline{R_A^{\succcurlyeq}}(X) \subseteq \underline{R_A^{\succcurlyeq}}(Y)$, (下近似的单调性)

(7U) $X \subseteq Y \Rightarrow \overline{R_A^{\succcurlyeq}}(X) \subseteq \overline{R_A^{\succcurlyeq}}(Y)$, (上近似的单调性)

(8L) $\underline{R_A^{\succcurlyeq}}(\underline{R_A^{\succcurlyeq}}(X)) = \underline{R_A^{\succcurlyeq}}(X)$, (下近似的幂等性)

(8U) $\overline{R_A^{\succcurlyeq}}(\overline{R_A^{\succcurlyeq}}(X)) = \overline{R_A^{\succcurlyeq}}(X)$. (上近似的幂等性)

定义 1.9 设 $\mathcal{I}^{\succcurlyeq} = (U, AT \cup DT, F, G)$ 为决策序信息系统, 若 $R_{AT}^{\succcurlyeq} \subseteq R_{DT}^{\succcurlyeq}$, 则称该决策序信息系统是协调的, 否则是不协调的.

定义 1.10 设 $\mathcal{I}^{\succcurlyeq} = (U, AT, F)$ 为序信息系统, 若 $B \subseteq AT$, 且满足

(1) $R_B^{\succcurlyeq} = R_{AT}^{\succcurlyeq}$,

(2) $\forall b \in B, R_{B-\{b\}}^{\succcurlyeq} \neq R_{AT}^{\succcurlyeq}$,

则称 B 是该序信息系统的约简. 当所有约简的交非空时, 称此交集为该序信息系统的核.

定理 1.6 对于任何序信息系统 $\mathcal{I}^{\succcurlyeq} = (U, AT, F)$, 约简总是存在的.

定理 1.7 对于任何协调决策序信息系统 $\mathcal{I}^{\succcurlyeq} = (U, AT \cup DT, F, G)$, 约简总是存在的.

一般来说, 序信息系统的约简不一定是唯一的.

注 为方便叙述, 本章所涉及内容及定理证明见相关文献 [25, 50, 116, 150], 在此不再赘述. 本书研究的决策序信息系统约简理论[48] 均在单决策情况下获得, 部分结果在多决策情况下[51,239] 也成立, 我们将另行研究, 本书不再作其他说明.

第 2 章　序信息系统的不确定度量

Shannon 早在 1948 年信息论中提出的熵的概念[11,149] 是一个衡量系统结构不确定性的度量. 1968 年 Zadeh 首先提出了模糊熵的概念, 并用来量化模糊集合 (一个模糊概念) 的模糊性, 1972 年 de Luca 和 Termini[23] 引入了一个模糊熵的公理化构造方法, 首次给出了一个模糊集模糊性的近似度量, Gedige 对粗糙质量进行了修正[35]. 接着 Liu X C 等完成了模糊熵的公理化研究, 并讨论了模糊集的距离度量、相似性度量以及这些度量之间的关系. 米据生[104] 等给出了一种新的模糊熵并有效地应用到基于划分的模糊粗糙集的模糊性度量. 利用 Shannon 熵, Düntsch 等[31] 提出了三个模型选择准则, Wierman[183] 从公理化角度出发, 提出了一种不确定性度量, 称为粒度度量, 它与 Shannon 熵以及 Hartley 度量之间有着内在的联系. Beaubouef 等[4,5] 应用 Shannon 熵的变形研究了一个粗糙关系数据库中的粗糙度. 苗夺谦[107]、王国胤[179] 等用 Shannon 熵的形式表示出了有关知识依赖、属性重要度、完备信息系统的约简等概念[108,109,177], 还讨论了知识粗糙性与信息熵之间的关系. 梁吉业等[78,83−87] 在信息系统中定义了一种新的信息熵, 与 Shannon 熵的对数形式不同, 考虑的信息量函数具有补的性质及其他特别性质.

然而, 这些研究都是在经典等价关系的前提下完成的, 而许多实际问题却是基于优势关系的[216,220−222]. 梁吉业等成功地建立了经典粗糙集下信息系统的熵理论. 在此基础上, 本章把知识粒度、知识分辨度、信息熵、粗糙熵以及粗糙集的粗糙熵等不确定性概念[47,214,219,223,238] 引入到序信息系统中, 并研究它们的重要性质; 讨论它们之间的关系; 证明知识粒度和粗糙熵随着知识确定程度的增强而单调下降的结论, 从而给出序信息系统的信息解释. 另外结合知识的粗糙熵与粗糙集的粗糙度提出粗糙集粗糙熵的概念, 并证明粗糙集粗糙熵也是随着知识确定程度的增强而单调下降的结论, 该结论充分地说明粗糙集的粗糙熵比粗糙度可以更精确地刻画粗糙集的粗糙程度. 这些结果为这种复杂的信息系统进行数据分析提供了理论基础[124−127].

2.1 知识的颗粒特征

定义 2.1　设 $\mathcal{I}^{\succcurlyeq}=(U,AT,F)$ 为序信息系统. $\mathbf{R}^{\succcurlyeq}$ 为 U 上的优势关系族. 称 $\mathbf{K}$=$(U,\mathbf{R}^{\succcurlyeq})$ 为一个基于优势关系的知识库; 优势关系 $R^{\succcurlyeq}\in\mathbf{R}^{\succcurlyeq}$ 称为知识; $R^{\succcurlyeq}$ 生成的优势类 $[x]_R^{\succcurlyeq}$ 称为知识颗粒; $R^{\succcurlyeq}$ 生成的所有优势类 $U/R^{\succcurlyeq}=\{[x]_R^{\succcurlyeq}|x\in U\}$ 称为