初中数学竞赛基础教程

范学汉　主编

华中师范大学出版社

第三册

责任编辑：彭守权
封面设计：甘　英

ISBN 7—5622—0797—6/G·275

定　价：2.75元

初中数学竞赛基础教程

第三册

主　编：范学汉
副主编：$\boxed{\text{童建民}}$　吴焕新
编　委：（以姓氏笔划为序）
汪建中　严宗刚　吴焕新
陈胜利　范学汉　谢汉元

华中师范大学出版社

鄂新登字 11 号

初中数学竞赛基础教程

范学汉　主编

*

华中师范大学出版社出版发行

（武 昌 桂 子 山）

新华书店湖北发行所经销

汉阳县印刷厂印刷

*

开本 787×1092　1/32　印张 6.5 字数 145 千字

1992 年 2 月第 1 版　　1992 年 7 月第 2 次印刷

ISBN 7－5622－0797－6/G・275

印数 10501—25500　定价：2.75 元

前　言

为给初中学生开展数学课外活动和数学竞赛提供一套与现行初中数学课本配套的实用教材，我们在总结近几年组织辅导数学竞赛经验的基础上，按照初中数学教学大纲（修订本）及初中数学竞赛大纲（草案）的要求，编写了这套《初中数学竞赛基础教程》。目的是想通过这套教材的教学和辅导，起到开阔视野、启迪思维、提高智能的作用。

这套书将初中数学教学大纲规定的重点内容及数学竞赛大纲规定的全部内容归纳为十九讲，共分为三册，分别供初一、初二、初三使用。各册在编写过程中注意了以下五个特点：(1) 基本以现行初中数学课本的章节编排顺序为序，力图使课外活动的教学和课堂教学同步进行；(2) 突出重点、整体配合、循序渐进，同时穿插一些数学竞赛需要的专题；(3) 凡是扩充的知识内容，力求避免在理论上作繁难的推导，尽量采用通过实例直观印证，把重点放在方法的介绍和运用上；(4) 将数学基本理论、基本知识、基本方法的学习和思维与能力的训练贯穿于例题的剖析之中；(5) 每讲中都分别配有适量的练习和习题，每一册中都配有两套复习自测题，第三册后，另外配有两套竞赛模拟题。为了方便读者，每册中所有的练习、习题和复习自测题以及模拟题后面都附有答案、提示或解答。

本册由汪建中、吴焕新、范学汉编写，范学汉审订。为本册部分讲节提供过初稿的有杜金清、祝友明、张国恩。

本书在编写过程中曾得到黄州市教研室的大力支持、黄

冈中学的热情鼓励和热心协助。华中师范大学《数学通讯》编辑部伍家德副教授审阅了本书初稿，提出了不少宝贵意见。谨此一并感谢。

由于我们的思想和学识水平有限，加之时间仓促，书中错误之处在所难免，恳请广大读者批评指教。

编　者

1991 年 6 月于黄州

目　录

第十五讲　指数与对数

本讲要求同学们能正确理解指数与对数的概念，熟练掌握指数与对数的计算、证明以及常用对数的首数、尾数的应用．为此先给出以下的预备知识：

（1）对数的换底公式 $\log_a N=\dfrac{\log_b N}{\log_b a}$．（这里 a、b 是不等于 1 的正数，$N>0$）

证明　因为 $a\log_a N=N$，两边取以 b 为底的对数得

$$\log_b a^{\log_a N}=\log_b N,$$

所以

$$\log_a N\cdot\log_b a=\log_b N,$$

即

$$\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}.$$

（2）换底公式的推论

推论 1　$\log_a b=\dfrac{\log_b b}{\log_b a}=\dfrac{1}{\log_b a}$．（即以 a 为底 b 的对数等于以 b 为底 a 的对数的倒数）．

推论 2　若 $c\neq 0$，有

$$\log_{a^c}N^c=\frac{\log_b N^c}{\log_b a^c}=\frac{\log_b N}{\log_b a}=\log_a N.$$

（即将对数的底数与真数同时 c 次方，对数值不变。）

一、计算问题

解决各种指数与对数的计算问题，要能熟练运用指数式和对数式的互化；指数、对数的性质以及对数恒等式、换底公式及其推论等知识.

例 1 化简 $\sqrt[a-b]{\sqrt[c-a]{x^{b+c}}}\cdot\sqrt[b-c]{\sqrt[a-b]{x^{c+a}}}\cdot\sqrt[c-a]{\sqrt[b-c]{x^{a+b}}}$.

分析 此例若直接应用根式的乘法法则进行计算，显然极不方便. 若将其转化为指数式，利用指数运算法则就可以转化为分式的和差运算.

解
$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=x^{\frac{b+c}{c-a}\cdot\frac{1}{a-b}}\cdot x^{\frac{c+a}{a-b}\cdot\frac{1}{b-c}}\cdot x^{\frac{a+b}{b-c}\cdot\frac{1}{c-a}}\\
&=x^{\frac{b+c}{(c-a)(a-b)}+\frac{c+a}{(a-b)(b-c)}+\frac{a+b}{(b-c)(c-a)}}\\
&=x^{\frac{(b+c)(b-c)+(c+a)(c-a)+(a+b)(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}}\\
&=x^0=1.
\end{aligned}
$$

例 2 已知 $\log_n x=4$, $\log_n y=5$, 求 $A=\left(x\sqrt[3]{\frac{\sqrt{x^{-1}}}{y^2}}\right)^{\frac{1}{2}}$ 的值.

分析 此例的条件是对数式，结论是指数式，且指数式只含有乘、除、乘方及开方运算，因此应采用指数式与对数式互化的方法.

解法一 因为

$$\log_n A=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\log_n x-\frac{2}{3}\log_n y\right),$$

又知 $\log_n x=4$, $\log_n y=5$.

所以 $\log_n A=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\times 4-\frac{2}{3}\times 5\right)=0$,

故得 $A=n^0=1$.

解法二 因为 $\log_n x=4\Rightarrow x=n^4$,

$$\log_n y=5 \Rightarrow y=n^5,$$

所以 $$A=\frac{x^{\frac{5}{12}}}{y^{\frac{1}{3}}}=\frac{(n^4)^{\frac{5}{12}}}{(n^5)^{\frac{1}{3}}}=1.$$

例 3 若 $x=\dfrac{1}{\sqrt{3+\sqrt{8}}}$，求 $\log_8(x^4+4x^3+4x^2+4x+3)$ 的值.

分析 条件与所求代数式的值的表示形式都比较复杂. 故可考虑先将 $x=\dfrac{1}{\sqrt{3+\sqrt{8}}}$ 化简成 $x=\sqrt{2}-1$. 再将 $x^4+4x^3+4x^2+4x+3$ 分解因式得：$(x+1)(x+3)(x^2+1)$，则只需求出 $x+1$、$x+3$、x^2+1 的值代入即可.

解法一 由 $$x=2-1,$$

得 $x+1=\sqrt{2}$，$x+3=\sqrt{2}+2$，$x^2+1=4-2\sqrt{2}$.

又 $x^4+4x^3+4x^2+4x+3=(x+1)(x+3)(x^2+1)$，

所以 $\log_8(x^4+4x^3+4x^2+4x+3)$

$=\log_8\sqrt{2}(\sqrt{2}+2)(4-2\sqrt{2})=\log_8 4\sqrt{2}=\dfrac{5}{6}$.

解法二 由 $x=\sqrt{2}-1$，得 $x+1=\sqrt{2}$，$x+2=\sqrt{2}+1$.

又 $$\begin{aligned}&x^4+4x^3+4x^2+4x+3\\&=x^2(x^2+4x+4)+4x+4-1\\&=x^2(x+2)^2+4(x+1)-1=4\sqrt{2}.\end{aligned}$$

所以 $\log_8(x^4+4x^3+4x^2+4x+3)=\log_8 4\sqrt{2}=\dfrac{5}{6}$.

解法三 由 $x=\sqrt{2}-1$，得 $(x+1)^2=2$，即 $x^2+2x-1=0$. 用 $x^4+4x^3+4x^2+4x+3$ 除以 x^2+2x-1 的余式为 $4x+4$，代入 $x=\sqrt{2}-1$，得原式的值为 $4\sqrt{2}$.

所以 $\log_8(x^4+4x^3+4x^2+4x+3)=\log_8 4\sqrt{2}=\dfrac{5}{6}$.

例 4 已知 $\log_2 3=a$，$\log_3 5=b$. 求 $\log_{15}20$.

分析 本例所给出的三个对数式的底都不同，因此可考虑用换底公式将三个对数式都换成以 10 为底的对数(或换成以 2，3，15 的最小公倍数为底的对数)．这样解起来就方便多了．

解法一 由 $\log_2 3=a$，得 $\lg 3=a\lg 2$；

又 $$\log_3 5=b，得 \lg 5=b\lg 3=ab\lg 2.$$

所以 $$\log_{15}20=\frac{\lg 20}{\lg 15}=\frac{2\lg 2+\lg 5}{\lg 3+\lg 5}$$

$$=\frac{2\lg 2+ab\lg 2}{a\lg 2+ab\lg 2}=\frac{2+ab}{a+ab}.$$

解法二 由换底公式推论 1 知：

$$\log_2 3=a，有 \log_3 2=\frac{1}{a}.$$

所以 $$\log_{15}20=\frac{\log_3 20}{\log_3 15}=\frac{2\log_3 2+\log_3 5}{1+\log_3 5}$$

$$=\frac{2\times\frac{1}{a}+b}{1+b}=\frac{2+ab}{a+ab}.$$

解法三 将对数式换成指数式．

由 $$\log_2 3=a，得 3=2^a.$$

又 $$\log_3 5=b，得 5=3^b=(2^a)^b=2^{ab}.$$

因 $$20=2^2\times 5=2^2\cdot 2^{ab}=2^{2+ab}．有 2=20^{\frac{1}{2+ab}}，$$

且 $$15=3\times 5=2^a\cdot 2^{ab}=2^{a+ab}．有 2=15^{\frac{1}{a+ab}}，$$

所以 $$20^{\frac{1}{2+ab}}=15^{\frac{1}{a+ab}}，即 20=15^{\frac{2+ab}{a+ab}}，$$

故 $$\log_{15}20=\frac{2+ab}{a+ab}.$$

练　习　一

1．计算下列各题：

(1) $\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\log_5 6\cdot\log_6 7\cdot\log_7 8\cdot\log_8 9$.

(2) $2^{\log_4(2-\sqrt{3})^2}+3^{\log_9(2+\sqrt{3})^2}$.

2. 若 $a+b+c=0$，化简：

$$\sqrt[2a^2+bc]{x^{a^2}}\cdot\sqrt[2b^2+ac]{x^{b^2}}\cdot\sqrt[2c^2+ab]{x^{c^2}}.$$

3. 已知 $x=\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2+b^3}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{a^2+b^3}}$，

求 $x^3+3bx-2a+5$ 的值.

4. 数 5^{1991}的最后三位数是________.

5. $2^{-(2k+1)}-2^{-(2k-1)}+2^{-2k}$（$k$ 是整数）应等于（　　）.

(A) 0；　(B) 2^{-2k}；　(C) $2^{-2(2k-1)}$；　(D) $-2^{-(2k+1)}$.

二、对数大小的比较

比较两个对数大小的方法较多，如：利用对数的性质进行判断；利用两数之差与零相比较；利用两数之商与 1 相比较；利用两数与某常数相比较；利用重要不等式 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$（$a>0$，$b>0$ 且 $a=b$ 时，等号成立）进行比较等等. 下面举例说明.

例 5　若 $0<x<1$，比较 $\lg^2x$ 与 $\lg x^2$ 的大小.

分析　由于两个对数的底数都是 10，又知 $0<x^2<1$，故 $\lg x^2<0$，而 $\lg^2x=(\lg x)^2>0$. 据此判断 $\lg^2x>\lg x^2$. 另外，由于两个对数的底相同，因此也可以采用“求差法”. 解法如下：

解　由　$0<x<1$，知 $\lg x<0$，$\lg x-2<0$.

又　　$\lg^2x-\lg x^2=\lg^2x-2\lg x=\lg x(\lg x-2)>0$.

所以　　$\lg^2x>\lg x^2$.

说明　利用两数之差与零相比较的方法叫做求差法. 若差大于零，则被减数大于减数；若差等于零，则两数相等；若差小于零，则被减数小于减数.

例 6　试比较 $\log_2 3$ 与 $\log_3 5$ 的大小.

分析 对数 $\log_2 3$ 与 $\log_3 5$ 的底和真数都不相等，故不能直接用对数的性质及求差法来解. 可考虑将这两个对数分别与某一个常数相比较. 这一常数如何选？没有固定的方法，须随机而定. 此例解法如下.

解 因 $8<9$，即 $2^3<3^2$，取对数有 $3\log_2 2<2\log 2^3$.

所以
$$\frac{3}{2}<\log_2 3;$$

又 $25<27$，即 $5^2<3^3$，取对数有 $2\log_3 5<3\log_3 3$，

所以
$$\frac{3}{2}>\log_3 5,$$

故
$$\log_2 3>\log_3 5.$$

例 7 已知：$\lg 2=0.3010$，$\lg 3=0.4771$. 试比较$\frac{27^{13}}{16^{12}}$与 10000 的大小.

分析 由于两数都较大，不易直接比较，考虑对数运算可以简化指数运算，化简后，再利用对数的性质进行比较.

解 已知 $\lg 2=0.3010$，$\lg 3=0.4771$，

故
$$\lg\frac{27^{13}}{16^{12}}=39\lg 3-48\lg 2$$
$$=4.1589>4=\lg 10000.$$

即
$$\lg\frac{27^{13}}{16^{12}}>\lg 10000，所以\frac{27^{13}}{16^{12}}>10000.$$

例 8 已知 $0<a<b<1$，试比较 $\log_{(b-a)}(a^3+b^3)^{\frac{1}{3}}$ 和 $\log_{(b-a)}(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$ 的大小.

分析 由 $0<a<b<1$，知 $0<b-a<1$. 故待比较的二式真数越大，则对数反而小. 因此本例只须比较 $(a^3+b^3)^{\frac{1}{3}}$ 和 $(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$ 的大小.

因为
$$a>0,\ b>0,$$

故有
$$a^3+b^3>0,\ a^2+b^2>0,$$

又 $\left[(a^3+b^3)^{\frac{1}{3}}\right]^6-\left[(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}\right]^6$

$$=a^6+2a^3b^3+b^6-(a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6)$$

$$=-a^2b^2[(a-b)^2+2a^2+2b^2]<0,$$

因此 $$[(a^3+b^3)^{\frac{1}{3}}]^6<[(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}]^6,$$

即 $$(a^3+b^3)^{\frac{1}{3}}<(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}},$$

所以 $$\log_{(b-a)}(a^3+b^3)^{\frac{1}{3}}>\log_{(b-a)}(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}.$$

请同学们自己写出解答过程.

例 9 比较 $\log_{98}^2 99$ 和 $\log_{98}100$ 的大小.

分析 观察此例. 由于对数的底数相等，真数不相等，且第一个是对数的平方，故可先换成以 10 为底的对数，再利用“求商法”进行比较.

解法一 利用求商法进行比较.

由 $$\log_{98}^2 99=\left(\frac{\lg 99}{\lg 98}\right)^2,\ \log_{98}100=\frac{\lg 100}{\lg 98}.$$

得 $$\frac{\log_{98}^2 99}{\log_{98}100}=\frac{\lg^2 99}{\lg 98\cdot\lg 100}.$$

又 $$98\times100=(99-1)(99+1)=99^2-1<99^2.$$

有 $2\lg 99>\lg 98+\lg 100>2\sqrt{\lg 98\cdot\lg 100}$. （重要不等式）

所以 $\lg 99>\sqrt{\lg 98\cdot\lg 100}$，即 $(\lg 99)^2>\lg 98\cdot\lg 100$，

就是 $$\frac{(\lg 99)^2}{\lg 98\cdot\lg 100}>1.$$

故得 $$\log_{98}^2 99>\log_{98}100.$$

说明 利用两正数之商与 1 相比较叫做求商法. 若两正数之商大于 1，则被除数大于除数；若商小于 1，则被除数小于除数；若商等于 1，则被除数与除数相等.

解法二 利用求差法进行比较.

因 $$\log_{98}^2 99-\log_{98}100=\frac{\lg^2 99-\lg 98\cdot\lg 100}{\lg^2 98}.$$

又 $$\lg^2 99>\lg 98\cdot\lg 100\text{（解法一中已证）}.$$

即 $$\lg^2 99-\lg 98\cdot\lg 100>0.$$

且 $\lg^2 98>0$，故 $\dfrac{\lg^2 99-\lg 98\cdot\lg 100}{\lg^2 98}>0$.

于是得 $$\log_{98}^2 99>\log_{98}100.$$

例 10 设 n 为正整数，证明当 n 增加时，$(n+1)\cdot(0.9)^n$ 开始时增加，以后减少；并求出当 $(n+1)\cdot(0.9)^n$ 变为最大时 n 的值.

分析 由于 n 为正整数，故 $n=1$、2、3、…，要研究 $(n+1)\cdot(0.9)^n$ 的增减性，不可能将 n 逐个验算，但可以比较 $n=k$ 和 $n=k+1$（k 为正整数）时，两个代数式的大小，寻求其变化规律.

解 $n=k$ 时，（k 为正整数）

$$(n+1)\cdot(0.9)^n=(k+1)\cdot(0.9)^k. \quad ①$$

$n=k+1$ 时，

$$(n+1)\cdot(0.9)^n=(k+2)\cdot(0.9)^{k+1} \quad ②$$

②－①得：
$$\begin{aligned}&(k+2)(0.9)^{k+1}-(k+1)(0.9)^k\\&=(0.9)^k[0.9(k+2)-(k+1)]\\&=(0.9)^k\cdot(-0.1k+0.8)\\&=-\frac{1}{10}\cdot(0.9)^k\cdot(k-8).\end{aligned}$$

现在只需研究 k 的取值来看两式差的变化情况.

因当 $k<8$ 时，$-\dfrac{1}{10}\cdot(0.9)^k\cdot(k-8)>0$，有

$(n+2)\cdot(0.9)^{n+1}>(n+1)\cdot(0.9)^n$. 此时 $n<8$.

当 $k=8$ 时，$-\dfrac{1}{10}\cdot(0.9)^k\cdot(k-8)=0$，有

$(n+2)\cdot(0.9)^{n+1}=(n+1)\cdot(0.9)^n$，此时 $n=8$.

当 $k>8$ 时，$-\dfrac{1}{10}\cdot(0.9)^k\cdot(k-8)<0$，有

$(n+2)\cdot(0.9)^{n+1}<(n+1)\cdot(0.9)^n$. 此时 $n>8$.

故当 $n=1$、2、3、…、8 时，$(n+1)\cdot(0.9)^n$ 是增加的；

当 $n=9$、10、11…时，$(n+1)\cdot(0.9)^n$ 是减少的；故 $(n+1)\cdot(0.9)^n$ 开始时增加，以后减少. 又当 $(n+1)\cdot(0.9)^n$ 为最大时，$n=8$、9 两数.

练 习 二

1. 如果 $\lg^2 x\cdot\lg 10x<0$，那么 $\frac{1}{\lg 10x}\sqrt{\lg^2 x+\lg 10x^2}=$________.
2. 比较 $\lg^2 9$ 与 $\lg 8.1$ 的大小.
3. 已知 $1>a>b>0$，比较 $\log_{(a-b)}(a^a b^b)$ 与 $\log_{(a-b)}(ab)^{\frac{a+b}{2}}$ 的大小.
4. 选择题（唯一正确答案）

(1) 如果 $\log_2\left[\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x)\right]=\log_3\left[\log_{\frac{1}{3}}(\log_3 y)\right]$ $=\log_5\left[\log_{\frac{1}{5}}(\log_5 z)\right]=0$，那么下式成立的是（　　）.

(A) $x<y<z$；　　(B) $y<z<x$；

(C) $z<x<y$；　　(D) $z<y<x$.

(2) 已知 $0<a<1$. $b>1$ 且 $ab>1$，则 $\log_a\frac{1}{b}$、$\log_a b$、$\log_b\frac{1}{b}$ 这三个数之间的大小顺序是（　　）.

(A) $\log_b\frac{1}{b}<\log_a b<\log_a\frac{1}{b}$；　(B) $\log_a b<\log_b\frac{1}{b}<\log_a\frac{1}{b}$；

(C) $\log_a b<\log_a\frac{1}{b}<\log_b\frac{1}{b}$；　(D) $\log_b\frac{1}{b}<\log_a\frac{1}{b}<\log_a b$.

三、方程与不等式

在指数里含有未知数的方程叫指数方程. 在对数的真数或底数中含有未知数的方程叫对数方程. 例如：$64^x=\frac{1}{4}$ 是指数方程，$\log_3 x=1$，$\log_x 8=\frac{3}{2}$ 是对数方程.

解指数方程与对数方程的基本方法是：①对于简单方程可根据同一底 a（$a>0$ 且 $a\neq1$）的幂相等，则幂指数相等，同