新编高等数学

XINBIAN GAODENG SHUXUE

余宏杰 主编

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
安徽大学出版社

应用型高等院校理工类"十二五"规划教材

新编高等数学

主　编　余宏杰

副主编　张建华　张家昕

编　者　(以姓氏笔画为序)

仇海全　杨建安　姜玉明

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
安徽大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

新编高等数学/余宠杰主编. —合肥:安徽大学出版社，2012.8
ISBN 978-7-5664-0458-9

Ⅰ. ①新… Ⅱ. ①余… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 141693 号

新编高等数学

主编 余宏杰

出版发行:北京师范大学出版集团
安 徽 大 学 出 版 社
(安徽省合肥市肥西路 3 号 邮编 230039)
www.bnupg.com.cn
www.ahupress.com.cn
经　　销:全国新华书店
印　　刷:安徽省人民印刷有限公司
开　　本:170mm×240mm
印　　张:15.75
字　　数:300 千字
版　　次:2012 年 8 月第 1 版
印　　次:2012 年 8 月第 1 次印刷
定　　价:29.00 元
ISBN 978-7-5664-0458-9

责任编辑:武溪溪　张明举
装帧设计:李　军
责任印制:赵明炎

前 言

高等数学是高等学校一门重要的公共基础课,高等数学课程在培养学生的思维能力、提高学生的创新能力方面都具有非常重要的作用,同时高等数学也是大学其他课程的重要基础.

本书基于当前应用型教学改革的导向,注重基础知识的讲述和基本能力的训练,本着重应用、求创新的宗旨,根据目前高等数学课程的教学实际,并参照授课学时精选内容编写而成.内容表述上力求深入浅出、通俗易懂、概念清晰、难点分散.尤为值得一提的是:所遴选的例题典型而且贴近实际或直接来源于实际,以问题触发基本概念的导入、驱动基本理论的构建.注意归纳数学思想方法,便于教师教学与学生自学.

本书共分九章,包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用;微分方程、空间解析几何初步、多元函数微分法及其应用、重积分等.每章配有适当的练习题,选题力求能够反映大纲要求和知识的综合应用,使读者通过这些常规练习题熟练掌握大纲所规定内容,并能够做到灵活运用所学知识,书末附有习题参考答案或提示.

本书第一章由姜玉明编写,第二、三章由杨建安编写,第四、六章由仇海全编写,第五章由张建华编写,由张家昕编写,第九章由余宏杰编写.全书由余宠杰、张建华、张家昕负责统稿.

在本书的编写过程中融入了我们多年来的教学心得体会、教改理念,本着与时俱进的精神精心选材,广泛征求授课教师意见、力争完善.然而由于编者们水平所限,难免存在不足之处,欢迎读者们提出宝贵的意见和建议.

编者

2012 年 1 月

目 录

第 1 章

函数、极限与连续

初等数学的研究对象基本上是不变的量，而高等数学的研究对象则是变动的量. 函数、极限与连续是高等数学研究的理论基础. 本章将在中学代数关于函数知识的基础上进一步介绍函数的概念，研究极限及其基本计算方法，并讨论函数的连续性.

§1.1　集合与函数

1. 集合的概念和基本运算

集合是数学中的一个最基本的概念，它在现代数学和工程技术中有着非常重要的作用. 一般地，我们将具有某种确定性质的事物的全体叫做一个集合，简称集. 组成集合的事物称为该集合的元素. 例如，某大学一年级学生的全体组成一个集合，其中的每一个学生为该集合的一个元素；自然数的全体组成自然数集合，每个自然数是它的元素，等等.

通常我们用大写的英文字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合；用小写的英文字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素. 若 a 是集合 A 的元素，则称 a 属于 A，记作 $a\in A$；否则称 a 不属于 A，记作 $a\notin A$.

含有有限个元素的集合称为有限集；不含任何元素的集合称为空集，用 $\varnothing$ 表示；不是有限集也不是空集的集合称为无限集. 例如，某大学一年级学生的全体组成的集合是有限集；全体实数组成的集合是无限集；方程 $x^2+1=0$ 的实根组成的集合是空集.

我们常用下面的方法来表示集合. 一种是列举法，即将集合的元素一一列举出来，写在一个花括号内. 例如，所有正整数组成的集合可以表示为 $N=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$；另一种表示方法是指明集合元素所具有的性质，即将具有性质 $p(x)$ 的元素 x 所组成的集合 A 记作

$$A=\{x \mid x \text{ 具有性质 } p(x)\}.$$

例如,正整数集也可表示成

$$\mathbf{N}^{+}=\{n \mid n=1,2,3,\cdots,n,\cdots\}.$$

所有实数的集合可表示成

$$\mathbf{R}=\{x \mid x \text{ 为实数}\}.$$

又如

$$A=\{(x,y) \mid x^2+y^2=1,x,y \text{ 为实数}\}$$

表示 xOy 平面单位圆周上点的集合.

另外,我们简单介绍一下集合的运算.

由属于 A 或属于 B 的所有元素组成的集称为 A 与 B 的并集,记作 $A\cup B$,即

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\};$$

由同时属于 A 与 B 的元素组成的集称为 A 与 B 的交集,记作 $A\cap B$,即

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\};$$

由属于 A 但不属于 B 的元素组成的集称为 A 与 B 的差集,记作 A/B,即

$$A/B=\{x \mid x\in A \text{ 但 } x\notin B\}.$$

不含任何元素的集合称为空集,记作$\varnothing$,并规定空集为任何集合的子集.

在本课程中所用到的集合主要是数集,即元素都是数的集合. 如果没有特别说明,以后提到的数均为实数.

区间是一类常用的数集.

设 a 和 b 都是实数,将满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数组成的数集称为开区间,记作(a,b),即

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}.$$

a 和 b 称为开区间(a,b)的端点,这里 $a\notin(a,b)$且 $b\notin(a,b)$.

类似地,称数集

$$[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

为闭区间,a 和 b 也称为闭区间$[a,b]$的端点,这里 $a\in[a,b]$且 $b\in[a,b]$.

称数集

$$[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\} \text{和} (a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$$

为半开半闭区间.

以上这些区间都称为有限区间. 数 $b-a$ 称为区间的长度. 此外还有无限区间:

$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}=\mathbf{R},$$
$$(-\infty,b]=\{x\mid -\infty<x\leqslant b\},$$
$$(-\infty,b)=\{x\mid -\infty<x<b\},$$
$$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x<+\infty\},$$
$$(a,+\infty)=\{x\mid a<x<+\infty\},$$

等等. 这里记号“$-\infty$”与“$+\infty$”分别表示“负无穷大”与“正无穷大”.

邻域也是常用的一类数集.

设 x_0 是一个给定的实数，δ 是某一正数，称数集：

$$\{x\mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$$

为点 x_0 的 δ 邻域，记作 $U(x_0,\delta)$. 称点 x_0 为这邻域的中心，δ 为这邻域的半径.（如图 1 - 1）.

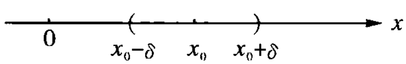


图 1 - 1

称 $U(x_0,\delta)-\{x_0\}$ 为 x_0 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(x_0,\delta)$，即

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}.$$

当不需要指出邻域的半径时，我们用 $U(x_0)$ 和 $\mathring{U}(x_0)$ 分别表示 x_0 的某邻域和 x_0 的某去心邻域.

2. 函数的概念

（1）函数的概念

在一个自然现象或技术过程中，往往同时有几个变量在变化着，他们并不是孤立地变化着，而是相互联系并遵循着一定的变化规律，现在我们先就两个变量的情形举两个例子.

例 1　圆的面积. 考虑圆的面积 A 与它的半径 r 之间的相依关系. 我们知道，它们之间符合如下公式

$$A=\pi r^2$$

而半径 r 在区间$(0,+\infty)$内任意取定一个数值时，由上式就可以确定圆的面积 A 的相应数值.

例 2　自由落体运动. 设物体下落的时间为 t，落下的距离为 s，假定开始下落的时刻为 $t=0$，那么 s 与 t 之间对应关系可以由公式 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$ 确定，其中 g 是重力加速度. 假定物体落地的时刻为 $t=T$，那么当 t 在

闭区间$[0,T]$上任意取定一个数值时，s 按照上述公式就有确定的值与之对应.

撇开这两个例子所涉及的变量的实际意义不谈，我们就会发现，它们都反映了两个变量之间的相依关系. 这种相依关系由一种对应法则来确定，根据这种对应法则，当其中的一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时，另一个变量就有确定的值与之对应，两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义 1 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集. 如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定的法则总有唯一确定的数值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$，其中数集 D 称为这个函数的定义域，x 称为自变量，y 称为因变量.

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $f(x)$在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$. 当 x 取遍 D 的各个数值，我们得到所有对应的 y 构成的数集

$$R=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$$

称之为函数的值域.

函数 $y=f(x)$中表示对应关系的记号 f 也可以用其他字母来表示，如“φ”，“F”等，这时函数就记为 $y=\varphi(x)$，$y=F(x)$等.

例 3 求函数 $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$的定义域.

解 要使数学式子有意义，x 必须满足

$$\begin{cases}4-x^2\geqslant 0,\\ x-1>0,\end{cases}\quad 即\begin{cases}|x|\leqslant 2,\\ x>1.\end{cases}$$

由此有

$$1<x\leqslant 2.$$

因此函数的定义域为$(1,2]$.

有时一个函数在其定义域的不同子集上要用不同的表达式来表示对应法则，称这种函数为分段函数. 下面给出一些今后常用的分段函数.

例 4 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,-\infty)$，值域 $R=[0,+\infty)$，如图 1-2 所示.

例 5 符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ 1, & x>0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R=\{-1,0,1\}$，如图 1－3 所示.

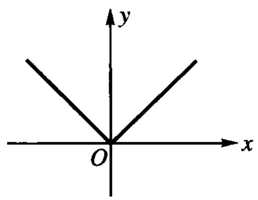


图 1－2

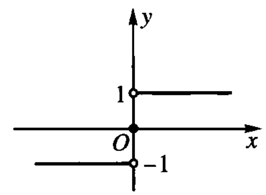


图 1－3

例 6　最大取整函数 $y=[x]$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 例如 $\left[-\frac{1}{3}\right]=-1$，$[0]=0$，$[\sqrt{2}]=1$，$[\pi]=3$ 等. 函数 $y=[x]$ 的定义域 $D=(-\infty,-\infty)$，值域 $R=\{$整数$\}$. 一般地，$y=[x]=n$，$n\leqslant x<n+1$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$，如图 1－4 所示.

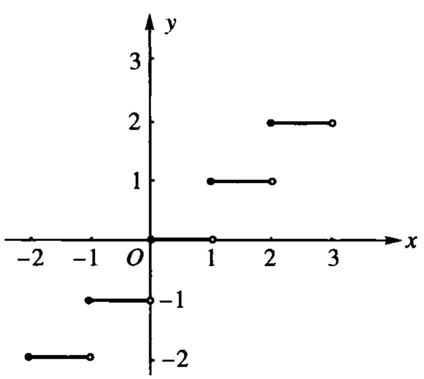


图 1－4

(2)反函数

定义 2 设函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 R，如果对于 R 中的每一个 y 值 $(y\in R)$，都可以从关系式 $y=f(x)$ 确定唯一的 x 值 $(x\in D)$ 与之对应，那么所确定的以 y 为自变量的函数 $x=\varphi(y)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数，它的定义域为 R，值域为 D.

习惯上，函数的自变量用 x 表示，因此反函数也可以表示为 $y=f^{-1}(x)$. 反函数 $y=f^{-1}(x)$ 与函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

例 7 求 $y=4x-1$ 的反函数.

解 由 $y=4x-1$ 可得 $x=\frac{1}{4}(y+1)$，然后交换 x 和 y，得 $y=\frac{1}{4}(x+1)$，即 $y=\frac{1}{4}(x+1)$ 是 $y=4x-1$ 的反函数.

3. 函数的几种特性

(1)有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，若存在某个正数 M，使得对任一 $x\in I$，都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $y=f(x)$ 在 I 上有界；如果不存在这样的正数 M，则称函数 $y=f(x)$ 在 I 上无界.

例如，函数 $y=\sin x$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，因为对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都有 $|\sin x|\leqslant 1$；函数 $y=\frac{1}{x}Z$ 在 $(0,1)$ 内无上界，但有下界.

从几何上看，有界函数的图像界于直线 $y=\pm M$ 之间.

(2)单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，如果对于区间 I 中的任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内是单调增加的；如果对于区间 I 中的任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内是单调减少的. 如图 1-5 所示.

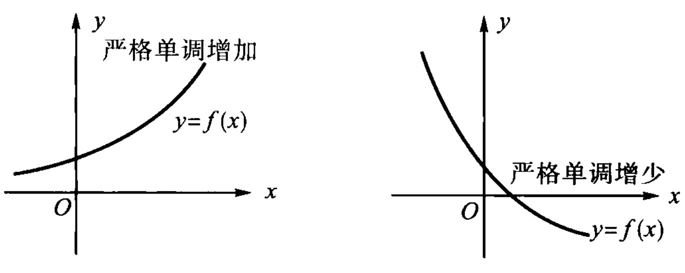


图 1-5

例如，函数 $f(x)=x^3$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内是严格单调增加的；函数 $f(x)=\cot x$ 在 $(0,\pi)$ 内是严格单调减少的.

从几何上看，若 $y=f(x)$ 是严格单调函数，则任意一条平行于 x 轴

的直线与它的图像最多交于一点，因此 $y=f(x)$ 有反函数.

(3)奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称（即若 $x\in D$，则必有 $-x\in D$），若对任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 是 D 上的奇函数；若对任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 是 D 上的偶函数.

奇函数的图像对称于坐标原点，偶函数的图像对称于 y 轴，如图 1－6 所示.

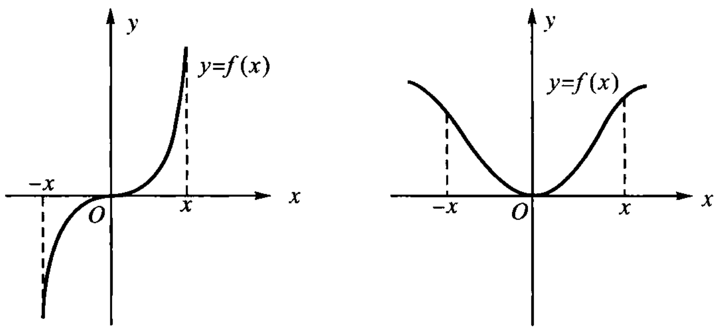


图 1－6

例 8　讨论函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性.

解　函数 $f(x)$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 是对称区间，因为

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$=\ln(x+\sqrt{1+x^2})^{-1}=-f(x)$$

所以，$f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数.

(4)周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在一个不为零的正数 T，使得对任意 $x\in D$，有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期. 通常，函数的周期是指它的最小正周期.

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 的周期为 2π；$f(x)=\tan x$ 的周期是 π.

4. 基本初等函数

在中学数学里已详细介绍过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数. 它们是研究各种函数的基础. 为了读者学习的方便，下面我们再对这几类函数作一简单介绍.

(1)幂函数

函数

$$y=x^{\mu}(\mu\text{ 是常数})$$

称为幂函数.

幂函数 $y=x^{\mu}$ 的定义域随 μ 的不同而异,但无论 μ 为何值,函数在 $(0,+\infty)$ 内总是有定义的.

当 $\mu>0$ 时,$y=x^{\mu}$ 在 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的,其图像过点(0,0)及点(1,1). 图 1-7 列出了 $\mu=\frac{1}{2},\mu=1,\mu=2$ 时幂函数在第一象限的图像.

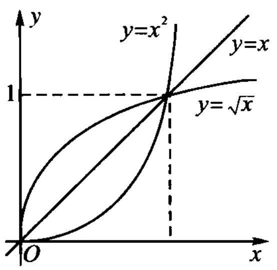


图 1-7

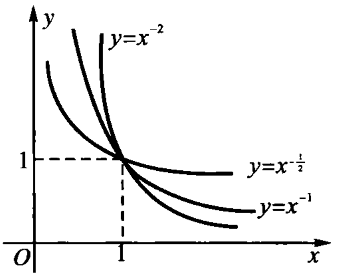


图 1-8

当 $\mu<0$ 时,$y=x^{\mu}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调减少的,其图像通过点(1,1). 图 1-8 列出了 $\mu=-\frac{1}{2},\mu=-1,\mu=-2$ 时幂函数在第一象限的图像.

(2)指数函数

函数

$$y=a^{x}\quad(a\text{ 是常数且 }a>0,a\neq1)$$

称为指数函数.

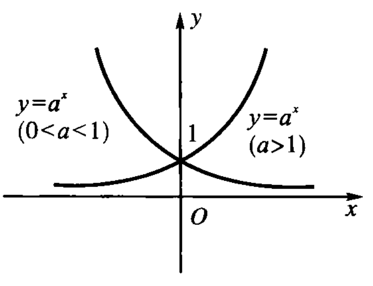


图 1-9

指数函数 $y=a^{x}$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$,图像通过点(0,1),且总

在 x 轴上方. 当 $a>1$ 时,$y=a^x$ 是单调增加的;当 $0<a<1$ 时,$y=a^x$ 是单调减少的,如图 1-9 所示.

以常数 e=2.71828182…为底的指数函数

$$y=e^x$$

是科技中常用的指数函数.

(3)对数函数

指数函数 $y=a^x$ 的反函数,记作

$$y=\log_a x \quad (a \text{ 是常数且 } a>0, a\neq 1)$$

称为对数函数.

对数函数 $y=\log_a x$ 的定义域为$(0,+\infty)$,图像过点$(1,0)$. 当 $a>1$ 时,$y=\log_a x$ 单调增加;当 $0<a<1$ 时,$y=\log_a x$ 单调减少,如图 1-10 所示.

科学技术中常用的以 e 为底的对数函数

$$y=\log_e x,$$

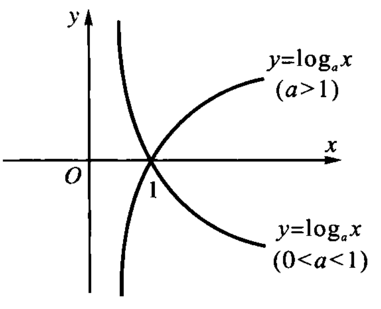


图 1-10

被称为自然对数函数,简记作

$$y=\ln x.$$

(4)三角函数

常用的三角函数有:

正弦函数 $y=\sin x$;

余弦函数 $y=\cos x$;

正切函数 $y=\tan x$;

余切函数 $y=\cot x$.

其中自变量以弧度作单位来表示.

它们的图形如图 1-11,图 1-12,图 1-13 和图 1-14 所示,分别称为正弦曲线、余弦曲线、正切曲线和余切曲线.

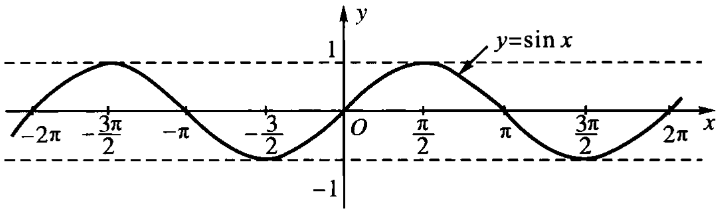


图 1－11

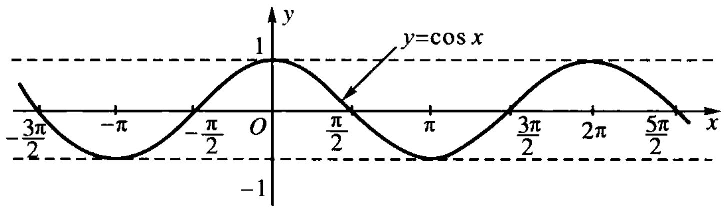
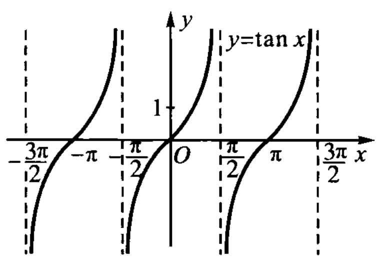


图 1－12



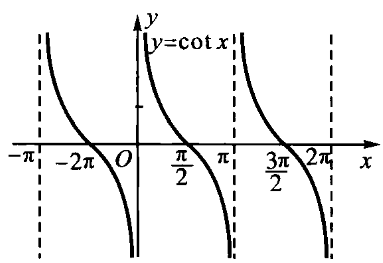


图 1－13　　　　图 1－14

正弦函数和余弦函数都是以 2π 为周期的周期函数，它们的定义域都为$(-\infty,+\infty)$，值域都为$[-1,1]$. 正弦函数是奇函数，余弦函数是偶函数.

正切函数 $y=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$的定义域为

$$D=\left\{x \,\middle|\, x\in\mathbf{R}, x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right\}.$$

余切函数 $y=\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$的定义域为

$$D=\{x \mid x\in\mathbf{R}, x\neq k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots\}.$$

正切函数和余切函数的值域都是$(-\infty,+\infty)$，且它们都是以 π 为周期的函数，都是奇函数.

另外，常用的三角函数还有正割函数 $y=\sec x$ 和余割函数 $y=$