金榜图书
JINBANG BOOKS · SINCE 1997

全国十二大考研辅导机构指定用书

2014 李永乐·王式安考研数学系列

数学历年真题权威解析

数学二

权威升级版

主编 李永乐 王式安

编委 王式安 刘喜波 李永乐 武忠祥
（按姓氏笔划排序）

权威名师与命题专家联手打造 考试知识复习与能力培养并重
多角度讲解试题开拓解题思路 分析解答透彻易懂更有针对性
详尽地归纳总结典型解题方法 综合提高运用知识的分析能力

国家行政学院出版社

金榜图书
JINBANG BOOKS · SINCE 1997

全国十二大考研辅导机构指定用书

2014李永乐·王式安考研数学系列

数学历年真题权威解析

数学二

权威升级版

主编 李永乐 王式安

编委 王式安 刘喜波 李永乐 武忠祥
（按姓氏笔划排序）

国家行政学院出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学历年真题权威解析. 数学二/李永乐,王式安主编. —北京:国家行政学院出版社,2013.3

ISBN 978-7-5150-0718-2

Ⅰ.①数… Ⅱ.①李… ②王… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—题解 Ⅳ.①O13—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 048827 号

敬告读者

本书封面贴有专用防伪标识,凡有防伪标识的为正版图书,请读者注意识别。

书　　名:数学历年真题权威解析(数学二)
主　　编:李永乐　王式安
责任编辑:姚敏华
装帧设计:金榜图文设计室
出版发行:国家行政学院出版社
　　　　(北京市海淀区长春桥路 6 号 100089)
电　　话:(010)68920640　68929037
编 辑 部:(010)68928761　68929009
印　　刷:北京高岭印刷有限公司
开　　本:787mm×1092mm　1/16
印　　张:17
字　　数:403 千字
版　　次:2013 年 4 月第 1 版
印　　次:2013 年 4 月第 1 次印刷
书　　号:ISBN 978-7-5150-0718-2
定　　价:40.00 元

图书如有印装质量问题,请与印刷厂联系调换　电话:(010)51906740

·前言·

从真题中你能够了解一个真实的考研数学，寻找考研数学的规律

真题是教育部考试中心一届又一届命题组老师们集体智慧的结晶，题目经典，又有规律可循。为了帮助广大考生能够在较短的时间内，准确理解和熟练掌握考研数学考试的出题方式和解题规律，全面提高解题能力，进而更好地驾驭考试，本书编写团队依据15年的命题与阅卷经验，并结合近10年的考研辅导和研究精华，精心编写了本书，真正起到帮助同学们提高综合分析和综合解题的能力。

历年来，研究生入学考试数学各学科知识点没有太大变化，而且各学科考查的重难点比较稳定，都是往年考试反复考查的内容，依据往年考题把握了这些重难点，我们就等于成功了一半。练真题，反复揣摩是有效把握这些重难点的最佳途径。考生们可以思考考过的知识点会再从什么角度命题，如何与没有考过的知识点结合起来考查，进而复习没有考过的知识点，这就可以从深度、广度上全方位把握知识点了，也因此，真题能够最有效的暴露我们的不足和复习误区，提供更有效的复习思路和策略，甚至可以说，真题就是最好的“辅导老师”，它告诉我们考试会考什么，怎么考，反过来又指导我们思考如何应对，也只有真题准确体现了考试所要求的能力、方法。

真题对大部分考生来说都是“陌生”的。真题命制科学，经过命题人的反复推敲，是市面上的练习题所无法比拟的，市面上的练习题，难易适中，命制科学，贴近考试要求的很少，做真题，反复揣摩，这能节省我们宝贵的复习时间，达到事半功倍的效果。紧紧抓住真题，在考试时也可以使我们做到从容应对。

本书共分三篇。第一篇给出最新的真题和解析，目的是让读者了解最新考题的结构形式和难易程度，方便复习备考。第二篇是历年的试题。第三篇将真题按考点所属内容分类并进行解析，各章编排如下：

1. 本章导读

设置本部分的目的是使考生明白此章的考试内容和考试重点，从而复习时目标明确。

2. 试题特点

本部分总结此章的历年考试出题规律，分析可能的出题点。

3. 考题详析

本部分对历年真题的题型进行归纳分类，总结各种题型的解题方法。这些解法均来自各位专家多年教学实践总结和长期命题阅卷经验。针对以往考生在解题过程中普遍存在的问题及常犯

的错误，给出相应的注意事项，对每一道真题都给出解题思路的分析，以便考生真正的理解和掌握解题方法。

4.练习题

数学复习离不开做题，只有适量的练习才能巩固所学的知识。为了使考生更好地巩固所学知识，提高实际解题能力，本书作者精心选取历年真题其他卷别的试题作为练习题，供考生练习，以便使考生在熟练掌握基本知识的基础上，达到轻松解答真题的水平。同时，练习题都配备了详细的参考答案和解析，以便考生遇到解答疑难问题时能及时得到最详尽的指导。

建议考生在使用本书时不要就题论题，而是要多动脑，通过对题目的练习、比较、思考，总结并发现题目设置和解答的规律性。请大家一定要在今后的复习中，时刻想到将各个方面的知识融会贯通，做好知识的串联和总结，从而检验自己对问题的把握程度，真正掌握应试解题的金钥匙，从而迅速提高知识水平和应试能力，取得理想分数。

另外，为了更好地帮助同学们进行复习，"李永乐考研数学辅导团队"特在新浪微博上开设答疑专区，同学们在考研数学复习中，如若遇到任何问题，即可在线留言，团队老师将尽心为你解答。请访问 weibo. com@金榜图书官方微博。

希望本书能对同学们的复习备考带来更大的帮助。对书中的不足和疏漏之处，恳请读者批评指正。

祝同学们复习顺利，心想事成，考研成功！

编者

2013 年 4 月

·目 录·

第一篇 最新真题

第二篇 历年试题

第三篇 真题解析

第一篇 最新真题

绝密★启用前

考生编号	
姓　　名	

2013 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（二）

（科目代码：302）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生姓名和考生编号；在答题卡指定位置上填写报考单位、考生姓名和考生编号，并涂写考生编号信息点。
2. 选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用黑色字迹签字笔或钢笔书写，涂写部分必须使用 2B 铅笔填涂。
4. 考试结束，将答题纸和试题册一并装入试题袋中交回。

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1) 设 $\cos x-1=x\sin\alpha(x)$,其中 $|\alpha(x)|<\dfrac{\pi}{2}$,则当 $x\to 0$ 时,$\alpha(x)$ 是

(A) 比 x 高阶的无穷小. (B) 比 x 低阶的无穷小.

(C) 与 x 同阶但不等价的无穷小. (D) 与 x 等价的无穷小.

(2) 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $\cos(xy)+\ln y-x=1$ 确定,则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(\dfrac{2}{n}\right)-1\right]$

(A) 2. (B) 1.

(C) -1. (D) -2.

(3) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x<\pi\\ 2, & \pi\leqslant x\leqslant 2\pi\end{cases}$,$F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,则

(A) $x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的跳跃间断点. (B) $x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点.

(C) $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续但不可导. (D) $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处可导.

(4) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1<x<\mathrm{e}\\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}, & x\geqslant \mathrm{e}\end{cases}$,若反常积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则

(A) $\alpha<-2$. (B) $\alpha>2$.

(C) $-2<\alpha<0$. (D) $0<\alpha<2$.

(5) 设 $z=\dfrac{y}{x}f(xy)$,其中函数 f 可微,则 $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$

(A) $2yf'(xy)$. (B) $-2yf'(xy)$.

(C) $\dfrac{2}{x}f(xy)$. (D) $-\dfrac{2}{x}f(xy)$.

(6) 设 D_k 是圆域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$ 位于第 k 象限的部分,记 $I_k=\displaystyle\iint_{D_k}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,(k=1,2,3,4)$,则

(A) $I_1>0$. (B) $I_2>0$.

(C) $I_3>0$. (D) $I_4>0$.

(7) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵,若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$,则 $\boldsymbol{B}$ 可逆,则

(A) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价.

(B) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价.

(C) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价.

(D) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价.

(8) 矩阵 $\begin{bmatrix}1 & a & 1\\ a & b & a\\ 1 & a & 1\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 相似的充分必要条件为

(A) $a=0,b=2$. (B) $a=0$,b 为任意常数.

(C) $a=2,b=0$. (D) $a=2$,b 为任意常数.

二、填空题:9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=$ ________.

(10) 设函数 $f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-e^t}\,dt$，则 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y=0$ 处的导数 $\left.\dfrac{dx}{dy}\right|_{y=0}$ $=$ ________.

(11) 设封闭曲线 L 的极坐标方程为 $r=\cos 3\theta\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$，则 L 所围成的平面图形的面积为 ________.

(12) 曲线 $\begin{cases}x=\arctan t,\\ y=\ln\sqrt{1+t^2},\end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的法线方程为________.

(13) 已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}$，$y_2=e^x-xe^{2x}$，$y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的3个解，则该方程满足条件 $\left.y\right|_{x=0}=0$，$\left.y'\right|_{x=0}=1$ 的解为 $y=$ ________.

(14) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是三阶非零矩阵，$|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，若 $a_{ij}+A_{ij}=0(i,j=1,2,3)$，则 $|\boldsymbol{A}|=$ ________.

三、解答题：15 ～ 23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)（本题满分 10 分）

当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小，求 n 与 a 的值.

(16)（本题满分 10 分）

设 D 是由曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$，直线 $x=a(a>0)$ 及 x 轴所围成的平面图形，V_x，V_y 分别是 D 绕 x 轴，y 轴旋转一周所得旋转体的体积，若 $V_y=10V_x$，求 a 的值.

(17)（本题满分 10 分）

设平面内区域 D 由直线 $x=3y$，$y=3x$ 及 $x+y=8$ 围成. 计算 $\iint\limits_D x^2\,dx\,dy$.

(18)（本题满分 10 分）

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)=1$. 证明：

（Ⅰ）存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$；

（Ⅱ）存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

(19)（本题满分 11 分）

求曲线 $x^3-xy+y^3=1(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$ 上的点到坐标原点的最长距离与最短距离.

(20)（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$，

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最小值；

（Ⅱ）设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

(21)（本题满分 11 分）

设曲线 L 的方程为 $y=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}\ln x\quad(1\leqslant x\leqslant e)$，

（Ⅰ）求 L 的弧长；

（Ⅱ）设 D 是由曲线 L，直线 $x=1$，$x=e$ 及 x 轴所围平面图形，求 D 的形心的横坐标.

(22)（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&a\\1&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&1\\1&b\end{bmatrix}$，当 a,b 为何值时，存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$，并求所有矩阵 $\boldsymbol{C}$.

(23)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$,记

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T$;

(Ⅱ)若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量,证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

2013年全国硕士研究生入学统一考试
数学(二)参考答案

一、选择题

(1)**【答案】** C.

【分析】 由 $\cos x-1=x\sin\alpha(x)$ 知

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\alpha(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2},$$

则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\alpha(x)}{x}=-\dfrac{1}{2}$.

故应选 C.

【评注】 本题主要考查无穷小量阶的比较.

(2)**【答案】** A.

【分析】 由方程 $\cos(xy)+\ln y-x=1$ 知,当 $x=0$ 时,$y=1$,即 $f(0)=1$,以上方程两端对 x 求导得

$$-\sin(xy)(y+xy')+\frac{y'}{y}-1=0.$$

将 $x=0,y=1$ 代入上式得

$$y'\Big|_{x=0}=1,\text{即 } f'(0)=1.$$

$$\lim_{n\to\infty}n\left[f\left(\frac{2}{n}\right)-1\right]=2\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)}{\frac{2}{n}}$$
$$=2f'(0)=2.$$

【评注】 本题主要考查隐函数求导及导数的定义.

(3)**【答案】** C.

【分析一】 $F(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x\sin t\mathrm{d}t, & 0\leqslant x<\pi.\\ \displaystyle\int_0^\pi\sin t\mathrm{d}t+\int_\pi^x2\mathrm{d}t, & \pi\leqslant x\leqslant2\pi.\end{cases}$

$$=\begin{cases}1-\cos x, & 0\leqslant x<\pi.\\ 2+2(x-\pi), & \pi\leqslant x\leqslant2\pi.\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to\pi^-}F(x)=\lim\limits_{x\to\pi^-}(1-\cos x)=2,$

$\lim\limits_{x\to\pi^+}F(x)=\lim\limits_{x\to\pi^+}[2+2(x-\pi)]=2,$

则 $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续.

$$F'_-(\pi)=\lim_{x\to\pi^-}\frac{1-\cos x-2}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{-\cos x-1}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sin x}{1}$$
$$=0,$$

$$F'_{+}(\pi)=\lim_{x\to\pi^{+}}\frac{2+2(x-\pi)-2}{x-\pi}=2,$$

故 $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处不可导,应选 C.

【分析二】 由于 $x=\pi$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点,则 $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续但不可导.

【评注】 本题主要考查变上限积分函数的连续性和可导性.显然【分析二】简单,【分析二】中用到三个常用结论:

1) 若 $f(x)$ 在$[a,b]$上仅有有限个第一类间断点,则 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积;

2) 若 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积,则 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在$[a,b]$上连续;

3) 若 $f(x)$ 在$[a,b]$上除 $x_0\in(a,b)$ 点外处处连续,$x=x_0$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点,则 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $x=x_0$ 处不可导.

(4)**【答案】** D.

【分析】 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{\alpha-1}}+\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^{\alpha+1}x}$,

由题设知$\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{\alpha-1}}$收敛,则 $\alpha-1<1$,即 $\alpha<2$.

又$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^{\alpha+1}x}=\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\ln x}{\ln^{\alpha+1}x}=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{y^{\alpha+1}}(y=\ln x)$

收敛,则 $\alpha+1>1$,即 $\alpha>0$,

故 $0<\alpha<2$.

【评注】 本题主要考查反常积分的敛散性.

(5)**【答案】** A.

【分析】 利用多元函数的求导法则得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}f(xy)+\frac{y^2}{x}f'(xy),\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}f(xy)+yf'(xy),$$

所以 $\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2yf'(xy)$.故选 A .

(6)**【答案】** B.

【分析】 利用二重积分的不等式性质.

【详解】 显然,在 D_2 上 $y-x\geqslant0$,且 $y-x$ 不恒等于零,则 $I_2=\iint\limits_{D_2}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0$.故选 B.

【评注】 实际上 $I_4<0$,由于 D_1,D_3 关于直线 $y=x$ 对称,再由轮换对称性得

$$I_1=\frac{1}{2}\left[\iint\limits_{D_1}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_1}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]=0,$$

$$I_3=\frac{1}{2}\left[\iint\limits_{D_3}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_3}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]=0.$$

(7)**【答案】** B.

【分析】 对矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$ 分别按列分块,记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$,$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n)$.

由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$ 有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n).$$

可见$\begin{cases} \boldsymbol{\gamma}_1 = b_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + b_{21}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + b_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n, \\ \boldsymbol{\gamma}_2 = b_{12}\boldsymbol{\alpha}_1 + b_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + b_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n, \\ \qquad \vdots \\ \boldsymbol{\gamma}_n = b_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1 + b_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + b_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n, \end{cases}$

即 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组可以由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表出.

因为 $\boldsymbol{B}$ 可逆,有$\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}$.类似地,$\boldsymbol{A}$ 的列向量组也可由 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组线性表出,因此选 B.

(8)**【答案】** B.

【分析】 两个实对称矩阵相似的充分必要条件是有相同的特征值.

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -a & -1 \\ -a & \lambda-b & -a \\ -1 & -a & \lambda-1 \end{vmatrix}=\lambda[\lambda^2-(b+2)\lambda+2b-2a^2].$$

因为 $|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & & \\ & \lambda-b & \\ & & \lambda \end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-b).$

由 $\lambda=2$ 必是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,即

$|2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=2[2^2-2(b+2)+2b-2a^2]=0$,故必有 $a=0$.

由 $\lambda=b$ 必是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,即

$|b\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=b[b^2-(b+2)b+2b]=0$,$b$ 可为任意常数.

所以选 B.

二、填空题

(9)**【答案】** $\sqrt{\mathrm{e}}$.

【分析】 $\left(2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(1+\dfrac{x-\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left[x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\right]}{x^2}=\frac{1}{2},$$

则$\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\mathrm{e}}$.

【评注】 本题主要考查"1^{∞}"型极限的求法.

(10)**【答案】** $\dfrac{1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-1}}}$.

【分析】 由 $f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$ 知,当 $f(x)=0$ 时,$x=-1$,

又$\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=0}=\left.\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}\right|_{x=-1}=\left.\dfrac{1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^x}}\right|_{x=-1}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-1}}}$.

【评注】 本题主要考查反函数求导法及变上限积分求导.

(11)【答案】 $\dfrac{\pi}{12}$.

【分析】 曲线 $L: r=\cos 3\theta\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$ 所围图形面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta\mathrm{d}\theta$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 6\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{12}.$$

【评注】 本题主要考查极坐标方程所表示的曲线围成的面积计算.

(12)【答案】 $y+x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\ln 2$.

【分析】 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\dfrac{t}{1+t^2}}{\dfrac{1}{1+t^2}}=t$,

$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1}=1$,

而 $t=1$ 时,$x=\dfrac{\pi}{4}$,$y=\ln\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}\ln 2$,则 $t=1$ 处的法线方程为

$$y-\frac{1}{2}\ln 2=-\left(x-\frac{\pi}{4}\right),$$

即 $\qquad y+x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\ln 2$.

【评注】 本题主要考查参数方程求导及导数的几何意义.

(13)【答案】 $e^{3x}-e^x-xe^{2x}$

【分析】 本题主要考查二阶常系数线性微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 解的性质和结构,关键是找出对应齐次线性微分方程的两个线性无关的解.

【详解】 由线性微分方程解的性质知

$y_1-y_3=e^{3x}$,$y_2-y_3=e^x$ 是对应齐次线性微分方程的两个线性无关的解,则

该方程的通解为 $y=C_1e^{3x}+C_2e^x-xe^{2x}$,其中 C_1,C_2 为任意常数.

代入初始条件可得,$C_1=1$,$C_2=-1$.

(14)【答案】 -1.

【分析】 由 $a_{ij}=-A_{ij}(i,j=1,2,3)$ 知 $\boldsymbol{A}^T=-\boldsymbol{A}^*$.

那么 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^T|=|-\boldsymbol{A}^*|=(-1)^3|\boldsymbol{A}^*|=-|\boldsymbol{A}|^2$,

即 $|\boldsymbol{A}|(1+|\boldsymbol{A}|)=0$,故 $|\boldsymbol{A}|$ 为 0 或 -1.

又 $\boldsymbol{A}$ 是非零矩阵,不妨设 $a_{11}\neq 0$. 于是

$|\boldsymbol{A}|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=-(a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2)\neq 0$,所以 $|\boldsymbol{A}|=-1$.

三、解答题

(15)【解法一】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{ax^n}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cos 2x\cos 3x+2\cos x\sin 2x\cos 3x+3\cos x\cos 2x\sin 3x}{anx^{n-1}}.$$

由于当 $n=2$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cos 2x\cos 3x}{anx^{n-1}}=\dfrac{1}{2a}$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x\sin 2x\cos 3x}{anx^{n-1}}=\frac{4}{2a},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\cos x\cos 2x\sin 3x}{anx^{n-1}}=\frac{9}{2a},$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{ax^n}=\dfrac{7}{a}$.

由题设知 $\dfrac{7}{a}=1$，故 $a=7$.

当 $n\neq 2$ 时，显然不合题意，所以 $a=7,n=2$.

【解法二】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{ax^n}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left\{\left[1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\right]\cdot\left[1-\dfrac{4x^2}{2}+o(x^2)\right]\cdot\left[1-\dfrac{9x^2}{2}+o(x^2)\right]\right\}}{ax^n}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{4x^2}{2}+\dfrac{9x^2}{2}\right)+o(x^2)}{ax^n}=\lim_{x\to 0}\frac{7x^2+o(x^2)}{ax^n}$$

则 $n=2,a=7$.

【解法三】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{ax^n}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)+\cos x(1-\cos 2x)+\cos x\cdot\cos 2x(1-\cos 3x)}{ax^n}$$

$$=\frac{1}{a}\left[\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(1-\cos 2x)}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot\cos 2x(1-\cos 3x)}{x^2}\right]$$

$$=\frac{1}{a}\left[\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\frac{4}{2}x^2}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\frac{9}{2}x^2}{x^2}\right]$$

$$=\frac{7}{a},$$

则 $a=7$.

【评注】 本题主要考查无穷小量阶的比较及“$\dfrac{0}{0}$”型极限的求法.本题中的方法是求“$\dfrac{0}{0}$”型极限常用的3种方法，即洛必达法则、泰勒公式及等价无穷小代换.

(16)**【解】** $V_x=\pi\int_0^a x^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x=\dfrac{3\pi a^{\frac{5}{3}}}{5}$，

$$V_y=\pi a^{\frac{7}{3}}-\pi\int_0^{a^{\frac{1}{3}}}y^6\mathrm{d}y$$

$$=\pi a^{\frac{7}{3}}-\frac{\pi a^{\frac{7}{3}}}{7}$$

$$=\frac{6\pi a^{\frac{7}{3}}}{7}.$$

因 $V_y=10V_x$，即 $\dfrac{6\pi a^{\frac{7}{3}}}{7}=10\cdot\dfrac{3\pi a^{\frac{5}{3}}}{5}$，解得 $a=7\sqrt{7}$.

【评注】 本题主要考查旋转体体积的计算.

(17)【分析】 求出直线 $x+y=8$ 与另两条直线的交点,把积分区域分为两块,直角坐标系下化二重积分为二次积分,积分次序选择先 y 后 x 较好.

【详解】 直线 $x+y=8$ 与直线 $x=3y$ 的交点为(6,2),

直线 $x+y=8$ 与直线 $y=3x$ 的交点为(2,6).

化二重积分为二次积分有

$$\iint_D x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{3}x}^{3x}\mathrm{d}y+\int_2^6 x^2\,\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{3}x}^{8-x}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{8}{3}\int_0^2 x^3\,\mathrm{d}x+\int_2^6\left(8-\frac{4}{3}x\right)x^2\,\mathrm{d}x=\frac{32}{3}+128=\frac{416}{3}.$$

(18)【证明】 (Ⅰ)因为 $f(x)$ 是区间 $[-1,1]$ 上的奇函数,所以 $f(0)=0$.

因为函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可导,根据微分中值定理,存在 $\xi\in(0,1)$,使得

$$f(1)-f(0)=f'(\xi).$$

又因为 $f(1)=1$,所以 $f'(\xi)=1$.

(Ⅱ)因为 $f(x)$ 是奇函数,所以 $f'(x)$ 是偶函数,故 $f'(-\xi)=f'(\xi)=1$.

令 $F(x)=[f'(x)-1]\mathrm{e}^x$,则 $F(x)$ 可导,且 $F(-\xi)=F(\xi)=0$.

根据罗尔定理,存在 $\eta\in(-\xi,\xi)\subset(-1,1)$,使得 $F'(\eta)=0$.

由 $F'(\eta)=[f''(\eta)+f'(\eta)-1]\mathrm{e}^\eta$ 且 $\mathrm{e}^\eta\neq 0$,得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

【评注】 本题主要考查罗尔定理和拉格朗日中值定理的应用.

(19)【分析】 这是一个条件极值问题,转化为函数 $d=\sqrt{x^2+y^2}$ 在条件 $x^3-xy+y^3=1(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$ 下的最值.构造拉格朗日函数时,注意利用等效性 $d^2=x^2+y^2$.

【详解】 曲线上任取一点 $p(x,y)$,其到原点的距离 $d=\sqrt{x^2+y^2}$,

构造拉格朗日函数 $L=x^2+y^2+\lambda(x^3-xy+y^3-1)$,令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=2x+\lambda(3x^2-y)=0 & (1)\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=2y+\lambda(-x+3y^2)=0 & (2)\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x^3-xy+y^3-1=0 & (3)\end{cases}$$

(1)－(2) 得 $(x-y)[2+\lambda+3\lambda(x+y)]=0$,即 $x=y$ 或 $x+y=-\dfrac{2+\lambda}{3\lambda}$,

(1)＋(2) 得 $(2-\lambda)(x+y)+3\lambda(x^2+y^2)=0$.

若 $x=y$,代入(3)可得 $x=y=1$,此时 $d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2}$;

若 $x+y=-\dfrac{2+\lambda}{3\lambda}$,代入 $(2-\lambda)(x+y)+3\lambda(x^2+y^2)=0$ 可得 $x^2+y^2=-\dfrac{\lambda^2-4}{9\lambda^2}$,

进一步有

$$xy=\frac{(x+y)^2-(x^2+y^2)}{2}=\frac{\dfrac{(\lambda+2)^2}{9\lambda^2}+\dfrac{\lambda^2-4}{9\lambda^2}}{2}=\frac{\lambda^2+2\lambda}{9\lambda^2}.$$

而 $x^3-xy+y^3=1$ 可变为 $(x+y)(x^2+y^2-xy)-xy=1$,把 x^2+y^2,$x+y$,xy 代入此方程得