

机械力学

下 册

华东纺织工学院

一九六一年二月印

第十二章 动力学引论

12-1 本章概念

运动学中只从几何观点研究物体的运动（因而运动学又可称为以时间为参量的“四维空间几何学”），并没有联系到决定运动的因素。虽然如此，运动学还是有其必要性：一、则随着工程技术与机械制造的发展，进行机械设计时，必先研究物体运动的几何性质。因而运动学有必要独立出来单独进行研究，成为一独立下门。另外，只有研究了物体运动的几何性质后，才能直接了当的研究运动与决定运动的因素之间的关系，即运动学的研究为动力学打开了方便之门。

动力学则是研究物体的运动与决定物体运动的因素之间的关系。这些因素依赖于所给物体周围的其它物体（外因——力），亦依赖于所给物体本身（内因——惯性）：

1. 力：

在静力学中我们已经知道，力是一个物体对于另一个物体的作用，这种作用使那受作用的物体改变其运动状态。换句话说，一个物体对于另一个物体运动的影响就在于力的作用。

在力学中只研究力对于它所作用之物体所产生的效果，而不考虑力产生的物理本质，由此我们即得个除约束公理而应用脱离体系去研究物体的运动。

物质的基本性质之一是具有反抗力的作用之能力，即有“维持”其运动的能力，这种性质称为惯性。物体所含物质的量不同，其反抗力的作用之能力亦就不同，也即惯性就不同。物体所含物质的量的量度（亦就是物体惯性的量度），称为物体的质量。

在日常生活中，我们借物体的重量来判断物体所含物质的量。但物体的重量与其所在的位置有关，即不仅取决于物体本身，故以物体的重量作为物体所含物质的量的量度显然是不合理的。另外，我们发现物体的重量与其在真空中自由下落的加速度的比值，对该物体来说是一个常量：

$$\mu = \frac{P}{g} = \text{常量 (相对于确定的物体)} \quad (12-1)$$

这个量只与物体本身有关，称为物质的质量。

12-2 二种单位制度

方程式(12~1)把力学的一个基本概念——力与质量——联系了起来，显然二者的量纲存在着一定关系。我们可把质量作为基本单位（因而，力就是导出单位），亦可把力作为基本单位（因而，质量就是导出单位）。为此，就产生了二种力学上的单位制度：

1. 绝对制 (C.G.S. 制)

以长度、时间、质量三个量的单位为基本单位：

长度——厘米

时间——秒

质量——克（在 4°C 及 760 mm 的气压下 1 cm^3 水的质量）。

则力的单位是导出单位；有的量纲由 (1) 式可知是 [质量] [长度] / [时间]²，因而单位是克·厘米/秒²，以“达因”表示。（例：质量为 1 克的物体其重量为 980 达因）。

2. 工程制 (实用制)

以长度、时间、力三个量的单位作为基本单位：

长度——米

时间——秒

力——千克（公斤）

则质量的单位是导出单位，质量的量纲由 (1) 式知是 [力] [时间]² / [长度]，因而单位是公斤·秒² / 米，以“工程质量单位”表示。（例：重 1 公斤的物体，其质量为 $\frac{1}{9.8}$ “工程质量单位”）。

12~3 定义

1. 质点：具有一定质量的几何点。

质点的概念是抽象的，是理想的模型，在客观世界中不存在着质点（因为物体总有一定的维数），虽然如此，由于下述二个原因，应用质点这个概念仍有其很大的必要性：

i. 所讨论物体维的数与所提问题中其它物体的维数相比较，或与所提问题中和其它物体之间的距离相比较，显得极其微小，其维数不起实际作用时，为了简化研究，往往就把该物体视为质点进行研究。（如在天体力学中，各行星的维数虽很大，但与其它恒星的距离相比较就显得极其微小，因而一般都把它视为质点）。

ii. 任一物体皆可视为一个由无数质点所组成的集合。因而

研究物体的运动规律可由分析质点的运动规律开始。

2. 质点系、质点的集合称为质点系。

作用于质点系内各质点的力为了以后分析的需要把它分为二种类型：

- i 内力 —— 该质点系内各质点间相互作用的力。
- ii 外力 —— 不属于该质点系的物体作用在这系统上的。

3. 不变质点系：各质点间的距离恒保持不变的质点系，称为不变质点系。显然，刚体就是由无数质点所组成的不变质点系。

1.1~4 公 理

和其他科学一样，动力学是以前人无数次的观测和实验归纳而得的真理条文（这些不能用更基本的定理加以证明的真理条文一般称为公理和定律）为基础，加以数学演绎，并以实践加以验证，得出动力学的结论。

整个动力学建立在下述四个公理上：

1. 质点不受力的作用时，其速度保持不变（即质点保持静止或作等速直线运动）。

—— 惯性定律

这一定律是首先由伽利略建立的，但牛顿在他的书中把它列为第一定律，因此一般都称这一定律为牛顿第一定律。此定律说明了质点惯性的性质——正如以前所述，质点的惯性就表现在质点保持其速度不变的性质，即既不改变速度的大小也不改变速度的方向，而在特殊情形下保持静止状态的性质。

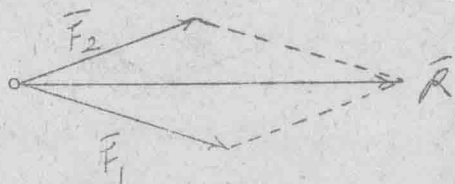
2. 质点的动量（质量 $\times$ 速度）对于时间的改变率等于作用于该质点的力。

—— 动力定律

惯性定律只说明了是改变质点速度的原因，而动力定律则表明了力与质点速度改变规律的关系。

3. 作用于同一质点的二个力可用这样一个力来代替，而不改变对质点运动的作用：此力的大小和方向就是以原来二力为邻边所作出之平行四边形的对角线。

—— 力的平行四边形定律



4. 二个质点彼此作用的力同时存在大小相等而方向相反，且在二质点的连线上

反作用定律

设有二个质点 m_A 与 m_B ，不论它们的运动情况如何，若质点 m_A 以力 $\vec{F}$ 作用于质点 m_B ，则质点 B 必同时以力 $\vec{F}'$ 作用于质点 m_A ，而且 $\vec{F}' = -\vec{F}$ ，并都沿连接 m_A 及 m_B 的直线作用



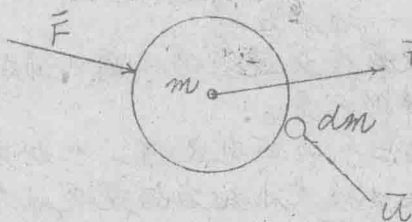
图 12-2

在应注意作用力与反作用力是分别作用在二个质点上的，如果研究质点 m_A 的运动，就只须考虑它所受的力 $\vec{F}$ ，而不必考虑它对质点 m_B 的作用力 $\vec{F}'$ ，反之，对于质点 B ，则只须考虑 $\vec{F}'$ 而不必考虑力 $\vec{F}$ 。

反作用定律提供了个决质点系动力学问题的基础，因为，前述的几个定律，都是就一个质点而言的，而由这一定律，则使我们有可能将质点动力学的原理推广，据已研究质点系动力学问题。

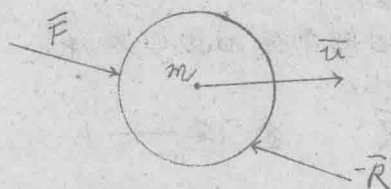
现在我们以上述公理为基础推导出变质量质点的普遍动力学方程，作为应用公理的一个举例：

设一质点，于某一瞬时，质量为 m ，速度为 $\vec{v}$ ，经过时间 t ，隔 dt 后质量变为 $m + dm$ ，当变化中分的质量不附着本体时的速度为 $\vec{u}$ （未附着前或脱离后的速度）则由公理 2, 3, 与 4 就可得：



$\vec{R}$ 、 $-\vec{R}$ 分别为代表 dm 附加上去或脱离时， m 与 dm 相互作用的力

图 12-3



取 dm 为脱离体，应用第二公理得：

$$\begin{aligned}\bar{R} &= \frac{dm(\bar{v} - \bar{u})}{dt} \\ &= \frac{dm}{dt}(\bar{v} - \bar{u}) \quad (\text{略去高阶微分}) \quad (12 \sim 2)\end{aligned}$$

取 m 为脱离体，应用第二公理与第三公理得：

$$\begin{aligned}\bar{F} + (-\bar{R}) &= \frac{d}{dt}(m\bar{v}) \\ &= m \frac{d\bar{v}}{dt} \\ &= m\bar{w} \quad (12 \sim 3)\end{aligned}$$

(2) 代入 (1) 就得：

$$m\bar{w} = \bar{F} + \frac{dm}{dt}(\bar{u} - \bar{v})$$

—— 动力方程式，表示出质点运动改变规律与其所受之力及其质量的关系。

特殊情形：

i 常质量问题 ($m = \text{const}$)

$$\bar{F} = m\bar{w}$$

(12 ~ 3)'

即：

若在正尔运动过程中，质点的质量保持不变时，则其质量和它的速度的乘积等于作用于质点上的力，亦就是加速度与力成正比，比例常数等于质量。

ii 所变化的质量未附着前或脱离后的速度和本体速度相同的问题 ($\bar{u} = \bar{v}$)

$$\bar{F} = m\bar{w}$$

(12 ~ 3)''

和上述情况相同

iii 所变化的质量在附着前或脱离后係静止 ($\bar{u} = 0$)

$$\bar{F} = \frac{d}{dt}(m\bar{v})$$

(12 ~ 3)'''

12 ~ 5

动力学二大基本问题 —— 动力方程式的应用

在一般工程问题中，我们所接触的皆是常质量问题，以后如无特别说明，我们都假定在运动过程中质量保持为恒值。

常质量问题的动力方程式 (12 ~ 3)'：在实际运用时，一般是用其投影表达式：

1. 自然表达式:

把动力学方程式 $\vec{F} = m\vec{w}$ 投影到自然坐标轴上, 即将:

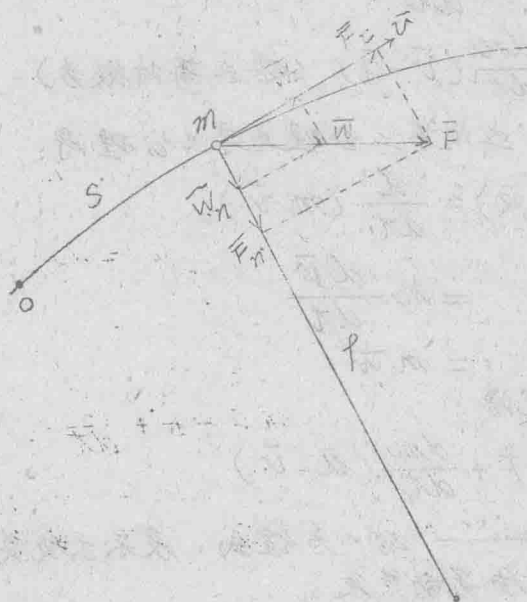


图 12-4

$$\begin{cases} F_t = m w_t = m \frac{dw}{dt} = m \frac{d^2 s}{dt^2} \\ F_n = m w_n = m \frac{v^2}{\rho} \end{cases} \quad (12-4)$$

式中: F_t —— 力在切线方向的投影
 F_n —— 力在法线方向的投影
 m —— 质点的质量
 v —— 速度
 ρ —— 轨迹的曲率半径

2. 坐标表达式

把动力学方程式投影到笛卡儿坐标轴上即将:

$$\begin{cases} X = m \ddot{x} \\ Y = m \ddot{y} \\ Z = m \ddot{z} \end{cases} \quad (12-5)$$

式中 X, Y, Z 代表力在 x, y, z 轴上的投影.

x, y, z 为质点的坐标

动力学方程式直接联系了质点的加速度与其所受力的关系.

因而由这方程式可解决下列两类问题:

1. 第一类问题:

已知质点的运动, 求在运动过程中每一瞬时该质点所

受的力。

——这类问题是归结为动力方程式 (12~4) 或 (12~5) 的微分。

i 若质点的运动按自然法给出, 即给定质点运动的轨道与沿轨道的运动方程式 $s=f(t)$, 则可由 (12~4) 中二式分别求出 $\overline{F}_T$, $\overline{F}_n$ 的大小, 至于 $\overline{F}_T$, $\overline{F}_n$ 的方向因轨道已知, 故亦可立即确定, 因而力 $\overline{F}$ 在每一瞬时的与方向。

ii 若质点的运动按坐标法给出, 即给定质点的坐标运动方程式

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \\ z = f_3(t) \end{cases}$$

则可由 (12~5) 中三式分别求出力 $\overline{F}$ 的三个投影 (把上述坐标运动方程式分别对时间 t 取二次导数后代入 (11~5) 式, 因而力 $\overline{F}$ 的大小与方向即可求得。

例一: 电梯以加速度 $\bar{a}$ 运动, 求重物 A 对地板的压力 A 的垂力为 P

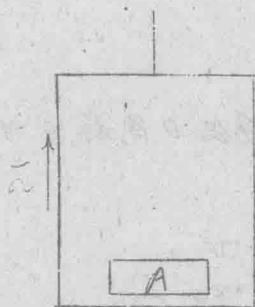
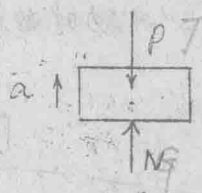
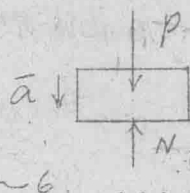


图 12~5

解: 1) 先取定脱离体——取重物 A 为脱离体; 画出受力图:



(1)



(2)

查 12~6 受力图

(1) 加速度向上时。

(2) 加速度向下时。

2) 根据动力方程式求未知数:

加速度向上时: (即开始上升或下降刹车时)

$$N - P = mW = \frac{P}{g} W$$

$$\therefore N = P \left(1 + \frac{W}{g} \right)$$

加速度向下时 (即上升刹车与开始下降时)

$$P - N = \frac{P}{g} W$$

$$\therefore N = p \left(1 - \frac{w}{g} \right)$$

例二：已知汽车以匀加速度 a 水平行驶，求车内单摆偏斜的角度



查 12-7

介：1) 摆偏斜的原因：取重物 M 改变当摆在铅直位置时，绳内张力 T 和重力皆系铅直，故车虽有加速度，但 M 未获加速度，即 M 逐渐偏后，偏后以后， T 和重力的合力就使 M 产生向前的加速度，当偏至一定角度 θ 后 T 与重力的合力使 M 所产生的加速度和 w 相等后，就处于稳定状态，即处于相对平衡状态。

2) θ 的求得：

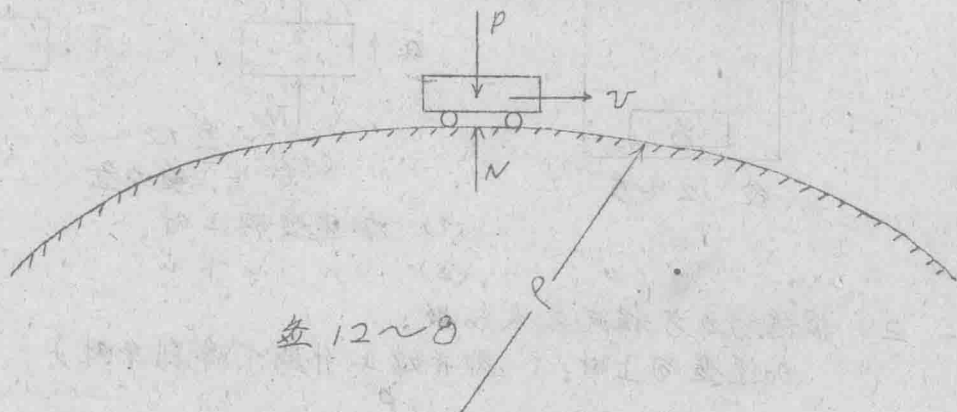
$$T \sin \theta = \frac{w}{g} w$$

$$T \cos \theta - p = 0$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1} \frac{w}{g}$$

刹车时，摆偏前关系式同上。

用此法可测是车子开动时的加速度（另由 θ 角求出 w ）



查 12-8

例三：重 p 的汽车在拱形桥上以匀速率 v 开动，求开至桥最高点时对桥的压力。设桥最高点的曲率半径是 ρ 。

解： $F_t = m \frac{dv}{dt} = 0$ $F_n = p - N = \frac{p}{g} \frac{v^2}{\rho}$;

$$\therefore N = p \left(1 + \frac{v^2}{\rho g} \right)$$

故桥造成楔形能减轻负荷（垂力 $-P$ 分压在桥上， $-P$ 分产生法向加速度，改变加速度 v 的方向）。曲率半径 P 愈小，对桥施的压力也就愈小。

例四：质点 P ，质量为 m ，在坐标平面 Oxy 内运动（图 12~9），其运动方程式为：

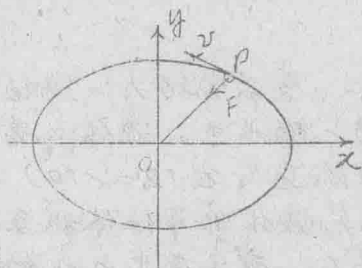


图 12~9

$$x = a \cos \omega t,$$

$$y = b \sin \omega t,$$

其中 a, b, ω 都是常数。求质点 P 所受的力 F 。

解：消去时间 t ，得

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

所以质点的轨迹是以 a 及 b 为半轴的椭圆。

将运动方程式对时间 t 求微分，代入方程式 (2.1~) 的前两式，得

$$X = -m a \omega^2 \cos \omega t = -m \omega^2 x,$$

$$Y = -m b \omega^2 \sin \omega t = -m \omega^2 y.$$

于是，力 F 的大小为

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2} = m \omega^2 \sqrt{x^2 + y^2} = m \omega^2 r,$$

其中 r 为动点 P 的矢径 r 的模。力 F 的方向余弦为

$$\cos(F, x) = \frac{X}{F} = -\frac{x}{r}, \quad \cos(F, y) = \frac{Y}{F} = -\frac{y}{r},$$

恰与矢径 r 的方向余弦的数值相等而符号相反，所以，力 F 与矢径 r 成比例而方向相反（即指向坐标原点 O ），这关系可用矢量方程式表为

$$F = -m \omega^2 r.$$

这种力称为有心力。

2. 第二类问题（逆问题）

已知作用在质点上的力 F ，需求这质点的运动规律——这类问题归结为动力方程式 (1.2~4), (1.2~5) 的积分，现在，在这一组方程式中，力 F 是已知的，因而 F_x, F_y 或 X, Y, Z 都已知。

例一：炮弹以速度 v 水平方向自砲膛飞出。砲身质量是 M ，炮弹质量是 m 。求射击后砲身的速度 u （反坐速度）。

解：和上例一样，在本例中所有外力都是铅垂的。因此这个质

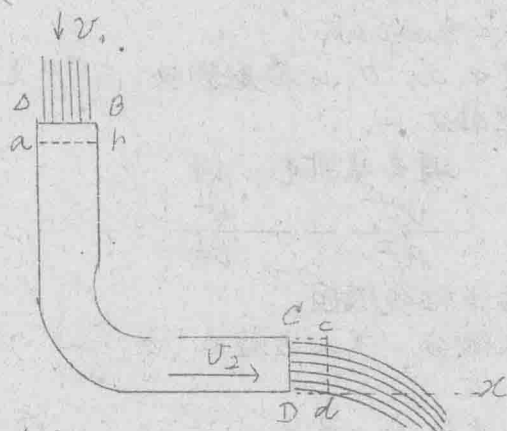
系的动量在水平轴上的投影保持为常量。因为在射出前，该质系是不动的，所以在射出后，它的动量仍等于零。于是：

$$Mv + mv = 0.$$

由此求得

$$v = -\frac{m}{M}V.$$

负号表示砲身向射出的反方向后退。



查 12~10

例二：管系的转头一端铅垂，另一端水平。液体从管子里流过（查 12~10）。已知液体的单位体积重量是 γ ，管子在出口处的横切面是 σ ，又液体的每秒流量（即 1 秒内流过液体的体积）等于 Q ，求液体给予管壁之总压力的水平分力。

解：现研究在容积 ABCD 以内的液体。以 N_x 表

示管壁给予这 ρ 分液体的水平方向压力。需求的液体给予管壁的压力按大小等于 N_x 。现应用动量定理来研究这 ρ 分液体，得：

$$\frac{d}{dt} \sum m v_x = N_x.$$

先求 $d \sum m v_x$ 的大小。即在时间 dt 以内，所研究的一 ρ 分液体的动量在 x 轴上投影的极微小变化。在这时间内，液体切面 AB 移到 ab 的位置，而另一个切面 CD 则移到 cd 的位置。设这液体的流动是稳定的，即速度的分布不随时间而改变；不难看出，需求的液体动量的投影在时间 dt 以内的变化等于容积 CDcd 和 ABab 中所包含液体的动量在水平线上的投影之差：但在容积 ABab 内所包含液体的动量在水平线上的投影显然等于零，因为在切面 AB 的速度 V_1 是铅垂的；因而

$$d \sum m v_x = m_2 V_2.$$

其中 m_2 表示在容积 CDcd 内的液体的质量，而 V_2 则是在管子出口处液体的流速。因为在容积 CDcd 内所包含的液体的重量等于 $\gamma Q dt$ ，所以

$$m_2 = \frac{\gamma}{g} Q dt.$$

因而
$$d \sum m v_x = \frac{r}{g} Q v_2 dt.$$

由此
$$\frac{d}{dt} \sum m v_x = \frac{r}{g} Q v_2.$$

所以
$$N_x = \frac{r}{g} Q v_2.$$

但 $Q = v_2 \sigma$; 由此得:

$$v_2 = \frac{Q}{\sigma}.$$

所以
$$N_x = \frac{r Q^2}{g \sigma}.$$

例三: 弹性的线系于A点并穿过一固定的光滑小环O, 线的自由端系一质量为m的小球M。线未被拉长时, 其长度 $l = AO$; 将线拉长1公分需加力长²m达因, 今沿AB方向把线拉长, 使其长度增加一倍, 并使小球有一与AB垂直的速度 v_0 。设线的张力与其伸长成正比, 并略去重力的作用, 试求小球的轨迹。

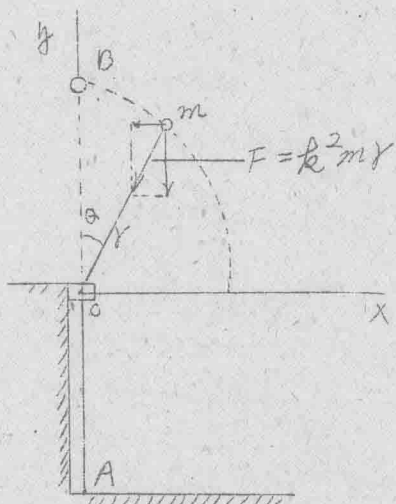


图 12 ~ 9

取坐标轴如各所示, 小环只受有线的弹性力作用, 故运动微分方程为:

$$m \ddot{x} = -k^2 m r \sin \theta \quad | \quad m \ddot{y} = -k^2 m r \cos \theta$$

$$\text{即: } m x \frac{dx}{dx} = -k^2 m x \quad | \quad m y \frac{dy}{dy} = -k^2 m y$$

$$\therefore x dx = -k^2 x dx \quad | \quad \therefore y dy = -k^2 y dy$$

$$\therefore x^2 = -k^2 x^2 + C_1 \quad | \quad \therefore y^2 = -k^2 y^2 + C_3$$

当 $t=0$ 时 $x=0, \dot{x}=v_0$

$$\therefore C_1 = v_0^2$$

当 $t=0$ 时 $y=l, \dot{y}=0$

$$\therefore C_3 = k^2 l^2$$

代入得: $\dot{x}^2 = v_0^2 - k^2 x^2$

心得: $\dot{y}^2 = k^2 (l^2 - y^2)$

$$\therefore dt = \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - k^2 x^2}}$$

$$\therefore dt = \frac{dy}{\sqrt{k^2 (l^2 - y^2)}}$$

$$\therefore t = \frac{1}{k} \sin^{-1} \frac{kx}{v_0} + C_2$$

$$\text{当 } t=0, x=0, \therefore C_2=0$$

$$\therefore x = \frac{v_0}{k} \sin kt \quad (A)$$

由 (A) 和 (B) 就得运动的轨迹:

$$\frac{k^2 x^2}{v_0^2} + \frac{y^2}{l^2} = 1$$

参考书:

理论力学基本教程

理论教程

理论力学

潘林 薛尔英

伏龙科夫

徐芝纶

习 题

12~1

水平面上放一重 10 公斤的物体，平台以 4 公尺/秒² 的加速度铅垂下降，求物体对平台的压力。

答：5.92 公斤。

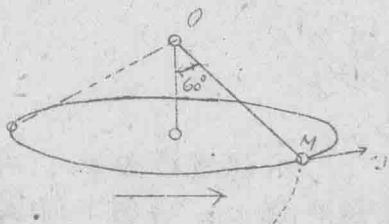
12~2

重 3 公斤的物体用线系住，线的他端用手握住。线在张力 $T = 4.2$ 公斤时即被拉断，问如手拉物体上升，手之加速度应多大，方能将线拉断？

答：3.92 公尺/秒²。

12~3

重 1 公斤的物体 M 系于 30 公分长的线上，线的另一端系于固定点 O 。物体在水平面内作圆周运动，成一圆锥摆形状，且线与铅垂线成 60° 角。求物体的速度 v 与线的张力 T 。



答： $v = 210$ 公分/秒；
 $T = 2$ 公斤。

12~4

电车之车身连同负荷共重 $Q_1 = 10$ 吨，车架与车轮共重 $Q_2 = 1$ 吨。如车身在弹簧上按 $x = 2 \sin 10$ 公分分之规律作铅垂简谐运动，求电车对水平直线轨道之最大与最小压力。

答： $N_1 = 13.04$ 吨；
 $N_2 = 8.96$ 吨。

12~5

重 1 克的小球在重力作用下坠落，并受到空气的阻力，其运动方程式为： $x = 490t - 245(1 - e^{-2t})$ ，其中 x 以公分计， t 以秒计，轴 Ox 铅垂向下。试求小球所受之空气阻力 R （以达因计）与其速度的关系。

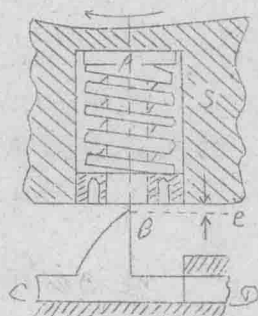
答： $R = 2v$ 。

12~6

为了避免因飞轮爆裂而发生不幸事故，应用如下的安全装置：在飞轮缘上装一物体 A ，以弹簧 S 将其压入轮内；当飞轮转速到达极限大小时，物体 A 的一端碰到沿门栓

CD的凸角B。活门栓即将蒸汽汽到汽缸的入口关闭。设物体A重1.5公斤，凸角B到飞轮边缘的距离 e 等于2.5公分，飞轮的极限转速为120转/分钟。又设物体A的质量集中在一点，此点在图上所示位置时飞轮转动轴147.5公分，求弹簧应有的刚度 C （即使弹簧缩短1公分所需之力的大小）。

答：14.8公斤/公分。



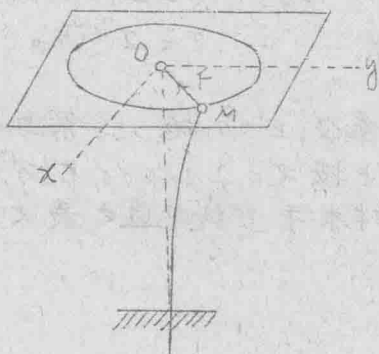
12~7

一质点质量为 m ，沿椭圆轨道 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 而运动。质点的加速度与 y 轴平行。当 $t=0$ 时，质点的坐标为 $x=0, y=b$ ，且其初速为 v_0 。求质点在轨道上任何位置时所受之力。

答：

$$F_y = -m \frac{v_0^2 b^4}{a^2 y^3}$$

12~3



小球质量为 m ，固定在铝垂弹性棒上，棒的下端固定在基座上。当棒偏出其铅垂平衡位置不远时，可以近似地认为小球中心是在通过其平衡位置之水平面 Oxy 内运动。设已知被拉出其平衡位置的小球按方程式：

$$x = a \cos kt;$$

$$y = b \sin kt.$$

而运动，其中 a, b, k 均为常数，且坐标原点取在小球的平衡位置上，试求被弯曲之弹性棒作用于小球之力的变化规律。

答：

$$F = m k^2 r$$

$$\text{其中 } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

12~9

重物在水平面成 30° 角的光滑斜面上滑下。设重物的初速等于2公尺/秒。问在多少时间后重物滑下了9.6公尺？

答：1.61秒。

12 ~ 10

质点 M 沿斜面上升，斜面与水平面成 $\alpha = 30^\circ$ 角，开始时质点的速度等于 15 公尺/秒。摩擦系数 $k = 0.1$ 。问此质点在停止前走了多少路程？又在多少时间内走过这段路程。

答：

$$S = \frac{v_0^2}{2g(k \cos \alpha + \sin \alpha)} = 19.55 \text{ 公尺}$$

$$T = \frac{v_0}{g(k \cos \alpha + \sin \alpha)} = 2.61 \text{ 秒}$$

12 ~ 11

一重物 P ，以初速 v 将其铅垂向上抛起，如空气阻力可以公式 $k^2 v^2$ 来表示，其中 v 为物体的速度。问物体所能到达的高速度及所经的时间各为多少。

答：

$$H = \frac{1}{2gk^2} (v_0^2 k^2 + 1) ;$$

$$T = \frac{\text{arc tg } v_0}{kg}$$

12 ~ 12

物体在空气中落下，其初速为 v_0 。空气阻力为 $R = k^2 v^2$ ，其中 v 为物体速度的大小， P 为物体的重量。问物体开始运动后经过 t 秒时，其速度多大？又其极限速度多大。

答：

$$v = \frac{1}{k} \cdot \frac{e^{kgt} - e^{-kgt}}{e^{kgt} + e^{-kgt}} ;$$

$$v_{\infty} = \frac{1}{k}$$

12 ~ 13

一物体重 $P = 10$ 公斤，在变力 $F = 10(1 - t)$ 公斤的作用下运动，其中 t 以秒计。

被物体的初速为 $v_0 = 20$ 公分/秒，且力的方向与速度的方向相同。问经过多少秒后物体停止？停止前走了多少路程？

答：

$$t = 2.02 \text{ 秒}$$

$$S = 69.2 \text{ 公分}$$

12 ~ 14

一物体重 9.81 公斤，在不均匀的介质中运动，阻力

按规律 $F = -\frac{2v^2}{3+5}$ 公斤而变化，其中 v 为速度，以

公尺/秒计， S 为所经的路程，以公尺计。设物体的初速为 $v_0 = 5$ 公尺/秒，试以时间的函数来表示物体所经的路程。

答： $S = 3[\sqrt[3]{5t+1} - 1]$ 公尺。

12~15

飞机 A 以速度 v_1 在距地面高度 h 处水平飞行。当飞机至与砲台 B 在同一铅垂线上时，砲台向飞机发出一砲，问：

- 1) 砲弹的初速 v_0 应满足何种条件方能打中飞机？
- 2) 砲弹应与水平成多大之角 α ？(空气阻力不计)。

答： 1) $v_0^2 \geq v_1^2 + 2gh$ ；

$$2) \cos \alpha = \frac{v_1}{v_0}$$

12~16

物体重 P ，以初速 v_0 与水平成 α 角抛出；在重力与空气阻力 R 的影响下运动。设空气阻力可视为与速度的一次方成正比： $R = kv$ ，求物体高出其最初位置的最大高度。

答： $h = \frac{v_0 \sin \alpha}{gk} - \frac{1}{gk^2} \ln(1 + kv_0 \sin \alpha)$ 。

在上题条件下，求物体(质点)的运动方程式。

答： $x = \frac{v_0^2 \cos \alpha}{kg} (1 - e^{-kgt})$

$$y = \frac{1}{kg} (v_0 \sin \alpha + \frac{1}{k}) (1 - e^{-kgt}) - \frac{t}{k}$$

在题 12~16 的条件下，物体(质点)到达最高点的水平距离 S 多大？

答： $S = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g(kv_0 \sin \alpha + 1)}$ 。

12~17

质点的质量为 m ，在圆心 O 的斥力的作用下运动，斥力按规律 $F = k^2 m r^2$ 而变化，其中 r 为圆的半径。开始时，质点在 $M_0(a, 0)$ 处并具有速度 v_0 ，其方向系平行