# 初等数学习题解答

## （代　数）

$$x^n + y^n = z^n$$

盐城师范专科学校数学科

# 前　　言

这是《初等数学习题解答》的《代数》分册。

全书按当前《初等代数》的主要内容与问题性质，分类列节、（考虑到有些专题，虽同属某一内容，但由于其典型性，因此仍专节列出。）每节有简要内容和解题方法，并举例启发，再附一定数量的习题，供读者思考练习。为使问题有利于读者独立思考，勿受编者思想束缚，除例题直接有较完整的解答外，习题一般只作较详细的提示，并集中附在最后，供读者参考。

考虑到近年来社会上有关初等数学方面的题解不在少数，本书力求不再重复，一般性的问题，均不再列入，而编选了一些比较综合、灵活和更富思考性的问题，但并未超越初等数学范围。书中有一些貌似几何的问题，但并不是用欧氏方法来处理的，而是通过分析，用代数方法来解决的，因此仍作代数问题编选在内。

全书共14节，720题（其中例题52个），可供社会知识青年、中学生中的数学爱好者和高等师范院校数学系学生阅读及中学数学教师教学、辅导时的参考。

限于水平，谬误难免，敬希读者批评指正。

盐城师范专科学校数学科

《初等数学习题解答》编写组

一九七九年六月

# 目　　录

# 一、代数式的恒等变换

**恒等式** 对于一切所允许取用的值，都能成立的等式，称恒等式。

常用的恒等交换公式有：

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$;

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$;

$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$;

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$;

$\quad = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$;

$(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n)^2$

$\quad = a_1^2 + a_2^2 + \cdots\cdots + a_n^2 + 2(a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots\cdots + a_{n-1}a_n)$;

$(a+b)^n = c_n^0 a^n + c_n^1 a^{n-1}b + c_n^2 a^{n-2}b^2 + \cdots\cdots$

$\quad + c_n^{n-1} ab^{n-1} + c_n^n b^n$;

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

$(a^m)^n = a^{mn}$;

$(ab)^n = a^n b^n$;

$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$;

$\log_a b^n = n\log_a b$;

$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$;

$a^{\log_a N} = N$。

常用的恒等变换方法有：

（1）进行加、减、乘、除、乘方、开方等运算，分式则通分，作因式分解、等量代换，简化代数式。

（2）比例式则进行合比、分比、更比等变换，或利用比例常数。

（3）化部分分式。

（4）待定系数法。

（5）数学归纳法。

**例1.** 设$a+b+c=0$，

试证：$a^3+b^3+c^3=3abc$。

**证** 由$a+b+c=0$，

有$a+b=-c$，

$a^3+b^3+3ab(a+b)=-c^3$，

$\therefore\ a^3+b^3+c^3=3abc$。

**例2.** 设$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$；

试证：$\dfrac{1}{a^{2R+1}}+\dfrac{1}{b^{2R+1}}+\dfrac{1}{c^{2R+1}}$

$$=\frac{1}{a^{2R+1}+b^{2R+1}+c^{2R+1}}。$$

**证** 由$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$，

则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{a+b+c}=0$，

即 $\dfrac{a+b}{ab}+\dfrac{a+b}{c(a+b+c)}=\dfrac{(a+b)(ac+bc+c^2+ab)}{abc(a+b+c)}$

$=0$，

即 $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc(a+b+c)}=0$，

因此$(a+b)$、$(b+c)$、$(c+a)$三式中至少有一个为0，不失一般性，设 $a+b=0$，

即 $a=-b$，

$$\therefore \quad \frac{1}{a^{2R+1}}+\frac{1}{b^{2R+1}}+\frac{1}{c^{2R+1}}=\frac{1}{c^{2R+1}}$$

$$=\frac{1}{a^{2R+1}+b^{2R+1}+c^{2R+1}}。$$

**例3**．设$xyz\neq0$，且$x\neq y$，$\dfrac{x^2-yz}{x(1-yz)}=\dfrac{y^2-xz}{y(1-xz)}$，

**试证：** $x+y+z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$。

**证** $\because \dfrac{x^2-yz}{x(1-yz)}=\dfrac{y^2-xz}{y(1-xz)}$，

则 $\dfrac{x^2-yz}{y^2-xz}=\dfrac{x-xyz}{y-xyz}$，

即 $\dfrac{x^2+y^2-yz-xz}{x^2-y^2+xz-yz}=\dfrac{x+y-2xyz}{x-y}$，

即 $\dfrac{x^2+y^2-yz-xz}{x+y+z}=x+y-2xyz$，

即 $2xyz=x+y-\dfrac{x^2+y^2-yz-xz}{x+y+z}$

$$=\frac{x^2+xy+xz+xy+y^2+yz-x^2-y^2+yz+xz}{x+y+z}$$

$$=\frac{2(xy+xz+yz)}{x+y+z},$$

$$\therefore x+y+z=\frac{xy+xz+yz}{xyz}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}。$$

**例4.** 分解因式：$(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$。

**解** 令$x=y$代入原式，得0，因此有因式$x-y$，

同理有因式$(y-z)(z-x)$，

因此 $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$

$=(x-y)(y-z)(z-x)\cdot[a(x^2+y^2+z^2)$

$+b(xy+yz+zx)]$，

令 $x=2$，$y=1$，$z=0$，

则 $1+1-2^5=1\cdot1\cdot(-2)\cdot(5a+2b)$，

即 $5a+2b=15\cdots\cdots(1)$

令 $x=1$，$y=-1$，$z=0$，

则 $5^2-1-1=2\cdot(-1)\cdot(-1)(2a-b)$，

即 $2a-b=15\cdots\cdots(2)$

解 (1)、(2)得 $a=5$，$b=-5$，

$\therefore$ $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$

$=5(x-y)(y-z)(z-x)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$。

**例5.** 试证：
$$1+\frac{a_1}{x-a_1}+\frac{a_2x}{(x-a_1)(x-a_2)}+\frac{a_3x^2}{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}+\cdots\cdots+\frac{a_nx^{n-1}}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots\cdots(x-a_n)}=\frac{x^n}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots\cdots(x-a_n)}.$$

**证** 用数学归纳法。

当$n=1$时，$1+\dfrac{a_1}{x-a_1}=\dfrac{x}{x-a_1}$原式成立。

假定当$n=K-1$时，原式成立，即

$$1+\frac{a_1}{x-a_1}+\frac{a_2x}{(x-a_1)(x-a_2)}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{a_{K-1}x^{K-2}}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots\cdots(x-a_{K-1})}$$

$$=\frac{x^{K-1}}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots\cdots(x-a_{K-1})},$$

则当 $n=K$ 时，

$$1+\frac{a_1}{x-a_1}+\frac{a_2x}{(x-a_1)(x-a_2)}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{a_{K-1}x^{K-2}}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots\cdots(x-a_{K-1})}$$

$$+\frac{a_Kx^{K-1}}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots\cdots(x-a_K)}=$$

$$=\frac{x^{K-1}}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots\cdots(x-a_{K-1})}+$$

$$\frac{a_Kx^{R-1}}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots\cdots(x-a_K)}$$

$$=\frac{x_K}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots\cdots(x-a_K)}。$$

∴原式成立。

## 习　题

1、设 $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=0$，试证：$(a+b+c)^3=27abc$。

2、设 $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3$，R是自然数，

试证：$a^{2R+1}+b^{2R+1}+c^{2R+1}=(a+b+c)^{2R+1}$。

3、设 $a+b+c=0$，

试证：$\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$。

4、设$a+b+c=0$，

试证：$\dfrac{a^7+b^7+c^7}{7}=\dfrac{a^5+b^5+c^5}{5}\cdot\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$。

5、设$a+b+c=0$，

试证：$\dfrac{1}{b^2+c^2-a^2}+\dfrac{1}{c^2+a^2-b^2}+\dfrac{1}{a^2+b^2-c^2}=0$。

6、设$\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1$，

试证：$\left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^{2n+1}+\left(\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)^{2n+1}$

$+\left(\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^{2n+1}=1$。

7、设$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1,\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=0$，

试证：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$。

8、设$\dfrac{y-z}{y+z}=a$，$\dfrac{z-x}{z+x}=b$，$\dfrac{x-y}{x+y}=c$，

试求a、b、c间关系。

9、设$2^x=5^y=10^z$，

试验：$z=\dfrac{xy}{x+y}$。

10、设$8^x=9^y=6^z$，

试证：$\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=\dfrac{6}{z}$。

11、设$m=a^x$，$n=a^y$，$m^yn^x=a^{\frac{2}{z}}$，（$a\neq1$）

试证：$xyz=1$。

12、设$(11.2)^a=1000$，$(0.0112)^b=1000$，

试证：$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=1$。

13、设$(a^3-a)^x=(a^2-a)^y(a^2-1)^z(a^2+a)$，
求x、y、z。

14、设$2^a\cdot5^b=2^c\cdot5^d=10$，
试证：$(a-1)(d-1)=(b-1)(c-1)$。

15、设$\frac{x(y+z-x)}{\lg x}=\frac{y(z+x-y)}{\lg y}=\frac{z(x+y-z)}{\lg z}$，

试证：$x^yy^x=z^yy^z=x^zz^x$。

16、设$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cy)^2$，

试证：$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$。

17、设$a_1^2+b_1^2=1$，$a_2^2+b_2^2=1$，$a_1a_2+b_1b_2=0$，

试证：$a_1^2+a_2^2=1$，$b_1^2+b_2^2=1$，$a_1b_1+a_2b_2=0$，

18、设$x=cy+bz$，$y=az+cx$，$z=bx+ay$，

试证：$\frac{x^2}{1-a^2}=\frac{y^2}{1-b^2}=\frac{z^2}{1-c^2}$。

19、设$\alpha+\beta+\gamma=0$，$a+b+c=0$，$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}=0$，

试证：$\alpha a^2+\beta b^2+\gamma c^2=0$。

20、设$ax^3=by^3=cz^3$，$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$，

试证：$\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$。

21、设$a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1$，
试证：$a^2+b^2=1$。

22、设$\frac{cy+bz}{l}=\frac{az+cx}{m}=\frac{bx+ay}{n}$，

试证：$\frac{bcx}{-al+bm+cn}=\frac{cay}{al-bm+cn}=\frac{abz}{al+bm-cn}$。

23、试证：$\frac{1}{(a-b)(a-c)(1+ax)}$

$+\frac{1}{(b-c)(b-a)(1+bx)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)(1+cx)}$

$=\frac{x^2}{(1+ax)(1+bx)(1+cx)}$。

24、设K、l、m、n是非负整数，$\frac{(x+1)^K}{x^l}-1$

$=\frac{(x+1)^m}{x^n}$对所有$x\neq0$成立，求K、l、m、n。

25、设$\frac{x}{a+2b+c}=\frac{y}{a-c}=\frac{z}{a-2b+c}$，

试证：$\frac{a}{x+2y+z}=\frac{b}{x-z}=\frac{c}{x-2y+z}$。

26、设$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，

试证：$\frac{a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}+d^{2n}}{a^{-2n}+b^{-2n}+c^{-2n}+d^{-2n}}=(abcd)^n$。

27、设$(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)$

$=(a+b+c+d)\cdot(bcd+cda+dab+abc)$，

试证：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。

28、二次三项式：$a_1x^2+b_1x+c_1$、$a_2x^2+b_2x+c_2$有公因式$x+p$，

试证：$(a_1c_2-a_2c_1)^2=(b_1c_2-b_2c_1)(a_1b_2-a_2b_1)$。

29、二项式$(1+x)^n$展开式中奇数项之和为A，偶数项之和为B，

试证：$A^2-B^2=(1-x^2)^n$。

30、若$(\sqrt{5}+2)^{2R+1}=m+a$，其中R、m是正整数，$0<a<1$，试证：$a(m+a)=1$。

31、分解因式：

（1） $(a+b+c)^5-(b+c-a)^5-(c+a-b)^5-(a+b-c)^5$；

（2） $(b+c)^3+(c+a)^3+(a+b)^3+(a+d)^3+(b+d)^3+(c+d)^3$；

（3） $b^2c^2d^2(b-c)(c-d)(d-b)-c^2d^2a^2(c-d)(d-a)(a-c)+d^2a^2b^2(d-a)(a-b)(b-d)-a^2b^2c^2(a-b)(b-c)(c-a)$。

32、设$n(a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots+a_n^2)=(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)^2$，

试证：$a_1=a_2=\cdots\cdots=a_n$。

33、试证：$a_1+(1-a_1)a_2+(1-a_1)(1-a_2)\cdot a_3+(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)a_4+\cdots\cdots+(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_{n-1})a_n+(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_{n-1})(1-a_n)=1$。

34、n为任意正整数，试证：

$$\frac{1-a^n}{1-a}+\frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})}{1-a^2}+\frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})(1-a^{n-2})}{1-a^3}+\cdots\cdots+\frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})\cdots(1-a)}{1-a^n}=n。$$

35、试证：$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2n}$

$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$。

36、设$ax^3+bx^2+cx+d$为完全立方，

试证：$b^2=3ac$，$c^2=3bd$。

37、试证：$\frac{b}{a(a+b)}+\frac{c}{(a+b)(a+b+c)}+\cdots\cdots$

$+\frac{1}{(a+b+\cdots+K)(a+b+\cdots+K+1)}$

$=\frac{b+c+\cdots+K+1)}{a(a+b+\cdots+K+1)}$。

38、试证：$\frac{a_1^{n-1}}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_n)}$

$+\frac{a_2^{n-1}}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\cdots(a_2-a_n)}+\cdots\cdots$

$+\frac{a_n^{n-1}}{(a_n-1)(a_n-2)\cdots(a_n-a_{n-1})}=1$。

39、设 $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots\cdots+a_n^2=p^2$，$b_1^2+b_2^2$

$+b_3^2+\cdots\cdots+b_n^2=q^2$，$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots\cdots+a_nb_n=pq$，

试证：$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{p}{q}$。

40、设$\frac{x}{y+z}=a$，$\frac{y}{z+x}=b$，$\frac{z}{x+y}=c$，

试证：$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}=1$。

41、设$x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$，

试证：$x^2y^2z^2=1$。

42、设$x\neq y\neq z\neq x$，且$y=\frac{a+bz}{c+dz}$，$z=\frac{a+bx}{c+dx}$，

$x=\frac{a+by}{c+dy}$，试证：$b^2+c^2+ad+bc=0$。

43、设$a(y+z)=x$，$b(z+x)=y$，$c(x+y)=z$，

试证：（1） $bc+ca+ab+2abc=1$；

（2） $\frac{x^2}{a(1-bc)}=\frac{y^2}{b(1-ca)}=\frac{z^2}{c(1-ab)}$。

44、试证：$(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n)(a_0-a_1x+a_2x^2-\cdots\cdots+(-1)^na_nx^n)$之积合并后只包含x的偶次幂。

45、设$x^2+x+1=0$，

求$x^{14}+\frac{1}{x^{14}}$的值。

46、设$x=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}$，

求$x^3+ax+b$的值。

47、设$\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=a$，

试证：$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$。

48、对x的任何值，等式

$(2x-1)^{20}-(ax+b)^{20}=(x^2+px+q)^{10}$恒能成立，

求a、b、p、q。

49、设方程：$ax^2+bxy+cy^2=0$ $(b^2>4ac)$与

$lx+my+n=0$所表示的三直线组成直角三角形，
试证：$(a+c)(al^2+blm+cm^2)=0$。

50、在什么条件下，能使$ax+by+cz=0$：

（1） 对于任意的x、y、z均成立；

（2） 对于所有适合$\alpha x+\beta y+\gamma z=0$的x、y、z成立；

（3） 对于所有适合$\alpha x+\beta y+\gamma z=0$，$Ax+By+Cz=0$的x、y、z成立。

# 2 不 等 式

现实世界中不等量的关系是大量存在的，反映到数学中就是不等式问题。

关于不等式，常用到如下的一些规定和性质：

（1）全量大于部分量。

（2）实数的顺序性。

（3）若 $a-b>0$，则 $a>b$，$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$。

（4）$(a-b)^2\geqslant 0$。（a、b是实数）

（5）若干个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数。

（6）一元二次方程$ax^2+bx+c=0$有实数解的条件：$b^2-4ac\geqslant 0$。

（7）$\log_a N$中$N>0$。

（8）$\sin\alpha\leqslant 1$

（9）三角形两边之和大于第三边。

解决不等式问题，除运用不等式的规定和性质外，重要的是熟悉式的恒等变换定理、公式和法则。

**例1.** n是自然数，试证：$\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[8]{8}\cdots\cdots\sqrt[2^n]{2^n}<4$。

**证** 设$S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots\cdots+\frac{n}{2^n}$，

则 $\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\cdots\cdots+\frac{n-1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}}$，

相减：$\frac{1}{2}Sn=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n+1}}$$

$$=1-\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}},$$

得 $s_n=2-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}<2$，

$\therefore$ $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[8]{8}\cdots\cdots\sqrt[2^n]{2^n}$

$=2^{\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots\cdots\frac{n}{2^n}}<2^2=4$。

**例2**．△ABC中，$\lg tgA+\lg tgC=2\lg tgB$，

试证：$\frac{\pi}{3}\leqslant B<\frac{\pi}{2}$。

**证** 据$\lg tgA+\lg tgC=2\lg tgB$，

有 $tgA\cdot tgC=tg^2B$，………（1）

和 $tgB>0$。…………………（2）

由 （1）：$tg^2B=tgA\cdot[-tg(A+B)]$

$$=-\frac{tgA\cdot(tgA+tgB)}{1-tgA\cdot tgB}。$$

即 $tg^2A+(tgB-tg^3B)\cdot tgA+tg^2B=0$，

tgA是实数，应有：$(tgB-tg^3B)^2-4tg^2B\geqslant0$，

即 $tg^4B-2tg^2B-3=(tg^2B+1)(tg^2B-3)\geqslant0$，

即 $tg^2B-3\geqslant0$，

$tgB\nless0$，$tgB\geqslant\sqrt{3}$，$B\geqslant\frac{\pi}{3}$。