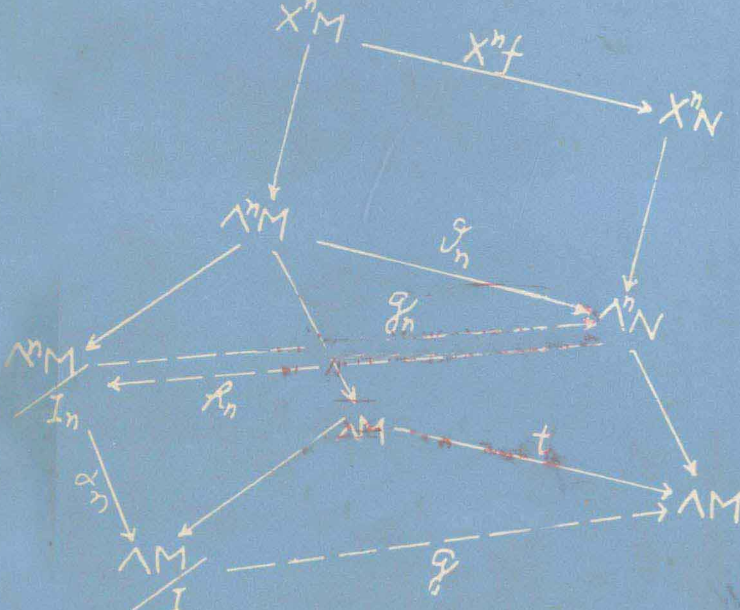
模论

〔英〕 T·S·Blyth

陈晋健 译

伍朝柱 校



广东民族学院

模　　論

对线性代数的一种处理

〔英〕T.S. Blyth 著

陈 晋 健 译

伍 朝 柱 校

译　者　前　言

为了举办以模为主题的代数讨论班，以便提高我系中、青年教师的现代数学素养，现把英国牛津大学S·T·Blyth教授的专著《模论》译成中文。考虑到国内尚未有同类题材的著述问世，并应许多兄弟院校同行的要求，我们特意多印了一些作内部交流。

如果没有广东民族学院领导的大力支持以及北京师范大学刘绍学教授的鼓励，本译作是不可能面世的。译稿蒙华南师范大学伍朝柱副教授仔细审校并提供了若干有益的建议。方捷同志协助校对了全部清样，在此表示感谢。

译者未加注明地订正了原著的一些疏漏和印刷错误。尽管如此，限于译者水平，不妥之处仍难避免，殷切期望读者指正。

译者国庆三十五周年
前夕于广东民族学院

序

代数的许多分支都与模论相关联。因为模的概念实质是向量空间概念的合适推广，所以在线性代数理论中，模论起着重要的作用这是不足为奇的。在群论及环论 的 较 高深领域，模也极其重要而且它也是同调代数，范畴理论以及代数拓扑这类高等研究课题的基础。本书旨在展示模的基本性质并阐明它在线性代数理论中的重要性。我们选择线性代数这个方面，只是由于我们觉得，它是展示这一理论的最自然的场所。

我们把本书划分为两部份。第一 部 份 由 1 ——11节组成，计划当作低年级高材生的一个自足教程。这部分我们编入了为进一步学习高等课程所必需的模与向量空间方面的全部基本材料。第二部份由12——17节组成，或许包括了这一课程应当讨论的材料。它对高年级的优等生以及想涉足通常称之为“高等线性代数”的人是相宜的。这部份包括了多重线性代数及外代数的基础，尤其我们阐明了外幂是怎样导出行列式的，它谅必是关于这一论题的最令人满意的方法。我们也讨论了主理想整区上有限生成模的结构并应用这些结构定理获得了关于向量空间的重要分解定理。（通常称作单个线性变换的理论。）

在每节的末尾，我们给出了大量的练习。这些练习，为巩固正文所学知识提供了充分的机会。为了满足读者解这些

练习题的需要，我们给出了许多的提示。

对于本书所涉及到的代数方面的预备知识，只要求关于群、环以及域方面的任何标准教程就足够了。虽然我们曾经保证，讨论将尽可能作到自足，但在许多场合，仍然不可避免地要援引标准的结果，在那些场合，我们已用符号（＋）标明。读者如碰到不熟悉的陈述，就应查阅抽象代数的标准教程。关于这一点，我们的教程《集论与抽象代数》（朗曼数学丛书）并非是不相宜的。

如果没有许多朋友的支持与赞助，作者是不可能看到自己的劳动成果的。尤其要感谢丹地大学的I.T Adamson博士，他曾对本书的初稿提出过宝贵意见；也要感谢牛津大学出版社的代数顾问，他曾提供有益的批评与建议。感谢K·P·Dunne女士，她组织打印了手稿。还有，Anita Brien女士，Marens Hutt女士以及Margaret Sweeney夫人。她们愉快地执行了分派的任务。最后要感感牛津大学出版社的全体职员，因为他们罕见的工作效率。

T·S·B　　　1976.5.

目　　录

第一部分　　模与向量空间

1

模；向量空间；代数

本教程将展示被称作线性代数这一数学分支的基础。读者已从各类初等课程中了解到，那些曾经在向量空间及线性变换的研究中出现的本质观念，已经应用于数学的许多领域。可是，在许多方面，向量空间这一观念显得过于狭窄。也许我们有一个办法来说明这点，这就是通过提出下面的问题：读者是否曾意识到，在大多数线性代数的入门书中，行列式仍然是对元素属于给定域的方阵来定义的，但到了讨论特征值的时候，却发觉矩阵的行列式的元素属于一个多项式环了？而相反地，行列式的各种性质却并未曾在更一般的背景下加以推广！这个事例足以表明，至少为了协调起见，在向量空间的定义中，纯量不应当被限制在一个域而宁可限制在一个环上（正如在多项式环的情形那样，在一定阶段，可以要求这个环是可换的）。原来，合适的推广显示出巨大的重要性并引导人们去探讨被称作模的在整个代数学中极为重要的结构。这一概念的重要性在于极大地扩展了包括群论，环论以及同调代数，范畴理论，代数拓扑等等较高深领域的应用范围。此外，并不企望这一教程变成百科全书，我们将

控制我们的视野，使之只限于研究那些能使我们展示线性代数的目标较易达到的应用课题。

在给出模的形式定义之前，我们要求读者回顾（＋）下面的概念。若E是一非空集，则在E上给出一个内合成律，指的是一个映射 $f: E \times E \to E$，对每个 $(x,y) \in E \times E$，我们总是按照通例，把 $f(x,y)$ 写成 $x+y$，xy 或 $x \cdot y$，除非在使用上述加号及乘号时可能导致混乱，在这场合，像 $x \top y$，$x * y$，$x \triangle y$ 等等这样一些记号是有用场的。一个半群意味着一个非空集E，在它上面定义了一个具结合性的内部合成律。一个**群**意味着是一个带有一个中性元素的半群并在其中，每个元素皆有逆。一个阿贝尔群指的是一个群，在其中合成律是可换的。一个**环**指的是一个非空集E，它被赋于两种内部合成律，传统上写作 $(x, y) \longmapsto x+y$ 以及 $(x, y) \longmapsto xy$，使得

1。E在加法下是一个阿贝尔群

2。E在乘法下是一个半群

3。$(\forall x, y, z \in E)$ $\quad x(y+z) = xy + xz$

$$(y+z)x = yx + zx$$

一个环若有关于乘法的中性元素，就称作**酉环**(unitary)。这样的中性元素写成 1_R。如果环的乘法是可换的，则这环就称作交换环，一个**域**指的是一个交换酉环，在其中，每一非零元具有关于乘法的逆元。（所以，非零元素构成一个乘法群。

下面，我们有必要去考虑形如 $f: F \times E \to E$（此处F及E是非空集）的映射。这样一个映射将用 $(\lambda, x) \longmapsto \lambda x$ 表示。在这里，虽然简单地表示 $\lambda \in F$ 及 $x \in E$ 使 λ 在左边并列，我们将称它为用F的元左乘E的元。在这场合，F的元

素通常称作纯量，所描述的映射称为在E上的**左外合成律**。用类似的方法，我们通过$(x,\lambda)\longmapsto x\lambda$描述的一个映射来定义E上的**右外合成律**。

注记 虽然形容词"外的"是对我们有帮助的，但我们应当注意，这样一个合成律在F＝E这一特殊场合使我们得到一个映射$f: E\times E\longmapsto E$从而外合成律便转化为E上"内的"合成律了。

定义 令R是一个酉环，一个R一模（或R上的模）指的是一个加法阿贝尔群M连同用$(\lambda,x)\longmapsto\lambda x$描述的左外部合成律。使得

1. $(\forall\lambda\in R)(\forall x,y\in M)\quad \lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$
2. $(\forall\lambda,\mu\in R)(\forall x\in M)\quad (\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$
3. $(\forall\lambda,\mu\in R)(\forall x\in M)\quad \lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$
4. $(\forall x\in M)\quad 1_R x=x$

在F是一个域这场合，一个F一模就称作F一向量空间，（或F上向量空间）。

注记 有些作者在上面的定义中宁可R不包括1_R，对于我们称作R一模的他们则称为一个酉R一模。

例1·1 每一个酉环R是一个R一模；其中的外部律就是R中的内部乘法。同样，任何域都是它自己上的向量空间。

例1·2 每个加法阿贝尔群M都是一个Z一模，其外部律

由$(m,x)\longmapsto mx$ 给定 此处

$$mx=\begin{cases} x+x+\cdots+x \quad (m\text{次}) & \text{若}m>0\\ 0 & \text{若}m=0\\ -|m|x & \text{若}m<0\end{cases}$$

例1·3 复数域C是一个R——向量空间，其外部律

$R \times C \longrightarrow C$是由

$$(\lambda, x+iy) \longmapsto \lambda(x+iy) = \lambda x + i\lambda y$$

来描述。

更一般地，若R是一酉环并且若S是R的包含1_R的一个子环，则R可以看作一个S——模；这里外部律由：

$$(s, r) \longmapsto sr$$

来描述。此处，sr是s与r在R中的寻常乘积。

例1·4 若R是一酉环而n是一个正整数，考察一切R的元素的n—重组在分量方式加法之下所成的阿贝尔群R^n：

$(x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)$。

用明显的方法定义一个外部律$R \times R^n \to R^n$，亦即是，规定

$$r(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (rx_1, rx_2, \cdots, rx_n)$$

我们看到，R^n变成一个R—模。特别，若F是一个域，则F^n就是一个F—向量空间。

例1·5 令R是一个酉环而令$R^{\mathbf{N}}$表示所有映射$f: \mathbf{N} \to R$（亦即R的元素的一切序列的集合）所成的集合，赋于$R^{\mathbf{N}}$以显然的加法，亦即是，对f，$g \in R^{\mathbf{N}}$，通过规定

$$(f+g)(n) = f(n) + g(n)$$

来定义 $f+g: \mathbf{N} \to R$

易见，$R^{\mathbf{N}}$在上述规则下构成一个阿贝尔群。

现在，通过规定$(r, f) \longmapsto rf$

此处 $(rf)(n) = r \cdot f(n)$

来定义一个外律 $R \times R^{\mathbf{N}} \to R^{\mathbf{N}}$

从而把$R^{\mathbf{N}}$变成一个R—模。

注记 像我们已经定义的那样的一个R—模通常称作左

R一模。这样称呼的理由是，对外律的记法，纯量被写在左侧。用写法$x\lambda$来替换λx并用$(x\lambda)\mu = x(\lambda\mu)$及$x1_R = x$来分别替换模的定义中的（3）及（4），我们可以得到一个右R一模，（在这场合，外律指的是一个映射$M \times R \to M$）以后，为方便起见，术语R一模将总是指左R一模；当我们有必要谈到一个右R一模时，我们就使用那个形容词。

定义 令R是一个交换酉环，则一个R——代数（或R上的代数）指的是一个R一模A连同它的一个内合成律

$A \times A \to A$

它由$(x,y) \longmapsto xy$

来描述，并称它为A的乘法，它对加法是可分配的并使得$(\forall \lambda \in R)(\forall x, y \in A) \quad \lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$

通过加强在上面定义的乘法的条件，我们可以得到各种各样的代数类型：例如，如果乘法是结合的，则A称作一个**结合代数**，（注意，在这场合，A在它的内加法律及乘法律之下是一个环。）；如果该乘法是交换的，则称A作**交换代数**；如果在A中存在一个乘法的中性元素，则称A为**酉代数**。在一个酉结合代数中，如果每个非零元素皆有逆，就称它为**可除代数**。

例1·6 C是R上的一个可除代数。

例1·7 令R是一个交换酉环并考察例1·5中的R一模R^N，给f，$g \in R^N$，通过规定

$$(fg)(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i)g(n-i)$$

来定义乘积映射 $fg: N \to R$

则容易验证，由$(f,g)\longmapsto fg$描述的合成律把$R^{\mathbf{N}}$变成一个R一代数。这个R一代数称作系数在R上的**形式幂级数代数**。使用这一传统术语的理由如下：令$t\in R^{\mathbf{N}}$是由

$$t(n)=\begin{cases}1 \text{ 当 } n=1\\ 0 \text{ 当 } n\neq 1\end{cases}$$

给定。于是，对每个正整数m，m一重合成映射

$t^m=t\circ t\circ\cdots\circ t$，是由

$$t^m(n)=\begin{cases}1 \text{ 当 } n=m\\ 0 \text{ 当 } n\neq m\end{cases}$$

给定。现在，考察（无需为如何想像$R^{\mathbf{N}}$的无穷多个元素的和而烦恼，或者为甚至连任何收敛的概念都没有而疑虑），关于$f\in R^{\mathbf{N}}$的‘形式幂级数’是由关系式

$$\theta=f(0)t^0+f(1)t^1+f(2)t^2+\cdots+f(m)t^m+\cdots\cdots$$

给定。此处$t^0=id_R$是R上的恒等映射，由于$\forall n\in N$，$\theta(n)=f(n)$故通常说‘f可以通过上述形式幂级数符号地表示。

练　习

1.1 令M是一个阿贝尔群而令End(M)是M上全部自同态的集合。（亦即全部群同态$f:M\to M$的集合）

证明，在合成律$(f,g)\longmapsto f+g$之下，End(M)是一个阿贝尔群。

此处$(\forall x\in M)$　$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

同时证明

（1）（End(M)，+，∘）是一个酉环。

（2）M在外合成律 $\mathrm{End}(M)\times M\to M$ 之下，是一个 $\mathrm{End}(M)$—模。

此处 $(f, m)\longmapsto f\cdot m=f(m)$

（3）若R是一个酉环并且若 $\mu: R\longrightarrow \mathrm{End}(M)$ 是一个环同态使得 $\mu(1_R)=\mathrm{id}_M$

则 在外合成律 $R\times M\longrightarrow M$ 之下，M是一个R—模。

此处 $(\lambda, m)\longmapsto \lambda m=[\mu(\lambda)](m)$

1.2 令R是一个酉环而M是一个阿贝尔群，证明M是一个R—模当且仅当存在一个保幺环同态

$f: R\longrightarrow \mathrm{End}(M)$.

〔提示：$\longrightarrow$：对每个 $r\in R$ 考虑由 $f_r(m)=rm$ 给定的映射 $f_r: M\longrightarrow M$。证明 $f_r\in \mathrm{End}(M)$，并且令f是由 $r\longmapsto f_r$ 所给定。〕

$\longleftarrow$：应用练习1.1（3）〕

1.3. 令G是一个有限阿贝尔群，如果G有m个元素

证明

$(\forall n, t\in Z)\ n\equiv t(\mathrm{mod}\, m)\Longrightarrow(\forall g\in G)\ ng=tg,$

在由 $(n/mZ, g)\longmapsto ng$ 给定的外律 $\mathbf{Z}/mZ\times G\longrightarrow G$ 之下，G是一个 $\mathbf{Z}/mZ$—模。

由此推断，每个以素数p为阶的有限阿贝尔群都可以看作是p元域上的向量空间。

1.4. 令S是一非空集，并且令R是一个酉环。如果F是所有映射 $f: S\longrightarrow R$ 的集合，使得

f对"几乎所有"的 $s\in S$（亦即除有限多个元素外一切的 $s\in S$）都满足 $f(s)=0$。

证明F在由关系式

$$(\forall s\in S)\qquad (f+g)(s)=f(s)+g(s)$$

$(\forall\lambda\in R)(\forall S\in S)\quad(\lambda f)(s)=\lambda f(s)$

给定的合成律之下是一个R—模。

1.5. 若R是一个交换酉环，证明，次数小于或等于n的一切多项式的集合$P_n[R]$是一个R—模；并且，在R上的一切多项式的集合$P[R]$是一个酉结合代数。

1.6. 令A是一个酉环，并且令它的中心是由

$\mathrm{Cen}(A)=\{x\in A;\ (\forall g\in A)xg=gx\}$

给定，证明，Cen(A)是一个酉环

若R是一个可换酉环，证明，A是一个酉结合R—代数当且仅当存在一个保幺环同态 $v:R\longrightarrow \mathrm{Cen}(A)$

〔提示 $\Longrightarrow$:由$v(r)=r\cdot 1_A$定义v，记外合成律如$(r,\ a)\longmapsto r\cdot a$

$\Longleftarrow$:由$(r,\ a)\longmapsto r\cdot a=v(r)a$定义一个外合成律〕

1.7. 令R及S是酉环并且令$f:S\longrightarrow R$是一个保幺环同态，若M是一个R—模并且由$(s,\ x)\longmapsto f(s)x$定义一个外合成律，证明，M能看作是一个S—模。

1.8. 令A_1，A_2，…，A_n都是R—模，考虑由n—重组$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ $x\in A_i$ $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$所组成的笛卡儿积集$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$，证明，$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$在例1.4中描述过的按分量方式合成律之下，是一个R—模。

2

子模，交与和

如果S是加法群G的一个非空子集并且若（$\forall x, g \in S$）$x+y \in S$，就称S是G的一个稳定子集。等价地说，S是G的一个稳定子集，如果G的合成律限制到$S \times S$上，诱导出S的合成律。（在不致引起混淆的情况下，这些合成律仍用同一符号+表示），在这场合，显然S是一个半群。G的一个子群指的是，G的一个非空子集S它既是稳定的同时关于诱导合成律它也是一个群。读者将想起（+）加法群G的一非空子集H是G的子群当且仅当

$$(\forall x, y \in H) \qquad x-y \in H$$

定义 一个R—模M的一个子模，指的是一个M的子群N，它在M的外合成律之下是稳定的。（亦即若（$x \in N$及$\lambda \in R$则$\lambda x \in N$）。

易见，R—模M的一非空子集N是M的一个子模当且仅当

$$(\forall x, y \in N)(\forall \lambda \in R)\ x-y \in N\text{及}\lambda x \in N \qquad (*)$$

这些条件可以合并为单独一个条件

$$(\forall x, y \in N)(\forall \lambda, \mu \in R) \quad \lambda x+\mu y \in N \quad (**)$$

为了看出这点，考察，若（$*$）适合，则$\lambda x \in N$且$-\mu y \in N$从而$\lambda x-\mu y=\lambda x+(-\mu y) \in N$，反之，若（$**$）适合，则取$\lambda=1_R$，$\mu=-1_R$，我们便有$x-y \in N$同时，取$\mu=0$，我们有$\lambda x \in N$。

一向量空间的子空间的概念类似地定义，同样，一个R

一代数A的非空子集B是A的一个子代数。如果

$$(\forall x,\ y\in B)(\forall\lambda\in R)\ x-y\in B,\ xy\in B,\ \lambda x\in B.$$

例2.1 令R是一个酉环并把它看作为一个R—模，（例1.1）则R的子模恰是R的左理想。同样的，若把R看作一个右R—模，则它的子模恰是R的右理想。

注记 虽然我们曾同意，当谈论有关模的时候，可以省略形容词“左的”，但当涉及左理想当作R的子模的时候，保留这个形容词却是必要的（除非R是可换的场合）

例2.2 借用分析学中的某些概念，令**C**是连续函数$f:[a,b]\longrightarrow R$的集合。显然，C可以赋予一个R—向量空间的结构（就象在例1.5中的那样）则在$[a,b]$上的可微函数所组成的子集D就是C的一个子空间。因为，若$f,\ g\in D$，则正象在分析中已经证明的那样，

$$(\forall\lambda,\ \mu\in R)\quad \lambda f+\mu g\in D,$$

例2.3 若G是一个阿贝尔群，则Z—模G的子模实际就是G的子群。

例2.4 如果定义C上的乘法$(f,g)\longmapsto fg$此处

$$(\forall x\in[a,b])\quad (fg)(x)=f(x)g(x)$$

则例2.2中的向量空间C就变成R—代数。容易验证，子空间D就是C的一个子代数。

我们的第一个结果虽说简单然而却是重要的。

定理2.1 R—模M的任一簇子模的交仍是M的子模。

证．假设$(M_i)_{i\in I}$是M的一簇子模，于是$\bigcap_{i\in I}M_i\neq\phi$，这是由于每个子模都是一个子群，从而都包含0。现在，因每个M_i是M的子模。故

$$x, y \in \bigcap_{i\in I} M_i \Longrightarrow (\forall i \in I)\, x, y \in M_i$$

$$\Longrightarrow (\forall i \in I)\, x - y \in M_i$$

$$\Longrightarrow x - y \in \bigcap_{i\in I} M_i$$

并且 $x \in \bigcap_{i\in I} M_i, \lambda \in R \Longrightarrow (\forall i \in I)\ \lambda x \in M_i \Longrightarrow \lambda x \in \bigcap_{i\in I} M_i$

从而$\bigcap_{i\in I} M_i$是M的子模。□

上述结果引导我们去考虑下面的事实，假定S是R一模M的一个子集（也可能是空集），同时考察M的包含S的一切子模的簇，**由定理2.1**，这个簇的交仍是M的一个子模，它是M的包含S的最小子模，称为由S生成的M的子模。我们将给出这个子模的明确的描述。为此，我们需要下面的概念。

定义 令M是R一模而S是M的非空子集，则$x \in M$说是S的元素的一线性组合，如果存在$x_1, x_2, \cdots, x_n \in S$及$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in R$使得$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$，记S的元素的一切线性组合的集为**LC(S)**

定理2.2 令S是R一模M的一个子集，如果〈S〉表示由S生成的子模 则

$$\langle S \rangle = \begin{cases} \{0\} & 若 S = \phi \\ LC(S) & 若 S \neq \phi \end{cases}$$

证：显然若$S = \phi$，则包含S的M的最小子模也就是M的最小子模，亦即零子模{0}，于是，假设$S \neq \phi$，易见、