应用数学中的泛函分析

蹇人宜 著

科学出版社

应用数学中的泛函分析

蹇人宜 著

科 学 出 版 社
北 京

内容简介

本书主要介绍泛函分析在数学中的应用，分为两大部分，第 1~4 章取材较为广泛，介绍应用数学研究中常用到的泛函分析的基本概念、基本定理和基本方法，并强调它们在相应领域中更为简便的形式. 第 5~8 章简要地介绍泛函分析在应用数学的若干分支——数值分析、微分方程、小波分析、凸分析与最优化方法和随机过程等上的应用. 本书着重泛函分析思想的具体实现，不在细节上做过多的讨论.

本书可作为从事应用数学研究的研究生及数学工作者的泛函分析工具书，也可作为从事基础数学(非泛函分析方向)研究的研究生及数学工作者的参考资料，部分内容亦可作为数学类高年级本科生的选学材料.

图书在版编目(CIP)数据

应用数学中的泛函分析/蹇人宜著. —北京：科学出版社，2013.7
ISBN 978-7-03-038114-9
Ⅰ. ①应… Ⅱ. ①蹇… Ⅲ. ①应用数学–泛函分析–研究
Ⅳ. ①O177
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013) 第 148984 号

责任编辑：徐园园 赵彦超 / 责任校对：张小霞 彭 涛
责任印制：钱玉芬 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2013 年 7 月第 一 版 开本：B5(720 × 1000)
2013 年 7 月第一次印刷 印张：28
字数：548 000

定价：118.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

前言

恩格斯在其名著《自然辨证法》一书中，精辟地指出:“数学是研究空间形式和量的关系的科学.”依现代的观点来理解，这意味着：数学不仅研究空间的形式、数量的关系，尤为重要的是研究空间形式与刻画它们的量之间的关系. 用现代数学语言来讲，要研究的是某些特定对象的代数结构、几何 (拓扑) 结构、序结构. 实数理论是这种研究的最简单、最直观的理论.

好奇的读者会问：为什么如赋范线性空间、紧致性、线性泛函等这些属于纯数学的分支 (泛函分析) 中的概念会是从事应用数学研究的人所必备的知识? 理由其实很简单：应用数学 (applied mathematics)(按国际上通行的分类，计算数学也属于应用数学) 顾名思义，是被应用的数学，也就是说，它本身就是数学的一个分支，其特点是将 (纯) 数学的理论和方法，用来处理从物理、工程、生物、经济乃至军事等学科中提出的涉及空间形式和量的关系的问题. 另一方面，应用数学在其自身的发展过程中逐渐形成了一套将经典数学、现代纯数学用来解决其他学科提出的数学问题的技巧和方法. 这些技巧和方法的一个重要特征是高度抽象性. 从其诞生开始，泛函分析就与应用数学密不可分，例如，Sobolev 关于数学物理方程的讨论，von Neumann 关于量子力学和博弈论的讨论，诺贝尔经济学奖得主 Kantorovich 关于非线性方程的数值解以及线性规划的问题的研究，诺贝尔经济学奖得主 Deblue 关于价值理论的研究，Aubin 对博弈论的现代处理方式，Rockafellar 的凸分析等，都深刻地应用了那个时代的泛函分析的最新成果. 实际上，他们所获得的成果以及所使用的方法，深深地影响着今天的研究工作. 粗略地说：这些方法是将具体的分析问题抽象为纯粹的代数和拓扑 (几何) 结构，甚至在序的结构形式中去研究，同时获得了综合应用数学与几何 (拓扑) 的手段来处理问题的新方法.

纯数学与应用数学的许多课题的现代处理问题的方法的特点是努力摒除问题的非本质的细节，清晰地指明问题的基本假设及相应推论的平台的数学结构. 这些努力常导致某种程度的抽象化，它将原来所考虑的具体性质暂时放在一边，而将问题用显著的公理化的面貌呈现，这是由于很多貌似不同的问题新呈现出共性. 由于这些共性，便可将特殊问题的解法纳入一个一般的理论框架中.

本书试图为从事应用数学研究的研究生和年轻的数学工作者提供一个泛函分析基础工具包. 全书分为两大部分，前面 4 章介绍应用数学中常用到的泛函分析的基本概念、基本定理和基本方法. 在这些知识的介绍中，着重介绍它们在应用中更为方便的形式，如 Hahn-Banach 定理，更强调的是它的几何形式. 为了使读者易于

理解其核心思想, 若干定理的论证放在几何结构很好的 Hilbert 空间的平台上进行, 如关于紧算子和 Fredholm 算子的理论. 后面 4 章简要地介绍泛函分析在数值分析、微分方程、小波分析、最优化的理论和方法等领域中的应用. 我们着重介绍的是泛函分析思想方法的具体实现, 不在细节上过多讨论. 后 4 章是彼此独立的, 它们是针对不同研究方向对泛函分析需求服务的. 因此, 读者可以按自己的需要选学其中的章节. 又鉴于第 1 章所述的内容, 在许多本科院校的课程中也有安排, 具备这些知识的读者, 可以跳过它, 直接从第 2 章读起. 对于尚不了解度量空间的读者, 建议通过自学第 1 章以达到对相关知识的了解. 根据笔者长期担任研究生泛函分析基础课的教学经验, 按每周 5 学时的安排, 教师可在一个学期内将第 2~4 章的基本内容讲完. 至于后面的 4 章, 则可根据研究生的需求, 按每周 2~3 学时的安排, 在一个学期内讲完. 依照华罗庚院士的教学思想, 在本书的编写过程中, 我们力求做到"生书熟讲, 熟书生温" 的模式, 因而有一些似乎应该在后面才出现的知识点被安排在前面, 而一些在前面也已出现过的知识点, 在后面又以别的面目出现. 在编写中, 除了对抽象的概念、定理的背景进行必要的介绍外, 还力图通过对若干定理 (如凸函数的连续性) 证明的最基本的思想做仔细的剖析, 向青年学者揭示数学发现的一些基本途径. 我们还安排了 300 多道难易不等的习题, 其中一些是促进对理论和方法的理解的, 一些是对所讲的内容的补充, 希望读者能通过自己的努力完成它们 (至少其中的大部分). 本书的取材较为广泛, 并不完全拘泥于应用数学的需要, 所以本书也可作为非泛函分析方向及其他数学专业方向的研究生和数学工作者的参考资料.

本书所使用的数学符号是标准的. 与国内外通行的数学书中的用法大体一致; 在一些地方, 由于所涉及问题的需要, 向量记号也偶用黑体字母.

从 20 世纪 80 年代中期起, 笔者先后在国内数所高等学校承担应用数学、基础数学等专业的硕士研究生的泛函分析课的教学工作, 并为某些研究方向的硕士生介绍他们所需的泛函分析的方法. 在教学过程中, 对这部分内容的取舍, 与有关方向的导师深入交换意见. 本书就是由作者近三十年的授课讲稿整理加工而成. 不少内容以及它们的安排, 得到了听课的同学们的中肯建议. 特别是本书形成的过程中, 与很多年轻同事进行了多次深入讨论, 广泛听取他们的意见, 从而避免了不少错误, 使本书增色不少, 他们是: 向淑文教授、索洪敏教授、高岳林教授、李春光教授、黄永东教授、马少娟教授、余国林教授、安恒斌教授和李凤军教授. 我的关门弟子范亚静同志将她整理得很好的听课笔记借给我, 使我少走一些弯路, 并且她还对书中内容的取舍和安排, 提出了若干独到的见解, 使本书增色不少; 李秋富同志仔细地校对了打印稿, 并改正了很多打印错误. 我校科研处王晓娥教授为本书的出版也付出了许多艰辛劳动. 在此谨向前面提到的同志致以由衷的感谢.

最后, 还要特别感谢北方民族大学各级领导的支持. 我校领导一向重视学科建

设, 鼓励老师写作, 本书的出版主要得到了北方民族大学出版基金的资助, 此外还得到了国家自然科学基金重大研究计划培育项目 (91230111) 和北方民族大学信息与计算科学学院重点学科建设基金的资助, 如果没有这些鼓励和支持, 本书恐怕难与读者见面.

呈现在读者面前的这本书, 虽说是笔者经过三年多的时间将昔日讲稿精心整理、几度修改而成, 然而, 由于笔者知识所限, 不足之处在所难免, 再则, 囿于笔者逼仄的视野, 对素材的安排处理, 也未见合理, 望读者不吝赐教, 多加批评指正.

蹇人宜

2013 年 6 月

目　　录

第 1 章　预备知识 (度量空间)

本章提供本书中其余各章所需的有关度量空间的基本知识. 熟悉这些知识的读者可以跳过本章, 直接进入之后的各章.

1.1　完备度量空间

度量空间又称距离空间, 它是一个拓扑空间, 其上的拓扑结构是由一个距离函数所决定的.

定义 1.1.1　设 $\mathcal{X}$ 是一个非空集合, $d:\mathcal{X}\times\mathcal{X}\to\mathbb{R}$ 称为 $\mathcal{X}$ 上的一个距离, 如果

(i) $d(x,y)\geqslant 0, \forall\, x,y\in\mathcal{X}$, 且 $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$;

(ii) $d(x,y)=d(y,x), \forall x,y\in\mathcal{X}$;

(iii) $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y), \forall x,y,z\in\mathcal{X}$.

对于给定的集合 $\mathcal{X}$ 及其上的度量函数 d, 序对 $(\mathcal{X},d)$ 称为度量空间. $\mathcal{X}$ 中的元素又称 $\mathcal{X}$ 中的点.

显然, n 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 上等式

$$d(x,y)=[(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2]^{\frac{1}{2}} \tag{1.1.1}$$

定义了 $\mathbb{R}^n$ 上的一个距离函数, 其中 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 和 $y=(y_1,\cdots,y_n)$ 均为 $\mathbb{R}^n$ 中的点. 在 $\mathbb{R}^n$ 上还可以定义其他的距离, 如

$$d_1(x,y)=\max\{|x_1-y_1|,\cdots,|x_n-y_n|\},$$

$$d_2(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|.$$

这个简单的例子表明, 在同一集合上允许有多种方式定义其上的距离. 今后提到 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 时, 总认为是 $(\mathbb{R}^n,d)$.

例 1.1.2　设 $\mathcal{X}$ 为非空集合, 于 $\mathcal{X}\times\mathcal{X}$ 上定义

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\ 1, & x\neq y.\end{cases}$$

读者不难证明 $(\mathcal{X},d)$ 是一个度量空间. 此空间具有许多似乎“不合常理”的性质, 它是一个典型的离散拓扑空间.

例 1.1.3 设 $\mathcal{X}=C[a,b]$, 在 $\mathcal{X}$ 上可以定义如下两个距离:

$$d(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|, \tag{1.1.2}$$

$$d'(x,y)=\int_a^b|x(t)-y(t)|\mathrm{d}t. \tag{1.1.3}$$

今后, 当提到连续函数空间 $C[a,b]$ 时, 总是指 $(C[a,b],d)$.

设 $(\mathcal{X},d)$ 为一度量空间, $\mathcal{Y}$ 为 $\mathcal{X}$ 的一个子集合, 度量空间 $(\mathcal{Y},d|\mathcal{Y})$ 称为 $(\mathcal{X},d)$ 的子空间, 这也说明了, 同一形式的距离函数, 定义于不同的集合上时, 所产生的度量空间是不相同的.

定义 1.1.4 设 $(\mathcal{X},d)$ 为一度量空间, $x_0\in\mathcal{X}$, $r\in[0,\infty)$, 集合

$$B(x_0,r)=\{x\in\mathcal{X},d(x,x_0)\leqslant r\}$$

称为以 x_0 为心, r 为半径的闭球: 如果上述定义中的"$\leqslant$"换成"$<$", 相应的集合称为以 x_0 为心, 以 r 为半径的球, 记为 $U(x_0,r)$.

如果 G 为 $\mathcal{X}$ 的子集, 具有如下的性质: $\forall x\in G,\exists\varepsilon\geqslant 0$ 使得 $U(x,\varepsilon)\subset G$, 那么 G 称为 $\mathcal{X}$ 的一个开子集. 如果集合 $F\subset\mathcal{X}$, 使得 F 的补集为开集, 那么 F 称为 $\mathcal{X}$ 的闭子集. 由此可见集合 $\mathcal{X}$ 和空集是既开且闭的集合.

定义 1.1.5 设 $(\mathcal{X},d)$ 为度量空间, $\{x_n\}\subset\mathcal{X}$ 为一序列, $x\in\mathcal{X}$, 称 $\{x_n\}$ 收敛于 x, 或 x_n 以 x 为极限, 记为 $x=\lim_{n\to\infty}x_n$, 是指 $d(x_n,x)\to 0(n\to\infty)$. 这一事实有时也写成 $x_n\to x(n\to\infty)$.

定理 1.1.6 读者不难证明下面两件事:

(i) $x_n\to x(n\to\infty)\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}$, 使得当 $n>N$ 时, $\{x_n\}\subset U(x,\varepsilon)$.

(ii) F 为 $\mathcal{X}$ 的闭子集 $\Leftrightarrow\forall\{x_n\}\subset F$, 当 $\lim_{n\to\infty}x_n=x$ 时, 有 $x\in F$.

注 需要强调的是在度量空间的定义中, 不仅度量函数很重要, 度量函数的定义载体也十分重要. 下述奇妙的例子表明这两个要素是缺一不可的; 存在着某个度量空间, 其中半径较大的球真包含于一个半径较小的球中. 例如, 取 $\mathcal{X}=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:x^2+y^2\leqslant 1\}$. 考虑 $\mathcal{X}$ 中的球$B\left(\left(\dfrac{3}{4},0\right),1\dfrac{1}{8}\right)$, 注意到 $\mathcal{X}$ 中的球 $B((0,0),1)$ 是真包含球 $B\left(\left(\dfrac{3}{4},0\right),1\dfrac{1}{8}\right)$ 的, 而后者的半径是较前者的半径大的.

定义 1.1.7 设 $(\mathcal{X},d)$ 为给定的度量空间, S 为 $\mathcal{X}$ 的任一非空子集, $x\in\mathcal{X}$. 如果 $\forall\varepsilon>0$, $U(x,\varepsilon)\cap(S\backslash\{x\})\neq\varnothing$, 则称 x 是 S 的一个聚点. 聚点 x 可以在 S 中, 亦可能不在 S 中. S 和它的全部聚点的集合的并称为 S 的闭包, 记为 $\bar{S}$. 设 S 为 $\mathcal{X}$ 的任一非空子集, $x\in S$, 如果存在 $\varepsilon>0$, 使得 $U(x,\varepsilon)\subseteq S$, 则称 x 为 S 的一个

内点. S 的全部内点所构成的集合称为 S 的内部, 记为 $\mathrm{int}S$. 点 $x\in S$ 称为 S 的一个孤立点, 如果 $\exists\delta>0$ 使得 $U(x,\delta)\cap\{S\backslash\{x\}\}=\varnothing$.

上面所涉及的度量空间中的这些拓扑概念, 具有与 Euclid 空间中的相应的拓扑概念一致的性质, 将它们放在习题之中, 望读者认真处理.

在数学分析课程中, 证明极限的存在性, 常用到实数的如下性质: Cauchy 序列都有极限, 即所谓的 Cauchy 准则. 然而遗憾的是: 在一般的度量空间中, 这个准则并不成立. 如例 1.1.3 中的度量空间 $(C[0,1],d')$ 中的函数列 $x_n(t)=t^n$, 相对于距离函数 d' 是 Cauchy 列, 并且不难算出, 依照这个距离, $\{x_n\}$ 应当收敛于函数

$$x_0(t)=\begin{cases}0, & t=1,\\ 1, & t\neq 1,\end{cases}$$

而这个函数并非连续函数. 另一方面, 此例中的度量空间 $(C[0,1],d)$ 都具有实数的完备性, 即此空间中的 Cauchy 列是收敛的, 这是因为 $C[0,1]$ 中依距离 d 的收敛等价于一致收敛, 从数学分析课程中即可以看到这个事实. 以上的讨论启发我们给出如下定义.

定义 1.1.8 度量空间 $(\mathcal{X},d)$ 中的点列 $\{x_n\}$ 称为基本列 (Cauchy 列), 是指 $\forall\varepsilon>0,\exists$ 自然数 $N=N(\varepsilon)$, 使得 $\forall m,n\geqslant N$, 有 $d(x_n,x_m)<\varepsilon$; 如 $(\mathcal{X},d)$ 中的任何基本列都在 $\mathcal{X}$ 中有极限, 那么 $(\mathcal{X},d)$ 称为完备的度量空间.

显然, $(\mathbb{R}^n,d),(\mathbb{R}^n,d_1)$ 和 $(\mathbb{R}^n,d_2)$ 都是完备的, 又按定义 1.1.8 之前的讨论知 $(C[a,b],d)$ 是完备的, 而 $(C[a,b],d^1)$ 不是完备的.

完备空间有一个很重要的性质: 此空间上的压缩映射有不动点. 这就是著名的 Banach 压缩映射原理, 它是泛函分析中最简单、最常用的定理, 在应用数学中有着广泛的应用, 许多方程的解存在唯一性及逼近解的构造都依赖于它. 在证明这个定理之前, 先介绍一些基本定义.

定义 1.1.9 设 $(\mathcal{X},d)$ 和 $(\mathcal{Y},\rho)$ 是两个度量空间, $T:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ 是一个映射, $x_0\in\mathcal{X}$, T 称为在点 x_0 处连续, 如果对于任何收敛于 x_0 的点列 $\{x_n\}$ 都有 $Tx_n\to Tx_0(n\to\infty)$. 或, 等价地说, $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 只要 $x\in U(x_0,\delta)$ 就有 $Tx\in U(Tx_0,\varepsilon)$, 即 $T(U(x_0,\delta))\subset U(Tx_0,\varepsilon)$; 如果 T 在 $\mathcal{X}$ 中的每一点 x 处都是连续的, 那么就说 T 在 $\mathcal{X}$ 上连续.

读者可仿数学分析的方法证明上面两种关于连续性的定义是等价的.

设 $(\mathcal{X},d)$ 为给定的度量空间, 利用三角不等式, 读者不难证明: 对于每个固定的 $x_0\in\mathcal{X},T(x)=d(x,x_0)$ 是 $\mathcal{X}$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续映射.

定理 1.1.10 设 $T:(\mathcal{X},d)\to(\mathcal{Y},\rho)$ 是两个度量空间的映射, 则下面的陈述是等价的:

(i) T 在 $\mathcal{X}$ 上连续;

(ii) 对于 $\mathcal{Y}$ 中的每个开集 G, 其原像 $T^{-1}(G)$ 为 $\mathcal{X}$ 中的开集;

(iii) 对于 $\mathcal{Y}$ 中的每个闭集 F, 其原像 $T^{-1}(F)$ 为 $\mathcal{X}$ 中的闭集;

(iv) $\forall S \subset \mathcal{X}, T(\bar{S}) \subset \overline{T(S)}$.

证明 (i)⇒(iv) 如 $x \in \bar{S}$, 则 $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, 其中序列 $\{x_n\} \subset S$. 因此 $T(x_n) \in T(S)$, 并且由 T 之连续性, $T(x_n) \to Tx$, 这就是导致了 $Tx \in \overline{T(S)}$.

(iv)⇒(iii) 设 F 为 $\mathcal{Y}$ 的闭子集, 并记 $S = T^{-1}(F)$. 注意到 $T(S) = T(T^{-1}(F)) = F$, 且由 (iv) $T(\bar{S}) \subset \overline{T(S)}$ 即有 $T(\bar{S}) \subset \bar{F} = F$, 因而 $\bar{S} \subset T^{-1}(T(\bar{S})) \subset T^{-1}(F) = S$ 这就证明了 S 是闭集, 即 $T^{-1}(F)$ 是 $\mathcal{X}$ 中的闭集.

(iii)⇒(ii) 因 G 是开集, 故可设 $G = \mathbf{C}F$, F 为 $\mathcal{Y}$ 的某个闭子集, 于是 $T^{-1}(G) = T^{-1}(\mathbf{C}F) = \mathbf{C}T^{-1}(F)$ 由 (iii)$T^{-1}(F)$ 是闭的, 所以 $T^{-1}(G)$ 是开集.

(ii)⇒(i) 任取 $x \in \mathcal{X}, \varepsilon > 0$ 是任意给定的正数, 则 $T^{-1}(U(Tx,\varepsilon))$ 为 $\mathcal{X}$ 中的开集, 并且包含 x, 于是 $\exists \delta > 0$ 使得 $U(x,\delta) \subset T^{-1}(U(Tx,\varepsilon))$, 从而有 $T(U(x,\delta)) \subset T(T^{-1}(U(Tx,\varepsilon))) = U(Tx,\varepsilon)$, 这表明 T 在 x 处连续. ■

定义 1.1.11 *设 $T : (\mathcal{X}, d) \to (\mathcal{X}, d)$ 是一映射, 并且存在常数 $\rho \in (0,1)$ 使得 $d(Tx,Ty) \leqslant \rho d(x,y), \forall x,y \in \mathcal{X}$, 则称 T 为 $\mathcal{X}$ 上的压缩映射.*

显然, 压缩映射是连续的. 如果函数 $f : [0,1] \to [0,1]$ 是可微的, 并且 $|f'(t)| \leqslant \rho < 1, \forall t \in [0,1]$, 其中 $\rho \in (0,1)$, 是一个固定的常数, 由著名的 Lagrange 中值公式, 不难看出 f 是一个压缩映射.

定理 1.1.12 (Banach 压缩映射原理) *设 $(\mathcal{X}, d)$ 是一个完备的度量空间, T 是 $\mathcal{X}$ 到其自身中的一个压缩映射, 则在 $\mathcal{X}$ 中 T 有唯一的不动点, 即存在唯一的 $x^* \in \mathcal{X}$ 使得 $Tx^* = x^*$.*

证明 任取 $x_0 \in \mathcal{X}$ 为初始点, 考虑迭代列

$$x_{n+1} := Tx_n, \quad n = 0,1,2,\cdots, \tag{1.1.4}$$

注意到

$$d(x_{n+1},x_n) = d(Tx_n,Tx_{n-1}) \leqslant \rho(x_n,x_{n-1}) \leqslant \cdots \leqslant \rho^n d(x,x_0),$$

于是 $\forall p \in \mathbb{N}$, 依照三角不等式将有

$$\begin{aligned} d(x_{n+p},x_n) &\leqslant \sum_{k=1}^{p} d(x_{n+k},x_{n+k-1}) \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{p} \rho^{n+k-1} d(x_1,x_0) \\ &\leqslant \frac{\rho^n}{1-\rho} d(x_1,x_0). \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

不等式 (1.1.5) 表明: 当 $n \to \infty$ 时,

$$d(x_{n+p}, x_n) \to 0, \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

也就是说 $\{x_n\}$ 为 $\mathcal{X}$ 中的一个基本列. 由于 $\mathcal{X}$ 是完备的, 存在 $x^* \in \mathcal{X}$, 使有 $x_n \to x^*(n \to \infty)$. 于等式 (1.1.4) 的两边令 $n \to \infty$; 由 T 之连续性, 便有 $Tx^* = x^*$ 即 x^* 是 T 的一个不动点. 如若 T 还另有一个不动点 x', 则有 $d(x^*, x') = d(Tx^*, Tx') \leqslant \rho d(x^*, x')$, 由此得到 $0 \leqslant (1-\rho)d(x^*, x') \leqslant 0$. 这导致了 $d(x^*, x') = 0$, 因而 $x^* = x'$. 这就证明了 T 的不动点是唯一的. ∎

注 由定义 1.1.9 后面的观察, 如于不等式 (1.1.5) 的左边令 $p \to \infty$, 得到 $d(x^*, x_n) \leqslant \dfrac{\rho^n}{1-\rho} d(x, x_0)$, 这个不等式可以视为 T 的不动点与迭代的第 n 步之间的误差估计.

下面关于常微分方程的初值问题的局部解的存在、唯一性定理的压缩映射原理处理方式, 是用泛函分析处理经典分析的典型例子.

例 1.1.13 考虑常微分方程的初值问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = F(t, x), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{1.1.6}$$

问题 (1.1.6) 等价于: 求连续函数 $x(t)$, 使之满足如下的积分方程:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t F(\tau, x(\tau))\mathrm{d}\tau. \tag{1.1.7}$$

为此, 考虑适当的度量空间 $C[-h, h]$(h 是待定的) 以及映射

$$(Tx)(t) = x_0 + \int_0^t F(\tau, x(\tau))\mathrm{d}\tau. \tag{1.1.8}$$

这样求问题 (1.1.6) 的解, 等价于求 $C[-h, h]$ 到其自身中的映射 T 的不动点 x. 为了能应用压缩映射原理, 需要知道, 应在 $F(t, x)$ 上添加什么条件, 使 T 成为一个压缩映射. 考虑到

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &= \max_{|t| \leqslant h} \left| \int_0^t F(\tau, x(\tau))\mathrm{d}\tau - \int_0^t F(\tau, y(\tau))\mathrm{d}\tau \right| \\ &\leqslant h \max_{|t| \leqslant h} |F(\tau, x(\tau)) - F(\tau, y(\tau))|. \end{aligned}$$

因而, 如若 $F(t, x)$ 对变量 x 关于 t 一致地满足局部 Lipschitz 条件: $\exists \delta > 0$ 及 $L > 0$, 使得当 $|t| \leqslant h$, 以及 $|x_1 - x_0|, |x_2 - x_0| \leqslant \delta$ 时有

$$|F(t, x_1) - F(t, x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2|, \tag{1.1.9}$$

则将有

$$d(Tx,Ty) \leqslant Lhd(x,y), \quad \forall (x,y) \in B(x_0,\delta),$$

其中 $B(x_0,\delta)$ 是 $C[-h,h]$ 中的闭球

$$B(x_0,\delta) := \left\{ x \in C[-h,h] : \max_{|t|\leqslant h} |x(t)-x_0| \leqslant \delta \right\},$$

这里, 并不能直接取 $C[-h,h]$ 为映射 T 的载体空间, 因为为了使 T 是压缩映射, 必须要求 $Lh<1$. 但可以取 T 的载体空间为 $\mathcal{X} = B(x_0,\delta)$, 为了保证 T 将 $\mathcal{X}$ 映到 $\mathcal{X}$ 中, 令

$$M = \max\{|F(t,x)| \ (t,x) \in [-h,h] \times [x_0-\delta, x_0+\delta]\},$$

并取 h 充分小使

$$\max|(Tx)(t)-x_0| = \max\left|\int_0^t F(\tau,x(\tau))\mathrm{d}\tau\right| \leqslant Mh \leqslant \delta,$$

也就是说, 当 $h \leqslant \min\{\delta/M, 1/L\}$ 时. T 是 $\mathcal{X}$ 到 $\mathcal{X}$ 中的压缩映射, 而 $\mathcal{X}$ 是 $C[-h,h]$ 的闭子空间, 故 $(\mathcal{X},d)$ 是完备的, 应用 Banach 压缩原理知, 存在 $x \in B(x_0,\delta)$, 使得 $x(t)$ 为问题 (1.1.6) 之解.

对于序列的极限存在性而言, 度量空间的完备性是不可或缺的条件. 虽然很多度量空间不具备这一性质, 然而犹如数学分析中将有理数域完备化为实数域那样, 也有一种方法将不完备的度量空间扩充为完备的度量空间.

设 $(\mathcal{X},d)$ 和 $(\mathcal{Y},\rho)$ 是两个度量空间, 映射 $\varphi: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 具有如下性质: φ 是满射并且 $d(x',x'') = \rho(\varphi(x'),\varphi(x'')), \forall x',x'' \in \mathcal{X}$. 这时称 $(\mathcal{X},d)$ 和 $(\mathcal{Y},\rho)$ 是保距同构的. φ 称为保距同构映射. 显然, 这样的 φ 必为单射. 保距同构的两个度量空间, 在涉及度量的性质时, 应当是一样的, 故在实际中不必将它们硬性的区别. 设 $(\mathcal{X},d)$ 和 $(\mathcal{Y},\rho)$ 是两个度量空间, 如果存在 $(\mathcal{Y},\rho)$ 的子空间 $(\mathcal{Y}_1,\rho)$ 使 $(\mathcal{X},d)$ 与 $(\mathcal{Y}_1,\rho)$ 是保距同构的, 那么便说 $(\mathcal{X},d)$ 可以 (保距地) 嵌入到 $(\mathcal{Y},\rho)$ 中; 即在保距同构的意义之下, 可以说 $(\mathcal{X},d)$ 为 $(\mathcal{Y},\rho)$ 的子空间, 常记为 $(\mathcal{X},d) \subset (\mathcal{Y},\rho)$.

定义 1.1.14　$(\mathcal{X},d)$ 为度量空间, 集合 $S \subset \mathcal{X}$ 称为在 $\mathcal{X}$ 中稠密, 是指 $\forall x \in \mathcal{X}, \forall \varepsilon > 0, \exists z \in S$ 使得 $d(x,z) < \varepsilon$. 等价地说: $\forall x \in \mathcal{X}, \exists \{x_n\} \subset S$ 使有 $x_n \to x (n \to \infty)$.

有理数集 $\mathbb{Q}$ 在实数 $\mathbb{R}$ 中稠密; 由 Weierstrass 定理, 区间 $[a,b]$ 上的多项式的全体 $P[a,b]$ 在 $C[a,b]$ 中稠密.

定义 1.1.15　设 $(\mathcal{X},d)$ 为度量空间, $(\tilde{\mathcal{X}},\tilde{d})$ 是一个完备的度量空间, 使得 $(\mathcal{X},d)$ 为其子空间, 并且任何一个以 $(\mathcal{X},d)$ 为度量子空间的度量空间 $(\mathcal{Y},\rho)$, 均以 $(\tilde{\mathcal{X}},\tilde{d})$ 为其度量子空间, 则称 $(\tilde{\mathcal{X}},\tilde{d})$ 是 $(\mathcal{X},d)$ 的完备化.

下述命题断言, 任何度量空间均可以完备化.

定理 1.1.16 每个度量空间 $(\mathcal{X}, d)$ 都有一个完备化空间 $(\tilde{\mathcal{X}}, \tilde{d})$, 并且 $\mathcal{X}$ 在 $\tilde{\mathcal{X}}$ 中稠密.

这里略去它的证明, 有兴趣的读者可以参看文献 [3].

完备度量空间的另一重要性质是它是第二纲空间, 而这一概念在今后的学习中起着举足轻重的作用. 首先引入与定义 1.1.14 相对立的一个概念.

定义 1.1.17 设 $(\mathcal{X}, d)$ 为一度量空间, $\mathcal{X}$ 的子集 S 称为在 $\mathcal{X}$ 中无处稠密 (或稀疏) 的, 是指它的闭包 $\bar{S}$ 的内部是空集. $\mathcal{X}$ 中的一个集合, 如能表示成可数多个无处稠密的子集的并, 那么这个集合称为第一纲集; 不是第一纲集的集合, 称为第二纲集.

例如, $\mathcal{Z} = \mathbb{R}^2$ 中水平轴 $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ 上的有理点的集合 E 在 $\mathbb{R}^2 = \mathcal{Z}$ 中是无处稠密的集合. 集合的上述三种类型依赖于该集合所处的空间 (载体). 这说明, 可以有 $E \subset \mathcal{X} \subset \mathcal{Z}$, 使得 E 在 $\mathcal{X}$ 中是第二纲的, 而在 $\mathcal{Z}$ 中是第一纲的.

定理 1.1.18 (Baire) 在完备度量空间 $\mathcal{X}$ 中, 下述等价的性质成立

(i) 开稠集的可数族之交仍为稠集;

(ii) 内部为空集的闭集的可数族之并的内部仍是空集.

证明 (i) 和 (ii) 的等价性是显然的, 只需证明 (i) 为真. 今设 $\{G_n\}$ 为 $\mathcal{X}$ 的开子集的可数族, 且 $\bar{G}_n = \mathcal{X}, \forall n \in \mathbb{N}$; 令 $G_\infty = \bigcap\limits_n^\infty G_n$, 来证 G_∞ 在 $\mathcal{X}$ 中稠密, 即: $\forall x_1 \in \mathcal{X}, \forall \varepsilon > 0$, 有 $U(x_1, \varepsilon) \cap G_\infty \neq \varnothing$, 下面将通过递归的办法构造一个点列 $\{x_n : n = 1, 2, \cdots\}$ 使该点列为 $\mathcal{X}$ 中的 Cauchy 列, 由关于 $\mathcal{X}$ 的假定, $x_* := \lim x_n$ 存在, 再指出此 x_* 位于集合 $U(x_1, \varepsilon) \cap G_\infty \neq \varnothing$ 中, 从而完成证明. 今设 $\varepsilon_n \downarrow 0, \varepsilon_1 = \varepsilon$ 是给定的. 按下述程序构造一个开球列 $U_n = U(x_n, \varepsilon_n)$ 及一个闭球列 $B_n = B(x_n, \varepsilon_n)$.

由于开集 G_1 在 $\mathcal{X}$ 中稠, $G_1 \cap U_1$ 是非空开集, 故可取 $B_2 \subset U_1 \cap G_1$, 然后取 $B_3 \subset U_2 \cap G_2, B_4 \subset U_3 \cap G_3$, 如继续下去, 得到了 $\{U_n\}$ 和 $\{B_n\}$ 使得

$$B_{n+1} \subset U_n \cap G_n \subset U_1 \cap G_n.$$

由于当 $i, j > n$ 时, $x_i, y_i \in U_n$. 故由三角不等式有

$$d(x_i, x_j) \leqslant d(x_i, x_n) + d(x_n, x_j) < 2\varepsilon_n.$$

因而 $\{x_n\}$ 是一个 Cauchy 列, 由 $\mathcal{X}$ 之完备性, 知存在 $x_* \in \mathcal{X}$, 使得 $x_n \to x_*(n \to \infty)$. 既然 $\forall i > n$,

$$x_i \in B_{n+1} \subset U_1 \cap G_n,$$

令 $i \to \infty$ 后即知 $x_* \in B_{n+1} \subset U_n \cap G_n, \forall n \in \mathbb{N}$. 这样得到了 $x_* \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \subset U_1 \cap G_\infty$, 这就证明了 G_∞ 在 $\mathcal{X}$ 中稠密. ∎

推论 1.1.19　*如果完备度量空间 $\mathcal{X}$ 能表示成可数多个闭集之并, 那么这些闭集中至少有一个内部非空.*

证明　设 $\mathcal{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, 其中每个 F_n 是闭集. 如若结论不真, 即 $\mathrm{int} F_n = \varnothing, \forall n \in \mathbb{N}$, 则由定理 1.1.18(ii) 即知结论成立. ∎

由此结论可以知道, 如 $\mathcal{X}$ 是完备度量空间则 $\mathcal{X}$ 是第二纲的. 又通过本章后的习题 1.1.23, 可以直观地把第一纲集想象为是 "瘦的" 集合, 而第二纲集则可以想象为是 "肥的" 集合.

1.2　紧致度量空间

在数学分析中, 在关于存在性的许多定理的论证中, 常引用两个重要定理: Weierstrass 定理、Borel 有限覆盖定理. 这两个定理在一般的度量空间中并不是总成立的, 因此有必要引入一些相应的概念.

定义 1.2.1　*设 $(\mathcal{X}, d)$ 为一度量空间, $S \subset \mathcal{X}$ 称为列紧集, 如果 S 中的任一点列都含有一个收敛子列, 如果这个子序列的极限还在 S 之中, 那么 S 称为自列紧的.*

由数学分析中的 Weierstrass 列紧性定理, 可知 $\mathbb{R}^2$ 中的任一有界集合是列紧的; 任一有界闭集是自列紧的. 显然列紧空间中的任意子集是列紧的, 任意闭子集是自列紧的.

命题 1.2.2　*列紧度量空间必是完备的.*

证明　设 $(\mathcal{X}, d)$ 是列紧的度量空间, $\{x_n\} \subset \mathcal{X}$ 为 Cauchy 列, 即 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n > N, d(x_m, x_n) < \varepsilon$. 由于 $\mathcal{X}$ 是列紧的, 故 $\{x_n\}$ 含有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 并设 $x_{n_k} \to x_* \in \mathcal{X}$. 这意味着 $\exists K \in \mathbb{N}$, 使得 $\forall k \geqslant K$ 有 $d(x_{n_k}, x^*) < \varepsilon$. 今取 $k_0 \geqslant K$ 充分大, 使得 $n_{k_0} > N$, 于是 $\forall n > N$,

$$d(x_n, x^*) \leqslant d(x_n, x_{n_{k_0}}) + d(x_{n_{k_0}}, x^*) < 2\varepsilon,$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 就得到 $x_n \to x^* (n \to \infty)$. ∎

定理 1.2.3　*假定 $(\mathcal{X}, d)$ 和 $(\mathcal{Y}, \rho)$ 是度量空间, 设 T 是定义域为 $D \subset \mathcal{X}$ 到 $\mathcal{Y}$ 的连续映射. 如果 D 是列紧集, 则 T 的值域 $T(D)$ 亦为列紧集.*

证明　任取 $\{y_n\} \subset T(D)$, 只需证明 $\{y_n\}$ 含有收敛于 $T(D)$ 中的点的子列. 为此设 $y_n = T(x_n)$. 因 D 是紧的, 故有子列 x_{n_k} 收敛于某点 $x_0 \in D$, 由于 T 是连续