

分析力学 (上卷)

Analytical Mechanics (I)

梅凤翔 编著

 北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

013062345

0316
26
V1

内容简介

分析力学(上卷)

Analytical Mechanics (I)

梅凤翔 编著



 北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



北航

C1670731

0316
26
V1

238530610

内容简介

本书全面系统地论述分析静力学和分析动力学,包括约束及其分类,广义坐标与准坐标,虚位移与自由度,理想约束,虚位移原理,运动学基础,d'Alembert-Lagrange 原理,Lagrange 方程,Lagrange 方程的应用(I)、(II)、(III),Hamilton 方程,Hamilton 方程的积分,非完整系统,Birkhoff 系统,场积分方法,势积分方法,Jacobi 最终乘法,Noether 对称性方法,Lie 对称性方法,形式不变性方法,Lagrange 对称性方法与 Birkhoff 对称性方法,力学系统与梯度系统,动力学逆问题,力学的变分原理等。

本书可作为高等学校力学、数学、物理学,以及工程专业高年级本科生和研究生的教学参考书,亦可供有关教师、力学工作者和科技人员参考使用。

版权专有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

分析力学:全2册 / 梅凤翔编著. — 北京:北京理工大学出版社, 2013.7

ISBN 978-7-5640-7877-5

I. ①分… II. ①梅… III. ①分析力学-研究 IV. ①O316

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 145348 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(总编室)

82562903(教材售后服务热线)

68948351(其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 保定市中华美凯印刷有限公司

开 本 / 710 毫米×1000 毫米 1/16

印 张 / 42.5

字 数 / 784 千字

版 次 / 2013 年 7 月第 1 版 2013 年 7 月第 1 次印刷

定 价 / 98.00 元(上、下卷)

责任编辑/王玲玲

文案编辑/王玲玲

责任校对/周瑞红

责任印刷/王美丽

图书出现印装质量问题,请拨打售后服务热线,本社负责调换

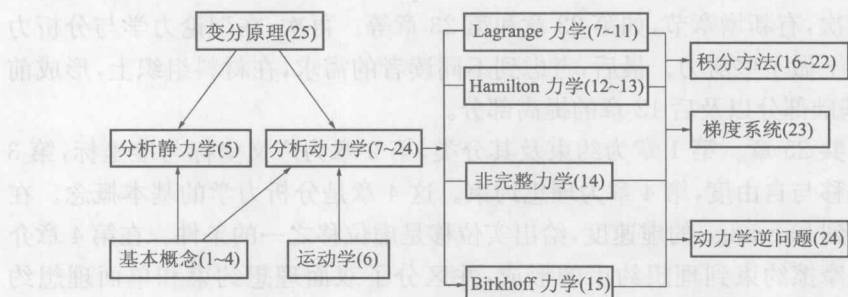
前 言

近年拜读 d'Alembert 和 Lagrange 的著作,对分析力学的起源与发展有了进一步的认识。因此,想写一本篇幅不太长的分析力学,希望既能将以前出的几本书的基本内容纳入,又能将近年对 d'Alembert, Lagrange 原著的体会以及近年的新结果写进去。不同于以前出版的几部书,本书首先更侧重于问题的源头以及重要结论的经过史。例如,理想约束定义的形成、d'Alembert 原理的原述及其发展、虚位移原理的形成及其发展、Lagrange 原著附录中的 Lagrange 方程等。其次,有新增章节,如第 22 章和第 23 章等。再次,在理论力学与分析力学的连接上做了些努力。最后,考虑到不同读者的需求,在材料组织上,形成前 13 章的基础部分以及后 12 章的提高部分。

全书共 25 章。第 1 章为约束及其分类,第 2 章为广义坐标与准坐标,第 3 章为虚位移与自由度,第 4 章为理想约束。这 4 章是分析力学的基本概念。在第 3 章提到 Lagrange 的虚速度,给出实位移是虚位移之一的条件。在第 4 章介绍了从无摩擦约束到理想约束的形成,并区分了双面理想约束和单面理想约束。第 5 章为虚位移原理,它是分析静力学的基础。在这一章介绍了从 Lagrange 到 Appell,再到俄罗斯学者和我国学者的有关论述;原理的证明及不充分性;原理给出的平衡条件;保守系统的平衡稳定性等。第 6 章为运动学基础。第 7 章为 d'Alembert-Lagrange 原理,它是分析动力学的基础。在这一章介绍了 d'Alembert 原理的原述以及后人的理解、Lagrange 和 Appell 对动力学普遍方程的表述。第 8 章为 Lagrange 方程,从 Lagrange 原著的附录开始,导出第一类和第二类 Lagrange 方程并给出方程的基本应用,在 Lagrange 方程的不变性中给出 Lagrange 对称性这一近代提法。第 9~11 章为 Lagrange 方程的应用,介绍了准坐标下的 Lagrange 方程、耗散函数的 Lagrange 方程、初始运动问题、打击运动的 Lagrange 方程、运动稳定性和小振动理论、刚体定点转动问题的分析动力学、相对运动动力学的 Lagrange 方程、变质量系统的 Lagrange 方程、事件空间中的 Lagrange 方程、可控力学系统的 Lagrange 方程、机电系统的 Lagrange 方程、Lagrange 力学逆问题等 12 个专题。第 7~11 章构成 Lagrange 力学的基本框架。第 12 章为 Hamilton 方程,第 13 章为 Hamilton 方程的积

分。这两章构成 Hamilton 力学的基本框架,其中较详细介绍了 Hamilton 方程的各种导出方法。第 14 章为非完整系统,介绍了非完整力学的基本内容,特别是关于 Lindelöf 方程和 Чераев 条件的讨论。第 15 章为 Birkhoff 系统,介绍了 Birkhoff 力学的基本内容,并给出 Pfaff-Birkhoff 原理的推广形式。第 16 章为场积分方法,第 17 章为势积分方法,第 18 章为 Jacobi 最终乘子法,第 19 章为 Noether 对称性方法,第 20 章为 Lie 对称性方法,第 21 章为形式不变性方法,第 22 章为 Lagrange 对称性方法与 Birkhoff 对称性方法。这 7 章讨论各类约束力学系统,包括完整系统、非完整系统、Birkhoff 系统等各种积分方法,其中第 22 章是近年的新结果。第 23 章为力学系统与梯度系统,讨论约束力学系统的梯度化,并用梯度系统的性质来研究力学系统的积分和稳定性。这一章也是新近结果。第 24 章为动力学逆问题,介绍各类约束力学系统的各种动力学逆问题的提法和解法。第 25 章为力学的变分原理,介绍各类微分变分原理和积分变分原理。

本书结构如下图所示。



本书写作过程中得到了北京理工大学宇航学院和数学学院的同事们的关心和支持。本书的出版得到国家自然科学基金(10932002, 11272050)的资助。作者在此一并表示感谢。

限于作者水平,书中难免有疏漏,敬请读者指正。

作者
2013 年春

目 录(上卷)

1 约束及其分类	1
§ 1.1 约束	1
1.1.1 约束的定义	1
1.1.2 约束方程	1
1.1.3 约束的分类	3
§ 1.2 完整约束与非完整约束	3
1.2.1 几何约束	3
1.2.2 微分约束	3
1.2.3 微分约束的可积性定理	3
1.2.4 完整约束	5
1.2.5 非完整约束	6
§ 1.3 定常约束与非定常约束	6
1.3.1 定常约束	6
1.3.2 非定常约束	6
§ 1.4 单面约束与双面约束	7
1.4.1 双面约束	7
1.4.2 单面约束	7
思考题	8
习题	8
参考文献	10
2 广义坐标与准坐标	12
§ 2.1 广义坐标	12
2.1.1 广义坐标的定义	12
2.1.2 广义坐标的形成	12
2.1.3 广义坐标的意义	12
§ 2.2 广义速度和广义加速度	15
2.2.1 广义速度	15

2 ■ 分析力学(上卷)

2.2.2 广义加速度	15
2.2.3 非完整约束在广义坐标和广义速度下的表达	16
§ 2.3 多余坐标	18
2.3.1 多余坐标的概念	18
2.3.2 多余坐标的意义	19
§ 2.4 准速度与准坐标	19
2.4.1 准速度	19
2.4.2 准坐标	20
思考题	21
习题	21
参考文献	22
3 虚位移与自由度	24
§ 3.1 虚位移	24
3.1.1 Lagrange 的虚速度	24
3.1.2 虚位移与可能位移	24
3.1.3 虚位移与实位移	25
§ 3.2 约束加在虚位移上的限制	25
3.2.1 完整约束情形	25
3.2.2 线性非完整约束情形	26
3.2.3 非线性非完整约束情形	27
§ 3.3 自由度	28
3.3.1 自由度的定义	28
3.3.2 算例	28
思考题	29
习题	30
参考文献	31
4 理想约束	32
§ 4.1 力的功	32
4.1.1 功的简史	32
4.1.2 力的分类	32
4.1.3 力的实功	33
4.1.4 力的虚功	33
4.1.5 约束力的功	33
§ 4.2 理想约束	34

4.2.1	由无摩擦约束到理想约束	34
4.2.2	理想约束的定义	34
4.2.3	理想约束假定的重要性与可能性	35
4.2.4	理想约束的例子	35
思考题		37
习题		37
参考文献		38
5	虚位移原理	39
§ 5.1	虚位移原理的简史	39
5.1.1	Lagrange 的有关论述	39
5.1.2	Appell 的有关论述	40
5.1.3	俄罗斯学者的有关论述	40
5.1.4	我国学者的论述	41
5.1.5	注释	41
§ 5.2	虚位移原理的表述	42
5.2.1	一般表述	42
5.2.2	特殊表述	42
5.2.3	更一般表述	42
§ 5.3	虚位移原理的证明	43
5.3.1	Appell 的证明	43
5.3.2	Сушлов 的证明	44
5.3.3	虚位移原理可以不去证明	44
§ 5.4	虚位移原理给出的平衡方程	44
5.4.1	虚位移原理的简单应用	44
5.4.2	虚位移原理导出的一般平衡条件	46
5.4.3	Lagrange 乘子	47
§ 5.5	单面约束	49
5.5.1	由等式确定的约束, 允许不等式表征的位移	49
5.5.2	不等式表示为有限形式的约束	52
§ 5.6	虚位移原理的应用举例	53
§ 5.7	保守系统的平衡稳定性	62
5.7.1	Lagrange 关于平衡稳定性的论述	63
5.7.2	Appell 的有关论述	63
5.7.3	Ляпунов 和 Четаев 的工作	63
5.7.4	关于平衡位置的不稳定性	64

5.7.5	力函数的极值特性	65
5.7.6	算例	66
	思考题	73
	习题	73
	参考文献	78
6	运动学基础	80
§ 6.1	点的运动学	80
6.1.1	点的运动的矢量描述	80
6.1.2	点的运动的坐标描述	81
§ 6.2	刚体运动学	88
6.2.1	刚体的平移	88
6.2.2	刚体的定轴转动	88
6.2.3	刚体的平面运动	88
6.2.4	刚体的一般运动	90
§ 6.3	点的复合运动	95
6.3.1	绝对运动, 相对运动, 牵连运动	95
6.3.2	变矢量的绝对导数与相对导数	95
6.3.3	速度合成定理	95
6.3.4	加速度合成定理	96
§ 6.4	刚体的复合运动	96
6.4.1	刚体平面运动的角速度合成定理	97
6.4.2	刚体平面运动分解为两个转动	97
	思考题	100
	习题	100
	参考文献	101
7	d'Alembert-Lagrange 原理	102
§ 7.1	d'Alembert 原理	102
7.1.1	d'Alembert 的原述	102
7.1.2	后人对 d'Alembert 原理的理解	103
7.1.3	d'Alembert 原理的表述	105
§ 7.2	d'Alembert-Lagrange 原理	105
7.2.1	原理的建立	106
7.2.2	原理的表述	107
7.2.3	原理的应用	108

7.2.4 原理的直角坐标表达	108
§ 7.3 d'Alembert-Lagrange 原理的广义坐标表达	109
7.3.1 Euler-Lagrange 形式	109
7.3.2 Nielsen 形式	110
7.3.3 Appell 形式	111
思考题	113
习题	113
参考文献	115
8 Lagrange 方程	116
§ 8.1 Lagrange 方程的由来	116
8.1.1 第一类 Lagrange 方程	116
8.1.2 第二类 Lagrange 方程	116
§ 8.2 Lagrange 方程的导出	117
8.2.1 第二类 Lagrange 方程的导出	117
8.2.2 第一类 Lagrange 方程的导出	117
§ 8.3 Lagrange 方程的结构	118
8.3.1 系统动能的结构	118
8.3.2 广义力的计算	122
8.3.3 Lagrange 方程的显式	123
8.3.4 应用举例	124
§ 8.4 有势力情形的 Lagrange 方程	132
8.4.1 有势力情形的 Lagrange 方程	133
8.4.2 有广义力函数情形的 Lagrange 方程	133
8.4.3 Lagrange 方程的不变性	134
8.4.4 应用举例	136
§ 8.5 Lagrange 方程的经典积分及降阶法	144
8.5.1 运动方程的第一积分	144
8.5.2 循环坐标和循环积分	145
8.5.3 能量积分	146
8.5.4 一般完整系统的能量积分	146
8.5.5 利用循环积分的 Routh 降阶法	147
8.5.6 利用能量积分的 Whittaker 降阶法	148
8.5.7 应用举例	150
§ 8.6 变量可分离的 Lagrange 方程和 Liouville 方程	155
8.6.1 分离变量与局部能量积分	155

8.6.2	Liouville 方程	156
8.6.3	应用举例	158
	思考题	159
	习题	160
	参考文献	165
9	Lagrange 方程的应用(I)	166
§ 9.1	准坐标下的 Lagrange 方程	166
9.1.1	准速度与准坐标	166
9.1.2	准坐标下 Lagrange 方程的导出	167
9.1.3	应用举例	168
§ 9.2	耗散函数的 Lagrange 方程	171
9.2.1	Лурье 耗散函数	171
9.2.2	有耗散函数的 Lagrange 方程	171
9.2.3	耗散函数的力学意义	172
9.2.4	应用举例	172
§ 9.3	初始运动问题	173
9.3.1	Lagrange 方程的初始运动问题	173
9.3.2	应用举例	173
§ 9.4	打击运动的 Lagrange 方程	177
9.4.1	给定打击冲量的情形	177
9.4.2	瞬时加上约束的情形	179
9.4.3	应用举例	180
	思考题	183
	习题	183
	参考文献	185
10	Lagrange 方程的应用(II)	187
§ 10.1	运动稳定性和小振动理论	187
10.1.1	平衡条件及平衡位置的稳定性	187
10.1.2	运动稳定性的一些概念和结论	188
10.1.3	保守系统的小振动	191
10.1.4	新约束对振动系统周期的影响	193
10.1.5	应用举例	195
§ 10.2	刚体定点转动问题的分析动力学	202
10.2.1	简史	202

10.2.2	Euler-Poisson 方程及三种经典可积情形	202
10.2.3	Харламов 方程及其降阶问题	205
10.2.4	Euler-Poisson 方程的若干特殊可积情形	208
§ 10.3	相对运动动力学的 Lagrange 方程	211
10.3.1	被载体相对运动微分方程的一般形式	211
10.3.2	被载体相对运动微分方程的几种特殊形式	214
10.3.3	能量方程	214
10.3.4	相对平衡	215
10.3.5	应用举例	216
§ 10.4	变质量系统的 Lagrange 方程	218
10.4.1	变质量力学系统的 d'Alembert-Lagrange 原理	218
10.4.2	变质量力学系统的 Lagrange 方程	220
10.4.3	应用举例	221
	思考题	222
	习题	223
	参考文献	224
11	Lagrange 方程的应用(Ⅲ)	226
§ 11.1	事件空间中的 Lagrange 方程	226
11.1.1	事件空间中的 Hamilton 原理	226
11.1.2	事件空间中的 d'Alembert-Lagrange 原理	227
11.1.3	事件空间中的参数方程	228
11.1.4	应用举例	229
§ 11.2	可控力学系统的 Lagrange 方程	230
11.2.1	带参数约束系统的 Lagrange 方程	230
11.2.2	包含伺服约束系统的 Lagrange 方程	231
11.2.3	有约束的受迫控制问题的 Lagrange 方程	233
11.2.4	应用举例	235
§ 11.3	机电系统的 Lagrange 方程	237
11.3.1	基本概念和电路方程	237
11.3.2	Lagrange-Maxwell 方程	239
11.3.3	应用举例	241
§ 11.4	Lagrange 力学逆问题	244
11.4.1	问题的提出	244
11.4.2	函数 L 存在的条件	244
11.4.3	函数 L 的构造方法	245

11.4.4 应用举例	247
思考题	250
习题	251
参考文献	252
12 Hamilton 方程	253
§ 12.1 Legendre 变换与正则方程	253
12.1.1 Legendre 变换	253
12.1.2 Hamilton 正则方程	254
12.1.3 研究正则方程的意义	256
12.1.4 关于正则方程的导出	256
12.1.5 应用举例	261
§ 12.2 正则方程的经典积分与降阶法	263
12.2.1 正则方程的能量积分和循环积分	263
12.2.2 利用能量积分的 Whittaker 降阶法	265
12.2.3 应用举例	265
§ 12.3 正则方程的逆变型和协变型	266
12.3.1 正则方程的逆变型	266
12.3.2 正则方程的协变型	266
12.3.3 应用举例	267
思考题	269
习题	269
参考文献	271
13 Hamilton 方程的积分	272
§ 13.1 Poisson 方法	272
13.1.1 对第一积分的 Poisson 条件	272
13.1.2 Poisson 括号及其性质	272
13.1.3 经典 Poisson 积分方法及其推广	273
13.1.4 应用举例	275
§ 13.2 Jacobi 方法	277
13.2.1 预备知识	277
13.2.2 Hamilton-Jacobi 方程和 Jacobi 定理	278
13.2.3 Liouville 情形	279
13.2.4 应用举例	281
§ 13.3 正则变换	287

13.3.1 正则变换及其群性	287
13.3.2 母函数	289
13.3.3 Mathieu 变换和点变换	292
13.3.4 无限小正则变换	293
13.3.5 应用举例	294
§ 13.4 积分不变量	296
13.4.1 Poincaré 一阶线性相对积分不变量	296
13.4.2 高阶积分不变量	297
13.4.3 正则变换与积分不变量	301
13.4.4 关于积分不变量的唯一性定理	302
13.4.5 Poincaré-Cartan 积分不变量	302
13.4.6 应用举例	303
思考题	306
习题	306
参考文献	307

约束及其分类

本章讨论约束以及约束的分类,包括约束、完整约束与非完整约束、定常约束与非定常约束、双面约束与单面约束等。

§ 1.1 约束

1.1.1 约束的定义

研究质点系相对某个惯性坐标系的运动。在系统点的位置和速度上事先加上一些几何的或运动学特性的限制,将这些限制称为**约束**。例如,火车被限制在铁轨上运动的条件,刚体内任意两点间的距离保持不变的条件,冰刀运动的速度只能沿冰刀方向的条件,圆球在粗糙平面上无滑动地滚动的条件,等等,都是约束。前两个条件是几何限制,后两个条件是运动学限制。当系统运动时,不论作用于其上的力以及运动初始条件如何,这些限制必须得到满足。

受到约束的系统称为**非自由系统**;反之,不受约束的系统称为**自由系统**。在同样主动力作用下,与自由系统相比较,加于非自由系统的点上的约束在某种程度上限制了系统的可能运动。由约束所加的限制,对于各种工程技术领域来说,具有指导作用和特殊用途。例如,可控力学系统本身就是带有制约给定运动状态的确定的约束系统,而用相应的控制装置来实现这样约束便是技术上的问题。

1.1.2 约束方程

一般的约束条件都可用**约束方程**或**约束不等式**来表达。这就需要根据已给条件,利用几何学和运动学知识来写出具体的数学表达式。

例1 两个质点在半径为 R 的固定球面上运动,两点间距离 l 保持不变。

以固定球面中心为原点,建立一固定直角坐标系,两质点在此坐标系中的坐标分别为 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2) ,于是两点间距离为常值 l 的条件可表示为

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0 \quad (1.1.1)$$

而两点在半径为 R 的固定球面上的条件分别为

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - R^2 = 0 \quad (1.1.2)$$

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - R^2 = 0 \quad (1.1.3)$$

约束方程(1.1.1), (1.1.2), (1.1.3)就是加于系统的点的位置上的几何限制。不论作用于该系统上的力和运动的初始条件如何,这些方程都必须得到满足。

例2 两质点用长 l 的不可伸长软绳联结,并在空间运动^[1]。

设两质点在固定直角坐标系中的坐标分别为 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2) ,因软绳可张紧,亦可不张紧,故约束表示为

$$l^2 - \{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\} \geq 0 \quad (1.1.4)$$

其中等号表示软绳在张紧状态,不等号表示软绳在不张紧状态。

例3 在平面上运动的两个质点用不变长 l 的杆联结,并且杆中点的速度沿杆方向^[1]。

设两质点的坐标分别为 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) ,则两点间距离为 l 的条件可表示为

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 = 0 \quad (1.1.5)$$

而杆中点的速度沿杆方向的条件表示为

$$\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{x_2 - x_1} = \frac{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}{y_2 - y_1} \quad (1.1.6)$$

约束方程(1.1.5)是对点的位置的几何限制,而约束方程(1.1.6)是对点的速度的运动学限制。

例4 一质点在空间运动,所受约束为^[2,3]

$$\dot{y} - z\dot{x} = 0 \quad (1.1.7)$$

其中 (x, y, z) 为点的坐标。

例5 一质点做平面运动,所受约束为使其轨迹的斜率与时间成正比^[3]。

约束方程表示为

$$t\dot{x} - \dot{y} = 0 \quad (1.1.8)$$

其中 (x, y) 为点的坐标。

1.1.3 约束的分类

当应用基本原理推导系统运动微分方程时,约束本身的性质有极大影响,不仅系统运动形式,而且为研究运动所选取的方法都依赖于约束的性质。因此,必须研究各种类型的约束。可以按照各种特征将约束分类,例如,完整与非完整、定常与非定常、单面与双面、理想与非理想,等等。

§ 1.2 完整约束与非完整约束

1.2.1 几何约束

研究由 N 个质点组成的力学系统,如果所受约束是用相对于点的直角坐标 (x_i, y_i, z_i) ($i=1, 2, \dots, N$) 及时间 t 的解析方程或有限方程(非微分方程)来表示,则这种约束称为几何约束,例如,约束(1.1.1), (1.1.2), (1.1.3), (1.1.4), (1.1.5)都是几何约束。几何约束的一般形式为

$$F_\alpha(x_i, y_i, z_i, t) = 0 \quad (\alpha=1, 2, \dots, d < 3N; i=1, 2, \dots, N) \quad (1.2.1)$$

当存在几何约束(1.2.1)时,系统不能在每一时刻在空间取任意位置,几何约束是在时刻 t 加在系统可能位置上的限制。

1.2.2 微分约束

如果约束方程中不仅包含坐标和时间,还包含速度,则这种约束称为微分约束,或运动学约束。当系统受微分约束时,系统在任意时刻可在空间占据任意位置,但在此位置上系统点的速度不是任意的。微分约束是加在速度上的限制^[1]。微分约束的一般形式为

$$F_\beta(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t) = 0 \quad (\beta=1, 2, \dots, g; i=1, 2, \dots, N) \quad (1.2.2)$$

这里 F_β 对 $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$ 可以是线性的,或非线性的。线性微分约束可表示为

$$\sum_{i=1}^N (A_{\beta i} \dot{x}_i + B_{\beta i} \dot{y}_i + C_{\beta i} \dot{z}_i) + D_\beta = 0 \quad (\beta=1, 2, \dots, g) \quad (1.2.3)$$

其中 $A_{\beta i}, B_{\beta i}, C_{\beta i}$ 和 D_β 是坐标和时间的函数。

微分约束可分为可积分的微分约束和不可积分的微分约束。例如,微分约束

$$\dot{x}(x^2 + y^2 + z^2) + 2(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}) = 0 \quad (1.2.4)$$

是可积分的微分约束,它可积分为有限形式

$$x + \ln(x^2 + y^2 + z^2) = C$$

其中 C 为积分常数。又如,约束(1.1.7)是微分约束,并且是不可积分的微分约束。

1.2.3 微分约束的可积性定理

一个微分约束是否可积分为有限形式,这是个重要问题。