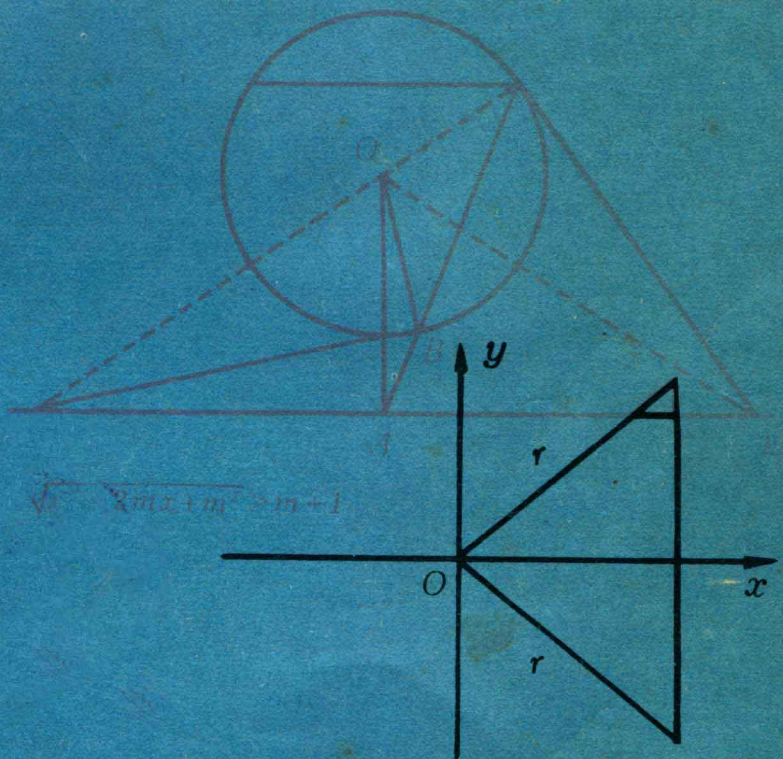


# 综合训练

## 高中

## 数学精编



浙江教育出版社

GAOZHONG SHUXUE JINGBIAN

高中数学精编

# 综合训练

许纪传 江焕棣 谢玉兰

钱孝华 陶敏之 丁宗武

浙江教育出版社

高中数学精编  
综合训练

许纪传 江焕棣 谢玉兰  
钱孝华 陶敏之 丁宗武

\*

浙江教育出版社出版  
(杭州武林路125号)

上虞汤浦印刷厂排版  
浙江新华印刷厂印刷  
浙江省新华书店发行

\*

开本787×1092 1/16 印张 6 字数150,000

1989年7月第1版

1989年7月第1次印刷

印数 00001—2101250

\*

**ISBN 7-5338-0558-5/G·559**

**定 价：1.45 元**

## 说 明

《高中数学精编》(它的前身是《高中数学教材补充题》)自1981年出版以来,先后印行7次,深受读者欢迎。此次修订,我们依据“全日制中学数学教学大纲”的要求,并吸取了广大读者的意见,对原书的体例进行了适当的调整,删除了《微积分初步》一册,新增了《综合训练》一书,以供高三学生总复习之用。

本书以试题形式出现,分单元测试题和综合测试题两大部分。前者注重基础知识和基本技能,并适当综合该单元的知识;后者则重视数学各学科知识间的横向联系及综合运用。综合测试题的前六套题属基本要求,后六套题则难度有所加强,可供准备参加高考的学生练习。

编 者

1989年1月

# 目 录

## 单元测试题

函数(一).....	(1)
函数(二).....	(3)
三角函数(一).....	(5)
三角函数(二).....	(7)
反三角函数与三角方程.....	(9)
数列与数学归纳法.....	(11)
数列与数列的极限.....	(13)
不等式(一).....	(15)
不等式(二).....	(17)
复数(一).....	(19)
复数(二).....	(21)
排列、组合、二项式定理.....	(23)
直线与平面(一).....	(25)
直线与平面(二).....	(27)
多面体和旋转体.....	(29)
直线.....	(31)
圆锥曲线(一).....	(33)
圆锥曲线(二).....	(35)
参数方程和极坐标.....	(37)

## 综合测试题

综合(一).....	(39)
综合(二).....	(41)
综合(三).....	(43)
综合(四).....	(45)
综合(五).....	(47)
综合(六).....	(49)
综合(七).....	(51)
综合(八).....	(53)
综合(九).....	(55)
综合(十).....	(57)
综合(十一).....	(59)
综合(十二).....	(61)

## 答案与提示

单元测试题.....	(63)
综合测试题.....	(77)

## 单元测试题

### 函 数 (一)

#### 一、选择题(每题4分,共32分)

1. 已知集合  $M, P, S$  满足  $M \cup P = M \cup S$ , 则恒成立的式子是( )  
(A)  $P = S$ . (B)  $M \cap P = M \cap S$ .  
(C)  $M \cap \bar{P} = M \cap \bar{S}$ . (D)  $\bar{M} \cap P = \bar{M} \cap S$ .
2. 若偶函数  $f(x)$  在  $-1 \leq x < 0$  内的表达式是  $f(x) = x + 1$ , 则在  $0 < x \leq 1$  内的表达式是( )  
(A)  $-x - 1$ . (B)  $-x + 1$ . (C)  $x - 1$ . (D)  $x + 1$ .
3. 满足  $(x - 2)^{5 - |x|} = 1$  的实数解的个数共有( )  
(A) 2个. (B) 3个. (C) 4个. (D) 无数个.
4. 已知  $\lg a, \lg b, \lg c$  三数依次成等差数列, 则必有( )  
(A)  $2b = \lg a + \lg c$ . (B)  $b = \pm \sqrt{ac}$ .  
(C)  $a, b, c$  依次成等差数列. (D)  $a, b, c$  依次成等比数列.
5. 若  $\log_m(e - 2) < \log_n(e - 2) < 0$ , 其中  $m, n$  都是不为1的正数, 则下列各式正确的是( )  
(A)  $1 < n < m$ . (B)  $m < n < 1$ . (C)  $1 < m < n$ . (D)  $n < m < 1$ .
6. “ $\lg(x^2 + 2x - 2) > 0$ ”是“ $\sqrt{x^2} > 1$ ”成立的( )  
(A) 充分不必要条件. (B) 必要不充分条件.  
(C) 充分必要条件. (D) 既不充分也不必要条件.
7. 对数方程  $|\lg(2x - 3)| + |\lg(4 - x^2)| = |\lg(2x - 3) + \lg(4 - x^2)|$  的解是( )  
(A)  $\frac{3}{2} < x < 2$ . (B)  $\sqrt{3} \leq x < 2$ . (C)  $\frac{3}{2} < x < \sqrt{3}$ . (D)  $-2 < x < 2$ .
8. 要使关于  $x$  的不等式  $a^x > a^{\frac{1}{x}}$  的解集是空集, 实数  $a$  的值应该是( )  
(A)  $a > 0$  且  $a \neq 1$ . (B)  $0 < a < 1$ . (C)  $a = 1$ . (D)  $a > 1$ .

#### 二、简答题(每题4分,共24分)

1. 集合  $M = \left\{ (x, y) \left| \begin{cases} x = 3 \cos \theta \\ y = 3 \sin \theta \end{cases}, \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \right. \right\}$  与集合  $P = \left\{ (x, y) \left| \frac{x}{a} + \frac{y}{4} = 1 \right. \right\}$  若满足  $M \cap P \neq \emptyset$ , 求实数  $a$  的取值范围.  
答:
2. 已知函数  $f(x) = ax + b \sin^2 x + 1$  满足  $f(5) = 7$ , 求  $f(-5)$  的值.  
答:
3. 奇函数  $f(x)$  在定义域  $(-1, 1)$  内是减函数, 且  $f(1 - a) + f(1 - a^2) < 0$ , 求实数  $a$  的取值范围.

答:

4. 已知  $(a+1)^{-\frac{1}{3}} < (3-2a)^{-\frac{1}{3}}$ , 求实数  $a$  的取值范围.

答:

5. 若函数  $y=kx$  与函数  $y=\frac{|x|-1}{|x-1|}$  的图象没有交点, 求实数  $k$  的取值范围.

答:

6. 已知关于  $x$  的方程  $\log_a(x-3) - \log_a(x+2) - \log_a(x-1) = 1$  有实根, 求实数  $a$  的取值范围.

答:

三、(满分 10 分)

1. 作出函数  $y = \frac{|x^2-1|x}{x^2-1}$  的图象;

2. 在同一直角坐标系下, 画出函数  $y = -\sqrt{x^2-2x+1}$  与  $\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases} (\pi < \theta < 2\pi)$  的图象,

并求出它们的交点坐标.

四、(满分 12 分) 已知定义域为  $x \in R^+$  的函数  $f(x)$  满足: (1)  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ ; (2)  $f(xy) = f(x) + f(y)$ ; (3) 若  $x > y > 0$ , 则  $f(x) < f(y)$ . 求不等式  $f(-x) + f(3-x) \geq -2$  的解集.

五、(满分 12 分) 已知集合  $M = \{(x, y) | (x+2)^2 + y^2 \leq 1\}$ ,  $N = \{(x, y) | 2x+3 \geq 0\}$ ,  $P = M \cap N$ , 试求  $P$  中到集合  $A = \{(x, y) | 2x - y - 2 = 0\}$  的距离最大、最小点的坐标及最大值、最小值.

六、(满分 10 分) 对任何实数  $x$ , 已知函数  $f(x)$  都满足  $f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}$ , 求证  $f(x+2a) = f(x)$ .

## 函 数 (二)

### 一、选择题(每题4分,共32分)

- “集合  $M \subseteq P$ ” 是 “ $(P \cap S) \supseteq (M \cap S)$ ” 的 ( )  
 (A) 充分不必要条件. (B) 必要不充分条件.  
 (C) 充分必要条件. (D) 既不充分也不必要条件.
- 下列函数中,满足  $f(nx) = [f(x)]^n$  的是 ( )  
 (A)  $f(x) = x^2$ . (B)  $f(x) = a^x$ . (C)  $f(x) = \lg|x|$ . (D)  $f(x) = \sin x$ .
- 已知实数  $x, y$  满足  $2x^2 + y^2 = 6x$ , 则  $x^2 + y^2 + 2x$  的最大值是 ( )  
 (A) 14. (B) 15. (C) 16. (D) 不能确定.
- 方程  $2^x + x^1 = 0$  的解集的元素个数是 ( )  
 (A) 0个. (B) 1个. (C) 2个. (D) 3个.
- 当  $0 < k < 1$  时,关于  $x$  的方程  $|1 - x^2| = kx + k$  的不同解的个数是 ( )  
 (A) 1个. (B) 2个. (C) 3个. (D) 4个.
- 若  $-1 < x < 0$ , 则  $0.5^x, 5^x, 5^{-x}$  之间的大小关系是 ( )  
 (A)  $5^{-x} < 5^x < 0.5^x$ . (B)  $5^x < 0.5^x < 5^{-x}$ .  
 (C)  $0.5^x < 5^{-x} < 5^x$ . (D)  $5^x < 5^{-x} < 0.5^x$ .
- 对任一  $x \in (1, a)$ , 记  $m = \log_a \log_2 x$ ,  $n = \log_a x^2$ ,  $p = (\log_2 x)^2$ , 则  $m, n, p$  的大小关系是 ( )  
 (A)  $m < n < p$ . (B)  $m < p < n$ . (C)  $n < m < p$ . (D)  $p < n < m$ .
- 不等式  $x^{\log_2 x - 1} > \frac{16}{x}$  的解集是 ( )  
 (A)  $\left\{x \mid 0 < x < \frac{1}{4}\right\}$ . (B)  $\left\{x \mid 0 < x < \frac{1}{4} \text{ 或 } x > 4\right\}$ .  
 (C)  $\{x \mid x > 4\}$ . (D)  $\emptyset$ .

### 二、简答题(每题4分,共24分)

- 已知集合  $A = \{(x, y) \mid (x-2)^2 + (y+3)^2 \leq 4\}$ ,  
 $B = \left\{(x, y) \mid (x-1)^2 + (y-a)^2 \leq \frac{1}{4}\right\}$ , 且  $A \cap B = B$ , 求实数  $a$  的取值范围.

答:

- 求函数  $f(x) = 2^{\sqrt{x-2}} + \log_2(x^2 - 4)$  的定义域.

答:

- 若定义在实数集上的  $f(x)$  是一个最小正周期为3的周期函数, 且有  $f(x) = \begin{cases} -x & (0 \leq x \leq \frac{3}{2}) \\ x & (-\frac{3}{2} \leq x \leq 0) \end{cases}$ ,



求  $f(7)$  与  $f(-6.5)$  的值.

答:

4. 已知幂函数  $y = x^n$  在第一象限内的图象是:  $x < 1$  时图形在直线  $y = x$  的上方;  $x > 1$  时图形在直线  $y = x$  的下方. 求  $n$  的取值范围.

答:

5. 求  $(\sqrt{x})^{\log_2 x^2} = 5$  的实数解.

答:

6. 若函数  $f(x) = (x-1)\log_3 a - 6x\log_3 a + x + 1$  在  $0 \leq x \leq 1$  内恒取正值, 求实数  $a$  的取值范围.

答:

三、(满分10分) 已知函数  $y = 2x^2 \log_a b + 3x \log_a a + 9$  的图象全部在  $x$  轴的上方, 求  $a, b$  应满足的关系式.

四、(满分12分) 已知集合  $A = \{x | f(x) = x\}$  与集合  $B = \{x | f[f(x)] = x\}$ , 其中函数  $f(x) = x^2 + ax + b$  ( $x, a, b \in \mathbb{R}$ ). 1. 若  $A = \{-1, 3\}$ , 求集合  $B$ ; 2. 若  $A$  是单元素集, 讨论集合  $A, B$  之间的关系.

五、(满分10分) 已知函数  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  ( $x > 0$ ) 和定义在  $\mathbb{R}$  上的奇函数  $g(x)$ , 且当  $x > 0$  时有  $g(x) = f(x)$ . 求: 1.  $f(x)$  的反函数, 并画出图象; 2.  $g(x)$  的表达式, 并画出图象.

六、(满分12分) 已知  $f_1(x) = f(x) = -\frac{2}{1+x}$ ,  $f_{n+1}(x) = f[f_n(x)]$ , 求满足  $\left| \frac{f_n(0) - 1}{f_n(0) + 2} \right| > \frac{1}{9}$  的自然数  $n$ .

## 三角函数 (一)

### 一、选择题(每题4分,共32分)

1. 已知  $\operatorname{tg} \alpha = m (m \neq 0)$ , 且  $\sin \alpha = -\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$ , 则  $\alpha$  是( )
 

(A) 第一或第二象限角.      (B) 第二或第三象限角.  
(C) 第三或第四象限角.      (D) 第一或第四象限角.
2. 若  $\theta$  为锐角, 则  $\sec \theta^{\log_{\sec \theta} \frac{1}{4}}$  的值为( )
 

(A)  $\frac{1}{4}$ .      (B) 4.      (C)  $-\frac{1}{4}$ .      (D)  $\Rightarrow 4$ .
3. “ $\alpha = 2k\pi + \beta$ ” ( $k \in Z$ ) 是 “ $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$ ” 的( )
 

(A) 充分不必要条件.      (B) 必要不充分条件.  
(C) 充分必要条件.      (D) 既不充分也不必要条件.
4. 函数  $y = \frac{\cos(x + \frac{\pi}{4}) - \sin(x + \frac{\pi}{4})}{\cos(x + \frac{\pi}{4}) + \sin(x + \frac{\pi}{4})}$  是在  $x \in R$  上的( )
 

(A) 递增的奇函数.      (B) 递减的奇函数.  
(C) 非单调的奇函数.      (D) 既非奇函数又非单调函数.
5. 在 “①  $\sin \frac{2}{7}\pi < \sin \frac{6}{7}\pi$ , ②  $\cos \frac{2}{7}\pi < \cos \frac{6}{7}\pi$ , ③  $\operatorname{ctg} \frac{2}{7}\pi < \operatorname{ctg} \frac{6}{7}\pi$ , ④  $\operatorname{csc} \frac{2}{7}\pi < \operatorname{csc} \frac{6}{7}\pi$ ” 这四个式子中, 正确的个数是( )
 

(A) 0个.      (B) 1个.      (C) 2个.      (D) 3个.
6. 函数  $y = \sin x - |\sin x|$  的值域是( )
 

(A)  $-1 \leq y \leq 0$ .      (B)  $0 \leq y \leq 1$ .      (C)  $\Rightarrow 1 \leq y \leq 1$ .      (D)  $-2 \leq y \leq 0$ .
7. 已知集合  $M = \left\{ \theta \mid \sin \theta \geq \frac{1}{2}, 0 \leq \theta \leq \pi \right\}$ ,  $N = \left\{ \theta \mid \cos \theta \leq \frac{1}{2}, 0 \leq \theta \leq \pi \right\}$ , 则  $M \cap N$  等于( )
 

(A)  $\left\{ \theta \mid \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6} \right\}$ .      (B)  $\left\{ \theta \mid \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3} \right\}$ .  
(C)  $\left\{ \theta \mid \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6} \right\}$ .      (D)  $\left\{ \theta \mid \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \pi \right\}$ .
8. 已知  $\cos x - \cos y = \frac{1}{2}$ ,  $\sin x - \sin y = \frac{1}{3}$ , 则  $\sin(x+y)$  的值是( )

(A)  $-\frac{12}{13}$ . (B)  $-\frac{3}{5}$ . (C)  $\frac{3}{5}$ . (D)  $\frac{12}{13}$ .

二、简答题(每题4分,共24分)

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B} = \frac{c}{\cos C}$ , 试判断这个三角形的形状.

答:

2. 求函数 $y = \frac{\lg(\operatorname{tg} x - 1)}{\sqrt{\cos x}}$ 的定义域.

答:

3. 求函数 $y = \sin x + \cos x$ 的单调递增区间.

答:

4. 已知 $\triangle ABC$ 的三内角满足 $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = 3\sqrt{3}$ ,  $\operatorname{tg}^2 B = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} C$ , 求 $\angle B$ 的度数.

答:

5. 已知 $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$ , 试比较 $(\sin x + \cos x)^{\sqrt{3}}$ 与 $(\sin x - \cos x)^{\sqrt{3}}$ 的大小.

答:

6. 直角坐标平面上, 已知点 $P(x, y)$ 的坐标同时满足 $2\sin 2x - \cos 3y = 3$ 和 $x^2 + y^2 \leq 4$ , 求点 $P$ 的集合.

答:

三、(满分8分) 已知函数 $y = 2\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right)$ .

1. 画出一个周期的图象; 2. 求它的振幅、周期与初相.

四、证明题(每题7分,共14分)

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 求证 $a \geq b \cos B + c \cos C$ .

2. 求证 $\cos^2(\alpha - 3\beta) + \cos^2 3\beta - 2\cos(\alpha - 3\beta)\cos \alpha \cos 3\beta$ 的值与 $\beta$ 无关.

五、(满分10分) 以 $AB$ 为直径( $AB$ 的长为 $2a$ )的半圆 $O$ 上的点 $C$ 满足 $\angle AOC = 60^\circ$ , 点 $T$ 是 $\widehat{BC}$ 上一点, 记 $\angle BOT = 2\alpha$ , 试写出 $|TA| + |TB| + |TC|$ 关于 $\alpha$ 的函数 $f(\alpha)$ , 并求出 $f(\alpha)$ 的最大值.

六、(满分12分) 已知关于 $x$ 的方程 $\sin x + \sqrt{3}\cos x + a = 0$ 在 $x \in (0, 2\pi)$ 内有两相异实数解 $\alpha$ 与 $\beta$ , 求 $a$ 的取值范围或 $\alpha + \beta$ 的值.

## 三 角 函 数 (二)

### 一、选择题(每题4分,共32分)

1. 若  $\alpha \neq \frac{k\pi}{2} (k \in Z)$ , 则  $|\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha|$  的取值范围是( )  
 (A)  $[2, +\infty)$ . (B)  $(0, 2]$ . (C)  $(1, 2)$ . (D)  $[1, +\infty)$ .
2. 下列四式中, 与  $\sqrt{1 - \sin \frac{3}{2}}$  相等的式子是( )  
 (A)  $\cos \frac{3}{2}$ . (B)  $\sin \frac{3}{4} - \cos \frac{3}{4}$ .  
 (C)  $\cos \frac{3}{4} - \sin \frac{3}{4}$ . (D)  $-(\sin \frac{3}{4} + \cos \frac{3}{4})$ .
3. 函数  $y = \sqrt{\cos(\sin x)}$  的定义域是( )  
 (A)  $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2k\pi, k \in Z$ . (B)  $2k\pi \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z$ .  
 (C)  $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z$ . (D)  $x \in R$ .
4. 在“①  $y = \sin|x|$ 、②  $y = |\sin x|$ 、③  $y = \cos|x|$ 、④  $y = |\cos x|$ 、⑤  $y = |\sin x \cos x|$ ”这五个函数中, 最小正周期为  $\pi$  的函数个数是( )  
 (A) 1个. (B) 2个. (C) 3个. (D) 4个.
5. 已知  $|\cos \alpha| \leq |\sin \alpha|$ , 则  $\alpha$  的取值范围是( )  
 (A)  $[2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{5\pi}{4}], k \in Z$ . (B)  $[2k\pi - \pi, 2k\pi], k \in Z$ .  
 (C)  $[k\pi + \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{3\pi}{4}], k \in Z$ . (D)  $[k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{4}], k \in Z$ .
6. 已知函数  $y = k \sin(\omega x + \varphi)$  在同一周期内, 当  $x = \frac{\pi}{12}$  时,  $y_{\text{大}} = 2$ , 当  $x = \frac{7\pi}{12}$  时,  $y_{\text{小}} = -2$ , 则函数表达式是( )  
 (A)  $y = 2 \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ . (B)  $y = 2 \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ .  
 (C)  $y = 2 \sin(x + \frac{\pi}{3})$ . (D)  $y = 2 \sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6})$ .
7. 已知  $\theta$  为锐角, 且  $\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{x-1}{2x}}$ , 则  $\operatorname{tg} \theta$  的值为( )  
 (A)  $\frac{\sqrt{x-1}}{x+1}$ . (B)  $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ . (C)  $\sqrt{x^2-1}$ . (D)  $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$ .

8. 已知  $\cos(\alpha - \beta) = -\frac{4}{5}$ ,  $\cos(\alpha + \beta) = \frac{4}{5}$ , 且  $\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < \pi$ ,  $\frac{3\pi}{2} < \alpha + \beta < 2\pi$ , 则

$\cos 2\beta$  的值是 ( )

(A) -1. (B)  $\frac{3}{5}$ . (C)  $\frac{4}{5}$ . (D) 1.

二、简答题(每题4分,共24分).

1. 化简  $\sin^2 \theta \operatorname{tg} \theta + \cos^2 \theta \operatorname{ctg} \theta + 2 \sin \theta \cos \theta$ .

答:

2. 求函数  $y = \log_{0.2} \sqrt{\sin x}$  的递增区间.

答:

3. 求函数  $y = \sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \cos\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{6}\right)$  的振幅和最小正周期.

答:

4. 已知角  $\alpha, \beta$  满足  $\operatorname{tg} \alpha = 1$  与  $3 \sin \beta = \sin(2\alpha + \beta)$ , 求  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$  的值.

答:

5. 已知  $A, B, A+B$  都是锐角, 记  $p = \sin(A+B)$ ,  $q = \sin A + \sin B$ ,  $r = \cos A + \cos B$ , 试比较  $p, q, r$  的大小.

答:

6. 已知  $\sin x + \sin y = 1$ , 求  $\cos x + \cos y$  的取值范围.

答:

三、(满分8分) 求  $\operatorname{ctg} 70^\circ + 4 \cos 70^\circ$  的值.

四、证明题(每题7分,共14分)

1. 已知  $\operatorname{tg}^2 \alpha = 2 \operatorname{tg}^2 \beta + 1$ , 求证  $\cos 2\alpha + \sin^2 \beta = 0$ .

2. 求证  $4 \sin^3 \alpha \cos 3\alpha + 4 \cos^3 \alpha \sin 3\alpha = 3 \sin 4\alpha$ .

五、(满分10分) 已知  $\begin{cases} x \cos \alpha = \cos^2 \alpha + 1, \\ y \cos^2 \alpha = \cos^4 \alpha + 1. \end{cases}$  1. 试用  $x$  的式子表示  $y$ ; 2. 若  $0 \leq \alpha < \pi$ ,

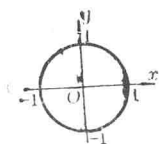
画出以  $(x, y)$  为坐标的点的轨迹曲线.

六、(满分12分)  $\triangle ABC$  中, 一边  $|BC| = 2a$ , 顶点  $A$  在平行于  $BC$  且与  $BC$  相距为  $a$  的直线上滑动, 求  $\left(\frac{AB}{AC}\right)^2$  的取值范围.

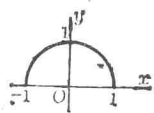
## 反三角函数与三角方程

### 一、选择题(每题4分,共32分)

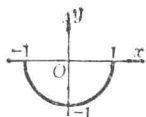
1. 函数  $y = \arccos(\sqrt{2}\sin x)$  的定义域是( )
- (A)  $\left[k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{4}\right], k \in Z$ . (B)  $[-1, 1]$ .
- (C)  $\left[2k\pi - \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{4}\right], k \in Z$ . (D)  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ .
2. 在“①  $y = -\arcsin x$ , ②  $y = \arccos x - \frac{\pi}{2}$ , ③  $y = -\arctg x$ , ④  $y = -\operatorname{arccotg} x$ ”这四个函数中,是递减的奇函数的个数有( )
- (A) 1个. (B) 2个. (C) 3个. (D) 4个.
3.  $\arccos(\cos \pi^2)$  的值是( )
- (A)  $\pi^2$ . (B)  $3\pi - \pi^2$ . (C)  $4\pi - \pi^2$ . (D)  $\pi^2 - 4\pi$ .
4. 见图1, 函数  $y = \sin(\arccos x)$  的图象是( )



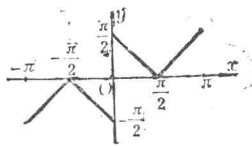
(A)



(B)



(C)



(D)

图1

5. 已知  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ,  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ , 则  $x$  的值是( )
- (A)  $\arccos \frac{\sqrt{3}}{4}$ . (B)  $-\arccos \frac{\sqrt{3}}{4}$ .
- (C)  $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ . (D)  $2\pi - \arccos \frac{\sqrt{3}}{4}$ .
6. 满足方程  $\cos(2x + 45^\circ) = \sin(30^\circ - x)$  的最小正角是( )
- (A)  $5^\circ$ . (B)  $15^\circ$ . (C)  $30^\circ$ . (D)  $37.5^\circ$ .
7. 记方程  $\cos 2x = 1$  的解集为  $M$ , 方程  $\sin 4x = 0$  的解集为  $P$ , 则  $M$  与  $P$  之间的关系是( )
- (A)  $M \subset P$ . (B)  $M \supset P$ . (C)  $M = P$ . (D)  $M \not\subset P$  且  $M \not\supset P$ .
8. 已知  $f(\cos x) = \cos 3x$ , 则方程  $f(\sin x) = \sin x$  的解集是( )
- (A)  $\left\{0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right\}$ . (B)  $\left\{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z\right\}$

(C)  $\left\{x \mid x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ . (D)  $\left\{x \mid x = 2k\pi \text{ 或 } x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

二、简答题(每题4分,共24分)

1. 求函数  $y = 2 \arccos(x-2)$  的反函数.

答:

2. (1) 当  $x \in [-1, 1]$  时, 化简  $\sin(2 \arcsin x)$ ;

(2) 已知  $\arcsin\left[\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \alpha - \frac{\pi}{2}$ , 求  $\alpha$  的取值范围.

答:

3. 比较  $\arcsin \frac{2}{3}$ ,  $\arccos \frac{3}{4}$ ,  $\operatorname{arctg} \sqrt{2}$  的大小.

答:

4. 已知实数  $a > 0, b < 0$ , 求:

(1) 直线  $ax = by - 5$  的倾斜角  $\alpha$ ;

(2) 复数  $z = a + bi$  的辐角主值  $\arg z$ .

答:

5. 已知  $\arccos 2x < \arccos(x^2 - x)$ , 求  $x$  的取值范围.

答:

6. 求下列各方程的解集:

(1)  $\cos 6x \cos 8x - \cos 5x \cos 7x = 0$ ;

(2)  $\cos^2 x = \cos^2 \frac{\pi}{7}$ .

答:

三、(满分10分, 其中第1题4分) 画出下列函数的图象:

1.  $y = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \arcsin 2x\right)$ ; 2.  $y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$ .

四、(满分10分) 依次成等差数列的三个正数  $a, b, c$  满足  $a + b = c$  与

$\operatorname{arctg} \frac{1}{a} + \operatorname{arctg} \frac{1}{b} + \operatorname{arctg} \frac{1}{c} = \frac{\pi}{2}$ , 求  $a, b, c$  的值.

五、(满分12分, 其中第1题4分) 解下列各方程: 1.  $4 \sin 2x + 10 \sin x - 4 \cos x - 5$

$= 0$ ; 2.  $\log_{\sin x \cos x} \sin x \cdot \log_{\sin x \cos x} \cos x = \frac{1}{4}$ .

六、(满分12分) 已知  $\triangle ABC$  的内角  $A, B$  满足方程  $8 \sin^2 x + 3 \sin 2x - 4 = 0$ , 且  $A < B$ , 求这三三角形三边之比.

## 数列与数学归纳法

### 一、选择题(每题4分,共32分)

1. “ $b^2 = ac$ ”是“ $a, b, c$ 成等比数列”的( )  
 (A) 充分不必要条件. (B) 必要不充分条件.  
 (C) 充分必要条件. (D) 既不充分也不必要条件.
2. 数列  $\frac{1}{1-2}, \frac{2}{4+4}, \frac{3}{16-6}, \frac{4}{64+8}, \dots$  的一个可能的通项公式是( )  
 (A)  $a_n = \frac{n}{4^n + (-1)^n(2n)}$ . (B)  $a_n = \frac{n}{4^{n-1} + (-1)^{n-1}(2n)}$ .  
 (C)  $a_n = \frac{n}{4^{n-1} + (-1)^n(2n)}$ . (D)  $a_n = \frac{n}{4^n + (-1)^{n-1}(2n)}$ .
3. 已知三角形的三内角成等差数列,且对应的三边成等比数列,则三内角的公差等于( )  
 (A)  $\frac{\pi}{4}$ . (B)  $\frac{\pi}{6}$ . (C)  $\frac{\pi}{12}$ . (D) 0.
4. 小于1000且不能被5和7整除的自然数的个数是( )  
 (A) 680个. (B) 682个. (C) 684个. (D) 686个.
5. 已知  $a, b$  为不相等的两个正数,且  $a, x, y, b$  依次成等差数列,  $a, m, n, b$  依次成等比数列,则  $x+y$  与  $m+n$  的大小关系是( )  
 (A)  $x+y < m+n$ . (B)  $x+y = m+n$ . (C)  $x+y > m+n$ . (D) 不能确定.
6. 数列  $1, (1+2), (1+2+2^2), \dots, (1+2+2^2+\dots+2^{n-1}), \dots$  的前99项之和是( )  
 (A)  $2^{100} - 101$ . (B)  $2^{99} - 101$ . (C)  $2^{100} - 99$ . (D)  $2^{99} - 99$ .
7. 已知两个等差数列:  $2, 5, 8, \dots, 197$  和  $2, 7, 12, \dots, 197$ , 则这两个数列中的相同项之和是( )  
 (A) 1390. (B) 1391. (C) 1392. (D) 1393.
8. 已知  $a_k (k=1, 2, 3, \dots, 25)$  取0或2, 则形如  $x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \dots + \frac{a_{25}}{3^{25}}$  的一切  $x$  恒满足( )  
 (A)  $0 \leq x < \frac{1}{3}$ . (B)  $\frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}$ .  
 (C)  $\frac{2}{3} \leq x < 1$ . (D)  $0 \leq x < \frac{1}{2}$  或  $\frac{2}{3} \leq x < 1$ .

### 二、简答题(每题4分,共24分)

1. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = \frac{1}{2}, S_n = n^2 a_n (n \in N)$ , 求它的通项公式.



答:

2. 求  $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$  与  $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$  这两个数的等差中项和等比中项。

答:

3. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项的和  $S_n = 7n^2 - 5n$ , 求  $a_{501}$ 。

答:

4. 若数列的通项公式是  $a_n = \frac{2}{3}(\sqrt{3})^{2n-1}$ , 求它的前  $2n-1$  项之和。

答:

5. 求数列  $10, 200, 3000, 40000, \dots, n \cdot 10^n$  各项之和。

答:

6. 从盛满  $m$  公升且浓度为  $b\%$  的酒精溶液容器里倒出  $a$  公升, 然后用水加满, 再倒出  $a$  公升, 再用水加满, 这样连续倒了  $n$  次。此时容器里还剩下多少公升酒精?

答:

三、(满分 10 分) 已知  $\sin \theta, \sin \alpha, \cos \theta$  依次成等差数列,  $\sin \theta, \sin \beta, \cos \theta$  依次成等比数列, 求证  $2 \cos 2\alpha = \cos 2\beta$ 。

四、(满分 10 分) 用数学归纳法证明:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \quad (n \in N).$$

五、(满分 12 分) 以边长为  $a$  的正三角形的高线为边作第二个正三角形, 再以第二个正三角形的高线为边再作第三个正三角形,  $\dots$ , 以此类推, 求前 10 个正三角形的面积之和。

六、(满分 12 分) 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n \cos x + \cos nx \quad (x \neq k\pi, k \in Z)$ 。

1. 写出  $a_2, a_3, a_4$ ; 2. 猜想出通项公式  $a_n$ , 并用数学归纳法加以证明。