高等院校教材同步辅导及考研复习用书

燎原教育

丛书主编 马德高

本册主编 张天德

线性代数
辅导及习题精解

同济·第五版

教材习题全解 指导同步学习
考研真题精讲 剖析考研重点

全国百佳图书出版单位
时代出版传媒股份有限公司
安徽人民出版社

丛书主编 马德高

线性代数
辅导及习题精解

同济·第五版

本册主编 张天德

副主编 邢建民 刘红星 秦玉芳

全国百佳图书出版单位
APGTIME 时代出版
时代出版传媒股份有限公司
安徽人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数辅导及习题精解 ： 同济第5版 / 马德高主编. —合肥 ： 安徽人民出版社，2013.6

ISBN 978-7-212-06607-9

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①马… Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第123631号

线性代数辅导及习题精解(同济第5版)

马德高　主编

出 版 人:胡正义　　责任编辑:杜宇民　吴 筠

封面设计:燎原视觉设计中心

出版发行:时代出版传媒股份有限公司　http://www.press-mart.com

安徽人民出版社 http://www.ahpeople.com

合肥市政务文化新区翡翠路1118号出版传媒广场八楼

邮　编:230071

营销部电话:0551—63533258　0551—63533292(传真)

印　刷:淄博德恒印刷有限公司

(如发现印装质量问题,影响阅读,请与印刷厂商联系调换)

开本:880×1230　1/32　印张:10　字数:310千

版次:2013年6月第1版　2013年6月第1次印刷

标准书号:ISBN　978-7-212-06607-9　定价:16.80元

请沿此虚线剪下

前 言

《线性代数》是高等院校理工科专业和部分文科专业一门重要的基础课程，也是历年硕士研究生入学考试的重点科目。为了帮助广大高校在校生和正在准备考研的学子学好、复习好《线性代数》这门课程，我们编者编写了这本与同济大学应用数学系编写的《线性代数》(第五版)章节、内容完全同步的《线性代数辅导及习题精解》配套辅导用书，给您系统梳理了知识结构、清晰提炼了重点考点、深入讲解了思路方法、权威提供了课后答案，让您稳步牢固学深、吃透教材知识，融会贯通方法技巧。同时，应广大读者需求，注意紧密联系考研、精讲历年真题，设计同步自测、提供高效练习，让读者在学好教材的同时积极备考硕士研究生入学考试。

全书章节内容设置基本上与教材完全同步，共分六章，每一章又分为若干节，循着教材顺序对每一章每一节内容清晰梳理、深入讲解，每一章内容讲完后，再对整章内容重点做一回顾和加深，然后提供该章同步自测题。最后在全书末给出课本所有的习题详细解答。

讲解结构三大部分

一、教材内容讲解　这部分由两块组成：教材知识全解、典型例题解析。

1. 教材知识全解　包括两部分：本节知识结构图解、重点及常考点突破

(1)本节知识结构图解　这一部分用直观、形象的图表形式，将该节知识结构、相互联系、逻辑关系清晰地展示给读者。便于读者对比各个概念、性质和定理，在比较中加深理解，使知识更加系统化。

(2)重点及常考点突破　这一部分将该节重要的知识点、考点清晰、准确地提炼出来，并用简洁的语言对学习这些重点、考点时需要注意的问题一一点明，让读者抓住重点、有针对性地进行复习。

2. 典型例题解析　这一部分是每一节讲解中的核心内容，也是全书的核心内容。作者基于多年的教学经验和对研究生入学考试试题研究的经验，将该节教材内容中学生需要掌握的、考研中经常考到的重点、难点、考点，归纳为一个个的在考试中可能出现的基本题型，然后针对每一个基本题型，举出大量的精选例题深入讲解，使您对每一个知识点扎实掌握，并能熟练运用在具体解题中。可谓基础知识梳理、重点考点深讲、联系考试解题三重互动、一举突破，从而获得实际应用应试能力的全面提升。例题讲解中穿插出现的“思路探索”、“方法点击”，更是巧妙点拨，让您举一反三、触类旁通。

前言

二、每章知识整合　这部分有三块组成：本章知识图解、本章知识总结、本章同步自测。

1. 本章知识图解　用网络结构图的形式揭示出本章知识点之间的有机联系，以便于学生从总体上系统地掌握本章知识体系和核心内容。

2. 本章知识总结　对本章所学的知识进行系统的回顾，帮助读者更好的复习与总结。

3. 本章同步自测　精选部分有代表性、测试价值高的题目（部分题目选自历年全国研究生入学考试试题），以此检测、巩固读者的学习效果，提高应试水平。

三、教材习题详解　该部分放在全书的书末，并对教材中的全部习题作了详细解答，有的习题还给出了一题多解，以培养读者的分析能力和发散思维能力。

内容编写三大特色

一、知识梳理清晰、简洁　直观、形象的条目总结，精练、准确的考点提炼，权威、独到的方法归纳，将教材内容抽丝剥茧、层层展开，呈现给读者简明扼要、层次分明的知识结构，便于读者快速复习、高效掌握，形成稳固、扎实的知识网，为提高解题能力和思维水平夯实基础。

二、能力提升迅速、持续　所有重点、难点、考点，统统归纳为一个个在考试中可能出现的基本题型，然后针对每一个基本题型，举出丰富的精选例题、考研真题，举一反三、深入讲解，真正将知识掌握和解题能力提升高效结合、一举完成。

三、联系考研密切、实用　本书既是一本教材同步辅导，也是一本考研复习用书，书中处处联系考研：例题中有考研试题，同步自测中也有考研试题，更不用说讲解中处处渗透考研经常考到的考点、重点等，为的就是让同学们同步完成考研备考，达到考研要求的水平。

本书注意博采众家之长，参考了多本同类书籍，吸取了不少养分。在此向这些书籍的编著者表示感谢。由于我们水平有限，书中疏漏与不妥之处，在所难免，敬请广大读者提出宝贵意见，以便再版时更正、改进。

编者

目录

教材知识全解+教材习题详解

教材知识全解

目录

教材知识全解+教材习题详解

教材习题详解

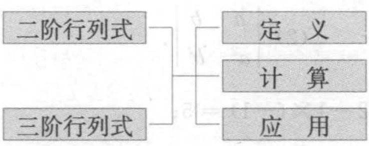
第一章 行列式

行列式是整个线性代数的基础，它要求我们在概念上要清晰，运用时要灵活，对知识的衔接与内在联系要掌握好. 一方面要掌握行列式的计算方法，另一方面，要注意行列式与其他数学知识的结合. 本章的重点是行列式的计算，要学会利用行列式的性质及按行(列)展开等基本方法来简化行列式的运算，并掌握两行(列)交换、某行(列)乘数、某行(列)加上另一行(列)的 k 倍这三类运算.

第一节 二阶与三阶行列式

教材知识全解

本节知识结构图解



重点及常考点突破

1. 二阶与三阶行列式定义

名 称	定 义	备 注
二阶行列式	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$	① 行列式从本质上讲就是一个数；② 注意在行列式展开过程中各项的正负号是否正确
三阶行列式	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$	

2. 二阶行列式的应用

问题	应用	说明
解二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$	记 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$，则 $x_1 = \dfrac{D_1}{D}$，$x_2 = \dfrac{D_2}{D}$	这个应用推广到一般情况就是克拉默法则(本章第七节)

3. 对应习题

习题一第 1 题(教材 $P_{25\sim26}$)

典型例题解析

题型Ⅰ：二阶行列式的计算

【例 1】 计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$.

解:(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\times 2 - 1\times(-1) = 5$；

(2) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = a\times b^2 - b\times a^2 = ab(b-a)$.

方法点击:二阶行列式可由定义直接计算. 通过此题，读者应熟练掌握二阶行列式的定义.

题型Ⅱ：三阶行列式的计算

【例 2】 计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{vmatrix}$；　(3) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$.

解:(1) $\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6\times1\times1+2\times2\times2+1\times3\times1-1\times1\times2-2\times3\times1-2\times1\times6$

$= -3$；

(2) $\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{vmatrix} = 0\times0\times0 + x\times z\times(-y) + y\times(-x)\times(-z) - y\times0\times(-y)$

$$-0\times z\times(-z)-x\times(-x)\times 0=0;$$

$$(3)\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha & 1\\ \sin\beta & \cos\beta & 1\\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1\end{vmatrix}=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\alpha-\sin\gamma\cos\beta-\sin\alpha\cos\gamma-\sin\beta\cos\alpha$$

$$=\sin(\alpha-\beta)+\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha).$$

方法点击:本题利用对角线法则直接计算.通过此题,读者应熟练掌握三阶行列式定义,其中要特别注意各项的正负号.

题型Ⅲ:行列式的应用

【例3】 用行列式解下列方程.

(1) $\begin{cases}6x_1-4x_2=10;\\5x_1+7x_2=29;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}4x_1+5x_2=0,\\3x_1-7x_2=0.\end{cases}$

解:(1) $D=\begin{vmatrix}6 & -4\\5 & 7\end{vmatrix}=6\times7-(-4)\times5=62\neq0,$

$D_1=\begin{vmatrix}10 & -4\\29 & 7\end{vmatrix}=10\times7-(-4)\times29=186,$

$D_2=\begin{vmatrix}6 & 10\\5 & 29\end{vmatrix}=6\times29-5\times10=124,$

所以 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{186}{62}=3,\quad x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{124}{62}=2.$

(2) $D=\begin{vmatrix}4 & 5\\3 & -7\end{vmatrix}=4\times(-7)-5\times3=-43\neq0,$

$D_1=\begin{vmatrix}0 & 5\\0 & -7\end{vmatrix}=0\times(-7)-0\times5=0,$

$D_2=\begin{vmatrix}4 & 0\\3 & 0\end{vmatrix}=0\times4-0\times3=0,$

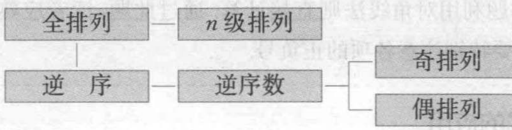
所以 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{0}{-43}=0,\quad x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{0}{-43}=0.$

方法点击:本题是行列式的一个初步应用.读者应注意观察 D、D_1、D_2 与方程组系数的对应关系,找出其规律.事实上,此规律可推广到更高阶线性方程组,读者在后面的章节中将会学习到.

第二节 全排列及其逆序数

教材知识全解

本节知识结构图解



重点及常考点突破

1. 全排列

概 念	n个不同元素排成一列称为n个元素的全排列
特 例	n个自然数的排列
所有排列种数	$P_n = n!$

2. 逆序数

名 称	内 容	备 注
逆 序	排列中的某两个元素的先后次序与标准次序(规定的)不同,就说有一个逆序	常用标准次序是从小到大
逆序数	一个排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中所有逆序的总和称为**这个排列的逆序数**,记为 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$	τ为奇数,称为奇排列;τ为偶数,称为偶排列
逆序数公式	(1) $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) = i_2$ 前面比 i_2 大的数的个数 $+ i_3$ 前面比 i_3 大的数的个数 $+ \cdots + i_n$ 前面比 i_n 大的数的个数; (2) $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) = i_1$ 后面比 i_1 小的数的个数 $+ i_2$ 后面比 i_2 小的数的个数 $+ \cdots + i_{n-1}$ 后面比 i_{n-1} 小的数的个数	

3. 本节对应习题

习题一第2题(教材 P_{26})

典型例题解析

题型Ⅰ:逆序数的求法

【例1】 求下列排列的逆序数.

(1) 134782695; (2) 987654321.

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 3\ 4\ 7\ 8\ 2\ 6\ 9\ 5 \\
\text{解:(1) } \tau(134782695)=0+0+0+0+4+2+0+4=10;
\end{array}
$$

用第一种算法

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2 \\
\text{(2) } \tau(987654321)=8+7+6+5+4+3+2+1=36.
\end{array}
$$

用第二种算法

方法点击:求逆序数一般按上面给出的公式依次来算,对初学者来说,可按本例给出的虚线对应,以避免出错. 通过本题,读者应充分理解逆序和排列的逆序数的定义,并掌握求排列的逆序数所常用的两种方法.

【例 2】 求下列排列的逆序数,并确定它们的奇偶性.

(1) $n(n-1)\cdots21$; (2) $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$;

(3) $135\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots42$.

解:(1) 由第一种计算法有 $\tau(n(n-1)\cdots21)=1+2+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

对$\dfrac{n(n-1)}{2}$的奇偶性判断,需按以下情况进行讨论:

当 $n=4k$ 时,$\dfrac{n(n-1)}{2}=2k(4k-1)$ 为偶数;

请注意:为什么要分四种情况而不是两种

当 $n=4k+1$ 时,$\dfrac{n(n-1)}{2}=2k(4k+1)$ 为偶数;

当 $n=4k+2$ 时,$\dfrac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+1)$ 为奇数;

当 $n=4k+3$ 时,$\dfrac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+3)$ 为奇数;

因此,当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时,此排列为偶排列;当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时,此排列为奇排列($k\in\mathbf{Z}^+\cup\{0\}$).

(2) 由第二种计算法,排列中前 n 个数 $1,3,5,\cdots,(2n-1)$ 之间不构成逆序,后 n 个数 $2,4,6,\cdots,(2n)$ 之间也不构成逆序,只有前 n 个数与后 n 个数之间才构成逆序,因此

$$\tau(135\cdots(2n-1)246\cdots(2n))=0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

由(1)可知,当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时,此排列为偶排列;当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时,此排列为奇排列($k\in\mathbf{Z}^+\cup\{0\}$).

(3) 由第二种计算法,$\tau(135\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots42)=0+1+\cdots+n-1+n-1+\cdots+1+0=n(n-1)$.

因为对任意 $n\in\mathbf{Z}^+$,$n(n-1)$ 均为偶数,故所给排列为偶排列.

题型Ⅱ：求抽象排列的逆序数

【例 3】 设排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 的逆序数为 k，则 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数是多少？

解法一：排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 中，x_1 后面比 x_1 小的数的个数为 a_1，则 x_1 后面比 x_1 大的数的个数为 $n-1-a_1$，所以排列为 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 中，x_1 前面比 x_1 大的数的个数为 $n-1-a_1$；排列为 $x_1x_2\cdots x_n$ 中，x_2 后面比 x_2 小的数的个数为 a_2，则 x_2 后面比 x_2 大的数的个数为 $n-2-a_2$，所以排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 中 x_2 前面比 x_2 大的数的个数为 $n-2-a_2$；…；排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 中，x_{n-1} 后面比 x_{n-1} 小的数的个数为 a_{n-1}，则 x_{n-1} 后面比 x_{n-1} 大的数的个数为 $1-a_{n-1}$，所以排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 中，x_{n-1} 前面比 x_{n-1} 大的数的个数为 $1-a_{n-1}$。

所以 $\tau(x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1)=x_1$ 前面比 x_1 大的数的个数 $+\,x_2$ 前面比 x_2 大的数的个数 $+\cdots+\,x_{n-1}$ 前面比 x_{n-1} 大的数的个数

$$=(n-1-a_1)+(n-2-a_2)+\cdots+(1-a_{n-1})$$
$$=(1+\cdots+n-1)-(a_1+\cdots+a_{n-1}),$$

由已知可得 $a_1+\cdots+a_{n-1}=k$，故 $\tau(x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1)=\dfrac{n(n-1)}{2}-k$.

解法二：因为任两个元素（比如 x_i,x_j）在 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 和 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 中的一个排列中必形成一个逆序，所以两个排列的逆序之和等于从 n 个元素中取两个元素的组合数，即 $C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$，于是

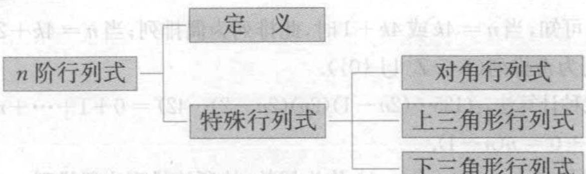
$$\tau(x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1)=\frac{n(n-1)}{2}-\tau(x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n)=\frac{n(n-1)}{2}-k.$$

方法点击：通过考查 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 中逆序与 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 中逆序之间的关系，加深对逆序及排列逆序数的理解.

第三节 n 阶行列式的定义

教材知识全解

本节知识结构图解



重点及常考点突破

1. n 阶行列式

名　称	定　义	理　解
n 阶行列式	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau} t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$	① τ 是排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数；② n 阶行列式等于所有取自不同行不同列的元素之积的代数和

2. 几种特殊行列式

名　称	定　义
对角行列式	$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$
副对角行列式	$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$
下三角形行列式	$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$
上三角形行列式	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$

3. 对应习题

习题一第 3 题(教材 P_{26})

典型例题解析

题型 Ⅰ：求行列式中项的符号

【例 1】　在六阶行列式中，下列两项各带什么符号：

(1) $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$；　　(2) $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$.

解法一：对换项中元素的位置，使每项所对应的行标为自然顺序，即把所给的两项改写为

$$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65} \text{ 及 } a_{14}a_{25}a_{32}a_{43}a_{51}a_{66}$$

这两项的列标所构成的排列分别为：

$$4\,3\,1\,2\,6\,5 \text{ 及 } 4\,5\,2\,3\,1\,6$$

它们的逆序数分别为 6 和 8，均为偶排列，故所给的两项在六阶行列式展开式中均应带正号.

解法二：分别计算两项行标及列标构成的排列逆序数，即计算

$$2\,3\,4\,5\,1\,6,\ 3\,1\,2\,6\,4\,5 \quad ①$$

$$3\,4\,1\,5\,6\,2,\ 2\,3\,4\,1\,6\,5 \quad ②$$

的逆序数.

由于 ① 中两个排列的逆序数均为 4，故项 $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$ 带正号.

由于 ② 中两个排列的逆序数分别为 6 和 4，故项 $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$ 带正号.

方法点击：行列式中某项的符号由该项行标逆序数与列标逆序数之和来确定. 当行标逆序数与列标逆序数的和为偶数时，该项符号为正；当行标逆序数与列标逆序数的和为奇数时，该项符号为负.

题型 Ⅱ：含零元素较多的行列式可由定义计算

【例 2】 计算行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} x_1 & 0 & y_1 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & y_2 \\ y_3 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & y_4 & 0 & x_4 \end{vmatrix}.$$

解：设 $D_4 = |a_{ij}|_{4\times4}$，则 D_4 中第 1 行的非零元素为 $a_{11} = x_1, a_{13} = y_1$，故 $j_1 = 1,3$；同理由第 2,3,4 行可求 $j_2 = 2,4; j_3 = 1,3; j_4 = 2,4$. 因而 j_1, j_2, j_3, j_4 能组成四个 4 级排列：1234；1432；3214；3412. 于是有

$$D = x_1x_2x_3x_4 - x_1y_2x_3y_4 - y_1x_2y_3x_4 + y_1y_2y_3y_4$$
$$= (x_1x_3 - y_1y_3)(x_2x_4 - y_2y_4).$$

方法点击：本题中行列式含零元素较多，从而找出非零项再求和.

【例 3】 用 n 阶行列式的定义直接计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix} \quad (\text{其中 } a_i \neq 0, i = 1,2,\cdots,n).$$

解：由于该行列式中每一行及每一列只有一个非零元素，由 n 阶行列式定义知，D_n 只含

一项 $a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n$，其中元素的下标正好是它们所在行的下标，恰好按自然序排列，而它们所在列的下标构成的排列为 $(n-1)(n-2)\cdots 2\ 1\ n$，这个排列的逆序数为 $\tau=\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$.

所以，$D_n=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n$.

【例 4】 证明：$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$.

证明：根据行列式的定义，项的一般形式为

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

行列式的第 1 行只有 a_{1n} 为非零元，第 2 行除 $a_{2,n-1}$ 和 a_{2n} 外全为零，故第 2 行只能取 $a_{2,n-1}$，…，第 n 行只能取 a_{n1}，则行列式只有 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$ 这一项为非零元，而这一项的列下标所成的排列的逆序数为

$$\tau(n(n-1)\cdots 21)=\frac{n(n-1)}{2},$$

于是 $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$.

方法点击：计算含零较多的行列式时，通常是先按定义写出其一般项，然后结合所给行列式元素的特点分析列下标的可能取值，再进行计算.

【例 5】 证明：(1) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}=0$;

(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$.

证明：(1) 由行列式定义知，

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4j_5)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5},$$

若 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}\neq 0$，由题设知 j_3,j_4,j_5 只能等于 4 或 5，从而 j_3,j_4,j_5 中至少有两个相等，这与 $j_1j_2j_3j_4j_5$ 是 1,2,3,4,5 的一个全排列矛盾，故 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}=0$，于是 $D=0$.

(2) $$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4},$$

由题设，要使 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}\neq 0$，必须 j_1,j_2 取 1 或 2，而 $j_1j_2j_3j_4$ 是 1,2,3,4 的一个全排列，故 j_3,j_4 取 3 或 4，于是

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}+(-1)^{\tau(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} \\ &\quad +(-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}+(-1)^{\tau(2143)}a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}+a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}. \end{aligned}$$

而 $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})(a_{33}a_{44}-a_{43}a_{34})$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}+a_{12}a_{21}a_{34}a_{43},$$

所以等式成立.

题型 Ⅲ：确定某些展开项的系数

【例 6】 求 $\begin{vmatrix} x-3 & a & -1 & 4 \\ 5 & x-8 & 0 & -2 \\ 0 & b & x+1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & x \end{vmatrix}$ 的 x^4 和 x^3 的系数.

解：因为行列式各项中每行每列只能有一个元素，这里每行(列)的最高次数为 1 次，且全部在主对角线上，因此在展开式中，只有主对角线上四个元素乘积能出现三次方和四次方. 而 $(x-3)(x-8)(x+1)x=x^4-10x^3+13x^2+24x$，所以 x^4 的系数是 1，x^3 的系数是 -10.

第四节　对　换

教材知识全解

本节知识结构图解