新堆垒素数论

郑格于 著

吉林大学出版社

新堆垒素数论

郑格于　著

吉林大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

新堆垒素数论/郑格于著. — 长春: 吉林大学出版社, 2011.10
ISBN 978-7-5601-7850-9

Ⅰ. ①新… Ⅱ. ①郑… Ⅲ. ①堆垒素数论Ⅳ. ①O156.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第221446号

书　　名： 新堆垒素数论
作　　者： 郑格于　著

责任编辑、责任校对： 王世林　赵洪波
吉林大学出版社　出版、发行

封面设计： 李耕　张华
襄樊市鑫趵印务有限责任公司　印刷

开本：787×1092毫米　1/16
印张：12　字数：350千字
ISBN 978-7-5601-7850-9

2011年11月第1版
2011年11月第1次印刷
定价：39.00元

社　　址： 长春市明德路501号　　**邮　编：** 130021
发行部电话： 0431-89580026/28/29
网　　址： http://www.jlup.com.cn
E-mail: jlup@mail.jlu.edu.cn

前　言

世界著名的数学家华罗庚曾说过“全世界的人都不去研究数论我还是要去研究数论”. 从这句话可以看出,由于数论学科本身的特点想要研究得很深是有相当难度的. 奉劝读者:(1)在阅读第二章、第三章有困难时心中切勿焦急,慢慢来,有时可借助实际数字作例帮助理解;(2)先可暂不去看第二、三两章,先看第一章、第四章也可以,第六章留到最后看. 第 85 面例 n = 1826 会吸引读者很大兴趣。

请读者原谅我的心情,原本想由易到难地写,但我精力已来不及了. 几年来视力越来越差,去年住了太和医院专治眼睛的病,幸亏没有瞎,今年我已 80 岁了,也想尽快把我 50 年研究成果流传后世,使我不得不把过去写好的文章按先后次序编排成册.

书出版以后,对于个人来说是初告成功,但作为中华民族的成果,作为全人类的精神文明遗产,可能还差很长一段距离,还望国内外名人多多赐教,是鼓励奖励或是诚恳的批评及建议,我均认为是对事业的促进和帮助. 如能在下一次的出版中能看到本书有更加丰富和更加漂亮的成果充实进来,则更是我渴望的.

我特地要感激袁冲同志对我的帮助,此书出版成功,他特别提了一些宝贵的意见. 全书计算机资料以及材料的初始部分由郑远强教授完成,后是由张华同志几年的辛苦劳动所得. 夏季炎热,冬季寒冷他都一直坚持克服困难去完成,这种精神是可贵的. 还有敖琴、郑勇华、李海祁、郑京华、李耕等同志为本书的出版都付出了一些辛苦劳动,以及黄球辉教授对我的大力支持,均在此以表致谢.

著作者

2011 年 3 月 28 日于武当山

目　录

第一章　导　论

定义　设 n 代表 6 以上的偶数，p,q 表奇素数，$p+q=n$，$p\leq q$，则用符号 $f(p,q)=1$ 表之，并令 $P(n)$ 表将 n 分成两素数和的总对数，用式子表示为：

$$P(n)=\sum f(p,q)=\sum 1(p,q\text{ 表奇素数},p\leq q,p+q=n).$$

令 $p^*(n)=0.66(\frac{n}{\log^2 n}-\frac{n}{\log^3 n})$，其中 $\log n$ 表 n 的自然对数，$\log^2 n$ 表自然对数的平方.

在 1978 年之前，我已经证明了下面的不等式，即

$$P(n)>p^*(n). \tag{1}$$

正由于这一点成绩，湖北省政府邀请我参加了于 1978 年召开的省科学大会，后来又到了武汉大学作了一次报告. 我要感激省委及武汉大学的领导和教授们对我的鼓励.

后来，因为种种原因，我的研究只好暂时停顿下来.

现今，电脑越来越日新月异. 在电脑上检验我的公式是完全正确的. 促使我重新检查我的推证也是完全正确的. 随着学识及见识的提高，我更加系统地完善和推进了我的证明. 我把(1)的证明整理成 30 个引理及两个重要的定理. 公式(1)是我以后所证明的一系列定理的基石. 以后的定理更加深刻地披露了哥德巴赫问题的玄妙之处.

2008 年，我发现了第二个公式：

$$P(n)\gtrsim\varepsilon p^*(n). \tag{2}$$

在此用符号“$\gtrsim$”表示略大于，其中，$\varepsilon=\prod\frac{p-1}{p-2}$，$p$ 是 n 的不超过 $\sqrt{n}$ 的奇素数因子，若无这种因子，就定义 $\varepsilon=1$. 在 n 较大时，公式(2)是成立的. 后来进一步推广：在 n 较大时，

$$P(n)\gtrsim\varepsilon p^*(n)+b. \tag{3}$$

其中，b 是以 $\sqrt{n}$ 内的奇素数 P，适合 $p+q=n$ 的 p 的个数，也即 $b=\sum f(p,q)=\sum 1(p,q,\text{ 表奇素数},p+q=n,p\leq q,p\leq\sqrt{n})$.

随着研究的深入，我进一步发现：

定理　设 $\pi_{奇}(n)=\frac{n}{X(n)}$（这个等号实际上是近似号），简写成 $X(n)=X$，即 $\pi_{奇}(n)=\frac{n}{X}$.

则

$$P(n)\gtrsim\varepsilon 0.66\frac{n}{X^2}(1-\frac{1}{X}). \tag{4}$$

上式成立的充分必要条件为 $nX'=1$，X' 为 $X(n)$ 对 n 的一阶导数. 注意，$\pi(n)\sim\frac{n}{X(n)}$ 表不超过 n 的素数

个数.

华罗庚曾经说过:“寻求素数定理的初等证明,乃素数论中历时很久的难题之一”. 德国数学家 Gauss 猜想 $\pi(n)\sim\frac{n}{\log n}$,法国数学家 Legendre 猜想 $\pi(n)\sim\frac{n}{\log n-1.08366}$. $\pi_{奇}(n)=\pi(n)-1$,故可看成 $\pi_{奇}(n)\sim\pi(n)$.

若令 $X(n)=\log n, X_1(n)=\log n-1, X_2(n)=\log n-\left(1+\frac{1}{\log n-2}\right)$,则可以相应地得到:

$$P(n)\gtrsim\varepsilon p^*(n)=0.66\varepsilon\frac{n}{X^2}\left(1-\frac{1}{X}\right),$$

$$P(n)\gtrsim\varepsilon p_1^*(n)=0.66\varepsilon\frac{n}{X_1^2}\left(1-\frac{1}{X_1}\right),$$

$$P(n)\gtrsim\varepsilon p_2^*(n)=0.66\varepsilon\frac{n}{X_2^2}\left(1-\frac{1}{X_2}\right).$$

所以,由上述定理推出:

$\frac{n}{X(n)}$越是逼近 $\pi(n)$,则 $\varepsilon p^*(n)$ 越是接近$P(n)$;相反的,$\varepsilon p^*(n)$ 越是接近 $P(n)$,则$\frac{n}{X(n)}$越是接近 $\pi(n)$.

我们还发现第 5 个重要公式:

令 $\beta=\frac{\varepsilon 0.66n}{X_2^2}$与 $P(n)$的相对误差为 ζ,则随着 n 的增大 ζ 趋于零. 也即:

1.
$$\zeta=\left|\frac{\beta}{P(n)}-1\right|\to 0. \tag{5}$$

2. $\beta-P(n)$有时取正,有时取负,有时几乎等于 0. 亦即 $\beta=P(n)$(在选定正整数 k,$\zeta<\frac{1}{10^k}$的意义下),但绝对不可能从某个充分大的 n 开始或单纯只出现$\beta\geq P(n)$或单纯只出现$\beta\leq P(n)$.

因此,在上述意义下,我们说β 是 $P(n)$的最佳近似函数. 0.66ε 是不可替代的系数.

3. 当 $n\geq 10^{10}$ 时,可以根据第二章引理 14,取 $P(n)\geq\varepsilon p_3^*(n)=0.66\varepsilon\frac{n}{X_3^2}\left(1-\frac{1}{X_3}\right)$, $X_3=\log n-\left(1+\frac{1}{\log n-2}+\frac{1}{(\log n-2)^3}\right)$. 所得的结果会更接近 $P(n)$. 相应地需要更高精确度的计算机来验证.

目前,我们可查一下偶数分解素数和的对数的逼近值表 1.1 及表 1.2. 从中可以看出:

1. 当偶数 $n\geq 4$ 时,则 $P(n)>p^*(n)$,注意行 5;除 $n=28,32,68,152$ 以外,其余 $n\geq 4$ 的偶数均有 $P(n)>p^*(n)+b$,注意行 6;

2. 当 $n\neq 12,30$ 时,偶数 n 恒有 $P(n)>\varepsilon p^*(n)$,注意行 7;

3. 除 $n=12,28,30,32,50,56,68,152$ 以外,其他 $n\geq 4$ 以上的偶数 n 均有 $P(n)>\varepsilon p_i^*(n)+b$,注意行 8;

4. 在 n 较大时(比如说 $n>2000$),$P(n)$与 $\varepsilon p_i^*(n)+b$ 很近似(或者说很接近),注意最后一行,即第 16 行.

表 2.1 及 2.2,β 对于 $P(n)$相对精确度比较表.

$\beta=\frac{\varepsilon 0.66n}{X^2}$，　$X=\log n-\left(1+\frac{1}{\log n-2}\right)$，　$\zeta=\left|\frac{\beta}{P(n)}-1\right|$，在表中可以看出：

1. $\frac{\beta}{P(n)}$常常略小于 1 或略大于 1，说明 β 或略小于，或略大于，或等于 $P(n)$. 第 1 种情况出现较少，第 2 种情况较多，第 3 种情况总是有，但很少. 遇见如 $p(800052)=8236$，$\beta=8237.9455$；$p(810044)=3429$，$\beta=3427.7013$. β 与 $P(n)$ 几乎相等. 读者可自行验证.

下面略举几例列表比照.

n	7000068	7000092	7000214	7000582	7000704	7000844
$P(n)$	42824	47614	23464	21678	44014	22025
β	42825.825	47614.035	23463.336	21678.497	44012.062	22026.816

2. 从表 2.2 中可以看出，不同段落的相对精确度的平均值是随着 n 值变大而慢慢变小，比如说 10^4 起的一段，精确度平均值 $\overline{\zeta_1}=0.03835149$；$10^5$ 起的一段，精确度平均值 $\overline{\zeta_2}=0.01618137$；$10^6$ 起的一段，精确度平均值 $\overline{\zeta_3}=0.006889$；$10^7$ 起的一段，精确度平均值 $\overline{\zeta_4}=0.003047216$.

发现 $\frac{\overline{\zeta_1}}{\overline{\zeta_2}},\frac{\overline{\zeta_2}}{\overline{\zeta_3}},\frac{\overline{\zeta_3}}{\overline{\zeta_4}}$ 的值均大于 2，说明 β 在 $P(n)$ 的上下摆动，并且越来越接近于 $P(n)$，有时几乎等于 $P(n)$.

我们在正文中已经证明了，在 n 较大时，$P(n)\gtrsim\varepsilon p^*(n)=\beta\left(1-\frac{1}{X}\right)$，显然 $\beta\gtrsim\beta\left(1-\frac{1}{X}\right)$. 这就得到 $P(n)$ 和 β 都是大于 $\beta\left(1-\frac{1}{X}\right)$. 从而推得 $P(n)\sim\beta$（包括 $P(n)$ 大于、小于、等于 β 三种情况）.

从而得出：不等式存在充分大的正数 N_1，当 $n>N_1$ 时，有

$$\beta\left(1-\frac{1}{X}\right)<P(n)<\beta\left(1+\frac{1}{X}\right). \tag{6}$$

甚至更精密一点：存在充分大的正数 N_2，当 $n>N_2$ 时，有

$$\beta\left(1-\frac{1}{10X}\right)<P(n)<\left(1+\frac{1}{10X}\right). \tag{7}$$

还有更精密的一些不等式，举例明之.

因 $X=\log n-\left(1+\frac{1}{\log n-2}\right)$（注意，在我们所讨论的范围内，它是上升函数），所以，当 $n=10^4$ 时，$X=8.0716507$，$\zeta<\frac{1}{X}=0.1238904$；当 $n=10^5$ 时，$X=10.407805$，$\zeta<0.0960817$；当 $n=10^6$ 时，$X=12.730876$，$\zeta<0.0785491$；当 $n=10^7$ 时，$X=15.047265$，$\zeta<0.0664572$；当 $n=10^8$ 时，$X=17.359782$，$\zeta<0.0576044$.

表 2.2 所算得的一些数值是符合不等式(6)的.

关于不等式(6)，可以取 $N_1=10^4$. 可当 $n=10^4$ 时，$\frac{1}{10X}=0.01238904$，$\zeta=0.063541>\frac{1}{10X}$，则不符合不等式(7). 若我们选取 $N_2=10^7$，发现 $n>N_2$，则符合不等式(7). 在第四章中将有详细的证明.

在第六章中，我证明了一个非常深刻的定理 43. 比如，令 $\alpha = 10^t$，则存在充分大的 N（可以选 $N = e^{2\cdot 10^t+2}$，e 是自然对数的底 $e = 2.71828182845904\cdots\cdots$），当 $n > N$ 时，有：

$$\beta\left(1-\frac{1}{10^t X}\right) < P(n) < \beta\left(1+\frac{1}{10^t X}\right). \tag{8}$$

这是一个远比(6)、(7)更深刻的结果. 至此，可以说哥德巴赫问题比较完美地解决了.

数学家华罗庚在其所著《数论导引》第 87 至 90 页中提到 8 个问题：①素数分布问题；②$ax+b$ 型素数问题；③哥德巴赫问题；④孪生素数问题；⑤n^2-n+p 型素数问题；⑥n^2+1 型素数问题；⑦求相邻素数差，即 $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}}(P_n - P_{n-1})$ 之无穷大之阶问题，也即 $\Delta P = P_n - P_{n-1}$ 的上限问题；⑧n^2 与 $(n+1)^2$ 之间存在素数问题，并特别提到“在数论之研究中能建议之推测，常较能解决者多”任便提及一个，p，$p+2$，$p+6$ 皆为素数的三生素数问题. 更一般地多生素数问题.

直到我写这本书完成之际，奇怪的事发生了。我已找到了解决以上 8 个问题的方法。但由于时间问题，暂不能放入本书中，只好等待再版时增加数章或另写一书以详细阐述之.

本书中的公式常出现的三个数 $X = \log n - \left(1+\frac{1}{\log n - 2}\right)$，0.66 和 ε 是全书的灵魂，是来之不易的. 在解决很多堆垒素数论中的著名问题，常要用到它. 但你无法想像的是， 这是我经几十年千思万虑，再加上电子计算机的无穷检验才发现它，这是一个十分艰辛的历程.

第二章　关于素数分布及其和差问题

我是在1957年大学毕业前开始对哥氏问题发生兴趣的，但研究六七年之久无丝毫进展，到1962年才在本年的《数学通报》第2期上发表了文[1]，1986年才发表了文[2].

本章给出的主要结果是证明充分大的偶数 N，表成两个素数和的对数，有公式

$$P(N)>0.66\left(\frac{N}{\log^2 N}-\frac{N}{\log^3 N}\right). \tag{1}^*$$

在此过程中还证明了一系列素数分布公式，用 $\pi(x)$ 表不超过 x 的素数个数公式，当 $i>j$ 时，表 $\pi_i(x)$ 比 $\pi_j(x)$ 更近似于精确的 $\pi(x)$. 其中主要的有：(在此用符号"$\gtrsim$"表示略大于)对于任意给定的正数 c，总存在着充分大的 N，N 依赖于 c.

当 $n>N$ 时，有

$$\pi(n)\gtrsim\pi_1(n)=\frac{n}{\log n}+c, \tag{2_1}$$

$$\pi(n)\gtrsim\pi_2(n)=\frac{n}{\log n-1}+c, \tag{2_2}$$

$$\pi(n)\gtrsim\pi_3(n)=\frac{n}{\log n-\left(1+\frac{1}{\log n-2}\right)}+c. \tag{2_3}$$

更一般地，对任意给定的正数 c 和非负整数 t，恒存在 $N(c,t)$ ($N(c,t)$ 表 N 依赖于 c,t)，

当 $n>N$ 时，

$$\pi(n)\gtrsim\frac{n}{\log n-\left(1+\sum_{i=0}^{t}\frac{k_i}{(\log n-2)^{2i+1}}\right)}+c, \tag{2}$$

其中，$k_0=1$，$k_{i+1}=\frac{4i+2}{i+2}k_i$，$i=0,1,2,\cdots,t$.

这个公式可以说是现今表示 $\pi(n)$ 的较精确的公式，比如较1962年 *J. B. Rosser* 和 *L. Schoenfeld* 证明的 $\frac{n}{\log n-\frac{1}{2}}<\pi(n)<\frac{n}{\log n-\frac{3}{2}}$ 更为精确.

特别地，有前面的[$2i$]，$i=1,2,3,\cdots$，所得结果比 Legendre 猜想 $\pi(x)$ 渐近等于 $\frac{x}{\log x-1.08366}$，[3] 以及 *Чебышев* 所证明的 $a\leq\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}}\leq 1\leq\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}}\leq\frac{b}{5}a$(此处 $a=0.92129$均有所前进. 近百年来有不少数学家致力于改进著名的"素数定理" $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}}=1$.（本章的原文曾于1985年送请数学家王元院士审阅，他说希望能发表出来。随后，其中9个引理已发表在数学通报上）

如 L. Locher – Ernst, J. Hadmard, Poussin, J. B. Rosser 等人的结果分别给出了各种不同的改进，我在此恰恰给出了比这些结果在某种意义上要好一点的结果. 类似地孪生素数也得到一些结果.

当 n 充分大时，
$$V(d,n)>1.32\left(\frac{n}{\log^2 n}-\frac{n}{\log^3 n}\right), \tag{3}$$

$V(d,n)$ 表 $p,p+d(p\leq n,d\leq n)$ 同为素数 p 的个数，在此 d 为偶数.（实际 $V(d|n)\gtrsim\varepsilon 1.32\left(\frac{n}{\log^2 n}-\frac{n}{\log^3 n}\right)$，$\varepsilon=\prod\frac{p-1}{p-2}$，$p$ 是 d 的奇素因子. 留到以后阐述）

现将我对这个问题的研究所得的一些结果与大家共同分享.

全部证明分 4 个定理，30 个引理（包括类似的另 30 个引理）.

设 n 表一偶数，$P(n)$ 表示把 n 分成为两个小于 n 的素数的和的对数，如 $p(68)=2$，我们有：

定理 1 设 n 表一偶数，令 $q_1,q_2,\cdots,q_t$ 为整除 n 且又不超过$\sqrt{n}$的全部素数，而令 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 是不超过$\sqrt{n}$但不能整除 n 的全部素数，即设 $n\equiv 0(\bmod q_i)\ i=1,2,\cdots,t;n\equiv a_i(\bmod p_i)\ i=1,2,\cdots,k$，其中 $0<a_i<p_i$，则有 $P(n)=\frac{1}{2}\left\{n\prod_{i=1}^{t}\left(1-\frac{1}{q_i}\right)\prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{2}{p_j}\right)\right\}*+R(n)$，其中 $R(n)=P_0(n)+P_1(n)+P_2(n)$，$P_0(n)$ 表示 $n-q_i$ 与 $n-p_i$ 中素数的个数. $P_1(n),P_2(n)$ 按下式定义：

$$P_1(n)=\begin{cases}0,\text{当 } n-1 \text{ 为非素数}\\ -1,\text{当 } n-1 \text{ 为素数}\end{cases},\qquad P_2(n)=\begin{cases}0,\text{当}\frac{n}{2}\text{为非素数}\\ \frac{1}{2},\text{当}\frac{n}{2}\text{为素数}\end{cases}.$$

星号 * 下面大括号内的式子表示在展开后每一项也带上星号 *. 这些带 * 号的项又是按下式定义：

$$\frac{2^m n*}{q_{i_1}q_{i_2}\cdots q_{i_s}p_{j_1}\cdots p_{j_m}}=\sum_{u_f=1}^{2}\left[\frac{n-a_{q_{i_1}q_{i_2}\cdots q_{i_s}p_{j_1}u_1p_{j_2}u_2\cdots p_{j_m}u_m}}{q_{i_1}q_{i_2}\cdots q_{i_s}p_{j_1}p_{j_2}\cdots p_{j_m}}\right],$$

其中，$a_{q_{i_1}q_{i_2}\cdots q_{i_s}p_{j_1}u_1p_{j_2}u_2\cdots p_{j_m}u_m}\equiv\begin{cases}0(\bmod q_w),\\ a_{j_f u_f}(\bmod p_{j_f}),\end{cases}\quad a_{j_f u_f}=\begin{cases}0 & \text{当 } u_f=1,\\ a_{j_f} & \text{当 } u_f=2,\end{cases}\quad 0\leq a_{q_{i_1}q_{i_2}\cdots q_{i_s}p_{j_1}p_{j_2}\cdots p_{j_m}}<q_{i_1}q_{i_2}\cdots q_{i_s}p_{j_1}p_{j_2}\cdots p_{j_m}$

因此，对每一项$\frac{2^m n*}{q_{i_1}q_{i_2}\cdots q_{i_s}p_{j_1}p_{j_2}\cdots p_{j_m}}$代表 2^m 项的和.

证明 设 $n=m_1+m_2$，则 m_1 是 q_i 或 p_j 的倍数的数偶 m_1、m_2 应除去，同时，$n-m_1$ 是 q_i 或 p_j 的倍数的数偶 m_1、m_2 也应除去.

因 $n=ap_i+a_i(0<a_i<p_i)$，故 $n-m_1=ap_i+a_i-m_1$，推得 a_i-m_1 是 p_i 的倍数的数偶 m_1、m_2 也应除去. 即对于 $m_1-a_i=cp_i$ 的 m_1 也应当除去. $c=1,2,\cdots,\left[\frac{n-a_i}{p_i}\right]$，故应除去$\left[\frac{n-a_i}{p_i}\right]$个数，故在 $P(n)$ 的展开式中有一$\left[\frac{n-a_i}{p_i}\right]$项，同理有一$\left[\frac{n}{q_i}\right]$. 若 m_1 既被 q_i 整除又被 q_j 整除，则前面把 m_1 除去 2 次，故又应补上一次，因此在 $P(n)$ 的展开式中应有$\left[\frac{n}{q_iq_j}\right]$项，同理应有$\left[\frac{n-a_{q_ip_j}}{q_ip_j}\right],\left[\frac{n-a_{p_ip_j}}{p_ip_j}\right]$ 各项. 若 m_1 被 3 个不同素数整除，则因先除去 C_3^1 次，又补上 C_3^2 次，还应除去 C_3^3 次，所以又有 $-\left[\frac{n}{q_iq_jp_r}\right],-\left[\frac{n-a_{q_iq_jp_r}}{q_iq_jp_r}\right],-\left[\frac{n-a_{q_ip_jp_r}}{q_ip_jp_r}\right],-\left[\frac{n-a_{p_ip_jp_r}}{p_ip_jp_r}\right]$等项.

一般地，因 $-C_k^1+C_k^2-C_k^3+\cdots+(-1)^rC_k^r+\cdots+(-1)^kC_k^k=(1-1)^k-1=-1$，故在 $P(n)$ 的展开式中

应有$(-1)^{\lambda}\left[\frac{n-a_{q_{i_1}q_{i_2}\cdots q_{i_s}p_{j_1}p_{j_2}\cdots p_{j_m}}}{q_{i_1}q_{i_2}\cdots q_{i_s}p_{j_1}p_{j_2}\cdots p_{j_m}}\right]$各项，$\lambda$ 表示分母中含素因子的个数. 又因 $n=p_1+p_2$ 和 $n=p_2+p_1$ 是属于同一对素数，所以应在上述各项的总数中除以 2，但当 n 正好是一素数的 2 倍时，在除以 2 以后就会变成半个数偶，故应加上 $p_2(n)$，因 1 不是素数也不是 p_1 的倍数，所以它没有除去，故又需加上 $p_1(n)$，另外很明显地要加上除去了的素数对的个数 $p_0(n)$. 这就证明了定理 1.

例 1　计算 $P(48)$.

因 $48=2^4\cdot 3$，故 $q_1=2,q_2=3,p_1=5$，而 2、3、5 是不超过 $\sqrt{48}$ 的全部素数.

$$\text{又 } 48\equiv\begin{cases}0\ (\mathrm{mod}\ 2) & 48-1=47 \text{ 是素数，故 } p_1(48)=-1.\\ 0\ (\mathrm{mod}\ 3) & 48-\begin{cases}2\\3=\begin{cases}46\\45 \text{ 只有一个素数，}\therefore p_0(48)=1.\\43\end{cases}\\5\end{cases}\\ 3\ (\mathrm{mod}\ 5) & \text{又}\frac{48}{2}=24 \text{ 非素数，故 } p_2(48)=0.\end{cases}$$

因 $p(48)=\frac{1}{2}(48-A_1+A_2-A_3)+p_0(48)+p_1(48)+p_2(48)=$

$\frac{1}{2}[48-(24+16+9+9)+(8+4+4+3+3)-(1+1)]+1-1+0=5.$

实际上，$48=5+43=7+41=11+37=17+31=19+29$，其中：$A_1=\left[\frac{48}{2}\right]+\left[\frac{48}{3}\right]+\left[\frac{48}{5}\right]+\left[\frac{48-3}{5}\right]$，

$A_2=\left[\frac{48}{2\cdot 3}\right]+\left[\frac{48}{2\cdot 5}\right]+\left[\frac{48-8}{2\cdot 5}\right]+\left[\frac{48}{3\cdot 5}\right]+\left[\frac{48-3}{3\cdot 5}\right]$，$A_3=\left[\frac{48}{2\cdot 3\cdot 5}\right]+\left[\frac{48-18}{2\cdot 3\cdot 5}\right]$.

例 2　计算 $P(50)$.

因 $50=2\cdot 5^2$，　故 $q_1=2,q_2=5,p_1=3,p_2=7$ 是 $\sqrt{50}$ 以内的全部素数.

$$50\equiv\begin{cases}0\ (\mathrm{mod}2) & 50-3=47 \text{ 是素数，}50-7=43 \text{ 是素数，故 } p_0(50)=2;\\ 2\ (\mathrm{mod}\ 3) & 50-1=49 \text{ 非素数 } p_1(50)=0;\\ 0\ (\mathrm{mod}5) & \\ 1\ (\mathrm{mod}\ 7) & \frac{50}{2}=25 \text{ 非素数，故 } p_2(50)=0.\end{cases}$$

因 $p(50)=\frac{1}{2}(50-A_1+A_2-A_3+A_4)+p_0(50)+p_1(50)+p_2(50)=\frac{1}{2}(50-81+41-4-2)+2=4.$

因 $p(50)=4$，实际上，$50=3+47=7+43=13+37=19+31$ 共 4 种.

其中：$A_1=\left[\frac{50}{2}\right]+\left[\frac{50}{3}\right]+\left[\frac{50-2}{3}\right]+\left[\frac{50}{5}\right]+\left[\frac{50}{7}\right]+\left[\frac{50-1}{7}\right]=25+16+16+10+7+7=81;$

$$A_2=\left[\frac{50}{2\cdot 3}\right]+\left[\frac{50-2}{2\cdot 3}\right]+\left[\frac{50}{2\cdot 5}\right]+\left[\frac{50}{2\cdot 7}\right]+\left[\frac{50-8}{2\cdot 7}\right]+\left[\frac{50}{3\cdot 5}\right]+\left[\frac{50-5}{3\cdot 5}\right]+\left[\frac{50}{3\cdot 7}\right]+\left[\frac{50-8}{3\cdot 7}\right]+$$

$$\left[\frac{50-14}{3\cdot 7}\right]+\left[\frac{50-15}{3\cdot 7}\right]+\left[\frac{50}{5\cdot 7}\right]+\left[\frac{50-15}{5\cdot 7}\right]=8+8+5+3+3+3+3+2+2+1+1+1+1=41;$$

$$\begin{cases}8\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 3)\\8\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 7)\end{cases},\quad\begin{cases}14\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 3)\\14\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 7)\end{cases},\quad\begin{cases}15\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3)\\15\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 7)\end{cases}.$$

$$A_3=\left[\frac{50}{2\cdot 3\cdot 5}\right]+\left[\frac{50-20}{2\cdot 3\cdot 5}\right]+\left[\frac{50}{2\cdot 3\cdot 7}\right]+\left[\frac{50-36}{2\cdot 3\cdot 7}\right]+\left[\frac{50-14}{2\cdot 3\cdot 7}\right]+\left[\frac{50-8}{2\cdot 3\cdot 7}\right]+\left[\frac{50}{2\cdot 5\cdot 7}\right]+$$

$\left[\frac{50-50}{2\cdot5\cdot7}\right]+\left[\frac{50}{3\cdot5\cdot7}\right]+\left[\frac{50-15}{3\cdot5\cdot7}\right]+\left[\frac{50-35}{3\cdot5\cdot7}\right]+\left[\frac{50-50}{3\cdot5\cdot7}\right]$;

$\begin{cases}20\equiv0\ (\mathrm{mod}\ 2)\\20\equiv2\ (\mathrm{mod}\ 3),\\20\equiv0\ (\mathrm{mod}\ 5)\end{cases}\quad\begin{cases}36\equiv0\ (\mathrm{mod}\ 2)\\36\equiv0\ (\mathrm{mod}\ 3),\\36\equiv1\ (\mathrm{mod}\ 7)\end{cases}\quad\begin{cases}14\equiv0\ (\mathrm{mod}\ 2)\\14\equiv2\ (\mathrm{mod}\ 3),\\14\equiv0\ (\mathrm{mod}\ 7)\end{cases}\quad\begin{cases}8\equiv0\ (\mathrm{mod}\ 2)\\8\equiv2\ (\mathrm{mod}\ 3),\\8\equiv1\ (\mathrm{mod}\ 7)\end{cases}$

$\begin{cases}50\equiv0\ (\mathrm{mod}\ 2)\\50\equiv0\ (\mathrm{mod}\ 5),\\50\equiv1\ (\mathrm{mod}\ 7)\end{cases}\quad\begin{cases}15\equiv0\ (\mathrm{mod}\ 3)\\15\equiv0\ (\mathrm{mod}\ 5),\\15\equiv1\ (\mathrm{mod}\ 7)\end{cases}\quad\begin{cases}35\equiv2\ (\mathrm{mod}\ 3)\\35\equiv0\ (\mathrm{mod}\ 5),\\35\equiv0\ (\mathrm{mod}\ 7)\end{cases}\quad\begin{cases}50\equiv2\ (\mathrm{mod}\ 3)\\50\equiv0\ (\mathrm{mod}\ 5),\\50\equiv1\ (\mathrm{mod}\ 7)\end{cases}$

$=1+1+1+0+0+1+0+0+0+0+0+0=4$.

$A_4=\left[\frac{50}{2\cdot3\cdot5\cdot7}\right]+\left[\frac{50-120}{2\cdot3\cdot5\cdot7}\right]+\left[\frac{50-140}{2\cdot3\cdot5\cdot7}\right]+\left[\frac{50-50}{2\cdot3\cdot5\cdot7}\right]=0-1-1+0=-2$.

$120\equiv\begin{cases}0\ (\mathrm{mod}\ 2)\\0\ (\mathrm{mod}\ 3)\\0\ (\mathrm{mod}\ 5)\\1\ (\mathrm{mod}\ 7)\end{cases},\quad 140\equiv\begin{cases}0\ (\mathrm{mod}\ 2)\\2\ (\mathrm{mod}\ 3)\\0\ (\mathrm{mod}\ 5)\\0\ (\mathrm{mod}\ 7)\end{cases},\quad 50\equiv\begin{cases}0\ (\mathrm{mod}\ 2)\\2\ (\mathrm{mod}\ 3)\\0\ (\mathrm{mod}\ 5)\\1\ (\mathrm{mod}\ 7)\end{cases}.$

例3　计算 $p(68)$.

$68\equiv\begin{cases}0\ (\mathrm{mod}\ 2)\\2\ (\mathrm{mod}\ 3)\\3\ (\mathrm{mod}\ 5)\\5\ (\mathrm{mod}\ 7)\end{cases}.$

因 $68=2^2\cdot17$，$\sqrt{68}$ 以内的素数 2、3、5、7，　$q_1=2,p_1=3,p_2=5,p_3=7$,

$p(68)=\frac{n}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{2}{5}\right)\left(1-\frac{2}{7}\right)\right]^*+R(n)=$

$\frac{68}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}\right)+\left(\frac{2}{2\cdot3}+\frac{2}{2\cdot5}+\frac{2}{2\cdot7}+\frac{4}{3\cdot5}+\frac{4}{3\cdot7}+\frac{4}{5\cdot7}\right)-\right.$

$\left.\left(\frac{4}{2\cdot3\cdot5}+\frac{4}{2\cdot3\cdot7}+\frac{4}{2\cdot5\cdot7}+\frac{8}{2\cdot3\cdot5\cdot7}\right)+\frac{8}{2\cdot3\cdot5\cdot7}\right]^*+R(68)=$

$\frac{1}{2}(A_1-A_2+A_3)+R(n)$,

其中：$A_1=\left[\frac{68}{2}\right]+\left[\frac{68}{3}\right]+\left[\frac{68-2}{3}\right]+\left[\frac{68}{5}\right]+\left[\frac{68-8}{5}\right]+\left[\frac{68}{7}\right]+\left[\frac{68-12}{7}\right]$;

$A_2=\left[\frac{68}{2\cdot3}\right]+\left[\frac{68-2}{2\cdot3}\right]+\left[\frac{68}{2\cdot5}\right]+\left[\frac{68-8}{2.5}\right]+\left[\frac{50}{2\cdot7}\right]+\left[\frac{68-12}{2\cdot7}\right]+\left[\frac{68}{3\cdot5}\right]+\left[\frac{68-18}{3\cdot5}\right]+\left[\frac{68-5}{3\cdot5}\right]+$

$\left[\frac{68}{3\cdot7}\right]+\left[\frac{68-14}{3\cdot7}\right]+\left[\frac{68-12}{3\cdot7}\right]+\left[\frac{68-26}{3\cdot7}\right]+\left[\frac{68}{5\cdot7}\right]+\left[\frac{68-28}{5\cdot7}\right]+\left[\frac{68-5}{5\cdot7}\right]+\left[\frac{68-33}{5\cdot7}\right]$;

$A_3=\left[\frac{68}{2\cdot3\cdot5}\right]+\left[\frac{68-20}{2\cdot3\cdot5}\right]+\left[\frac{68-18}{2\cdot3\cdot5}\right]+\left[\frac{68-8}{2\cdot3\cdot5}\right]+\left[\frac{68}{2\cdot3\cdot7}\right]+\left[\frac{68-14}{2\cdot3\cdot7}\right]+\left[\frac{68-12}{2\cdot3\cdot7}\right]+$

$\left[\frac{68-12}{2\cdot3\cdot7}\right]+\left[\frac{68-26}{2\cdot3\cdot7}\right]+\left[\frac{68}{2\cdot5\cdot7}\right]+\left[\frac{68-68}{2\cdot5\cdot7}\right]+\left[\frac{68-40}{2\cdot5\cdot7}\right]+\left[\frac{68-28}{2\cdot5\cdot7}\right]+\left[\frac{68}{3\cdot5\cdot7}\right]+\left[\frac{68-75}{3\cdot5\cdot7}\right]+$

$\left[\frac{68-63}{3\cdot5\cdot7}\right]+\left[\frac{68-35}{3\cdot5\cdot7}\right]+\left[\frac{68-98}{3\cdot5\cdot7}\right]+\left[\frac{68-5}{3\cdot5\cdot7}\right]+\left[\frac{68-33}{3\cdot5\cdot7}\right]+\left[\frac{68-68}{3\cdot5\cdot7}\right]$;

$$A_4 = \left[\frac{68}{2\cdot3\cdot5\cdot7}\right] + \left[\frac{68-140}{2\cdot3\cdot5\cdot7}\right] + \left[\frac{68-168}{2\cdot3\cdot5\cdot7}\right] + \left[\frac{68-180}{2\cdot3\cdot5\cdot7}\right] + \left[\frac{68-98}{2\cdot3\cdot5\cdot7}\right] + \left[\frac{68-110}{2\cdot3\cdot5\cdot7}\right] + \left[\frac{68-138}{2\cdot3\cdot5\cdot7}\right] + \left[\frac{68-68}{2\cdot3\cdot5\cdot7}\right].$$

如 A_3 中的第 10、11、12 项来自下面同余式组的计算而决定其分子取 68 − 68、68 − 40、68 − 28，$[a]$ 表不超过 a 的最大整数.

$$68 \equiv \begin{cases} 0 \pmod 2 \\ 3 \pmod 5 \\ 5 \pmod 7 \end{cases}, \quad 40 \equiv \begin{cases} 0 \pmod 2 \\ 0 \pmod 5 \\ 5 \pmod 7 \end{cases}, \quad 28 \equiv \begin{cases} 0 \pmod 2 \\ 3 \pmod 5 \\ 0 \pmod 7 \end{cases};$$

$A_1 = 34 + 22 + 22 + 13 + 12 + 9 + 8 = 120;$

$A_2 = 11 + 11 + 6 + 6 + 4 + 4 + 4 + 4 + 3 + 4 + 3 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 70;$

$A_3 = 2 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 - 1 + 0 + 0 - 1 + 0 + 0 + 0 = 8;$

$A_4 = 0 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 + 0 = -6;$

$R(68) = p_0(68) + p_1(68) + p_2(68) = 1 - 1 + 0 = 0;$

$$P(68) = \frac{1}{2}(68 - A_1 + A_2 - A_3 + A_4) + R(68) = \frac{1}{2}(68 - 120 + 70 - 8 - 6) = 2.$$

实际上 $68 = 7 + 61 = 31 + 37.$

为了让广大读者得到练习的机会，特通过上面三个例子把计算过程详细地记录下来，以便检查核对.

定理 1 的计算虽然较繁琐，但找到了 $P(n)$ 的一个精确公式，理论上是有价值的，同时利用电脑计算也很方便. 下面的定理 2 则给出了 $P(n)$ 的较好的下界公式且运算起来很简便.

定理 2　用 $P(n)$ 表偶数 n 分解成两个素数和的个数，则在 n 充分大时，有以下两个近似的估值公式：

$$P(n) > (0.66 - \varepsilon_k)a^2 \frac{2p_k}{2p_k + 3} \frac{an - \log n}{an - 2\log n} \left(\frac{n}{\log^2 n} - \frac{n}{\log^3 n}\right), \tag{A}$$

$$P(n) > 0.66\left(\frac{n}{\log^2 n} - \frac{n}{\log^3 n}\right), \tag{B}$$

其中 p_k 适合条件 $2p_1p_2\cdots p_k \le n \le 2p_1p_2\cdots p_{k+1}$，$p_1, p_2, \cdots, p_k, p_{k+1}$ 是从 3 开始的几个素数.

$\dfrac{\pi(n)}{\dfrac{n}{\log n}} = a$，$\log n$ 表示 n 的自然对数，$\pi(n)$ 表示不超过 n 的素数的个数. ε_k 是适合下面不等式的正量：$0 < \varepsilon_k < \sum_{i=k}^{\infty} \dfrac{1}{(p_i - 1)p_i}$. 在 n 充分大时，因 $(0.66 - \varepsilon_k)a^2 \dfrac{2p_k}{2p_k + 3} \dfrac{an - \log n}{an - 2\log n}$ 趋于 0.66，所以 (B) 式可作为 $P(n)$ 的较简洁的下界公式而代替 (A).

先证下列引理.

引理 1　令 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 为互不相同的奇素数，将偶数 n_a 表示成 $n_a = 2(\prod_{i=1}^{k} p_i)s + a$，$s$ 与 a 为整数，且 $0 \le a < 2\prod_{i=1}^{k} p_i$.

又令 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 中能整除 a 的全部素数为 $p_{i_1}, p_{i_2}, \cdots, p_{i_t}$，$p_1, \cdots, p_K$ 中不能整除 a 的全部素数为 $p_{j_1}, p_{j_2}, \cdots, p_{j_{t'}} (t + t' = k)$.

再设 $n_a = (2(\prod_{i=1}^{k} p_i)s_1 + a_1) + (2(\prod_{i=1}^{k} p_i)s_2 + a_2)$，其中 a_1, a_2 为满足下列条件的二整数，$a_1 + a_2 \equiv a \pmod{2\prod_{i=1}^{k} p_i}$，$0 \le a_1 < 2\prod_{i=1}^{k} p_i$，$0 \le a_2 < 2\prod_{i=1}^{k} p_i$，$(a, 2\prod_{i=1}^{k} p_i) = (a_2, 2\prod_{i=1}^{k} p_i) = 1.$

在上述条件下，n_a 有很多表示法，但对于同一组 a_1,a_2，我们规定属于同一种表示. 此时用符号 $\triangle_a$ 或 $\triangle p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_t}$ 表示全部 a_1 及 a_2 的种数(在此所说的种数是指对模 $2p_1p_2\cdots p_k$ 而言)，则有

$$\triangle_a=\prod_{e=1}^{t}(p_{ie}-1)\prod_{f=1}^{t'}(p_{jf}-2)，即：\triangle p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_t}=\prod_{e=1}^{t}(p_{ie}-1)\prod_{f=1}^{t'}(f_{jf}-2).$$

证明 由条件 $a_1+a_2\equiv a(\mathrm{mod}\ 2\prod_{i=1}^{k}p_i)$ 及 $(a_1,2\prod_{i=1}^{k}p_i)=(a_2,2\prod_{i=1}^{k}p_i)=1$，得

$$a_1\not\equiv\begin{cases}0\ (\mathrm{mod}2)\\0\ (\mathrm{mod}\ p_\lambda)(\lambda=1,2,\cdots,k)\\a\ (\mathrm{mod}\ p_{j\lambda})(\lambda=1,2,\cdots,t')\end{cases},$$

a_1 是下列同余式组的解：

$$a_1\equiv\begin{cases}1\ (\mathrm{mod}\ 2),\\a_{ie}(\mathrm{mod}\ p_{ie})(e=1,2,\cdots,t)\\a_{je'}(\mathrm{mod}\ p_{je'})(e'=1,2,\cdots,t'),\end{cases}\quad\text{其中 } a_{ie}=1,2,\cdots,p_{ie}-1;a_{je'}=1,2,\cdots,a_{je'}-1,a_{je'}+1,a_{je'}+2,\cdots,p_{je'}-1;a_{je'}\equiv a(\mathrm{mod}p_{je'}),0\le a_{je'}<p_{je'},e'=1,2,\cdots,t'.$$

上述同余式组可分写成 $\prod_{e=1}^{t}(p_{ie}-1)\prod_{f=1}^{t'}(p_{je'}-2)$ 个联立同余式组.

对于每一组，由孙子定理有唯一的解，$0<a_1<2p_1p_2\cdots p_k$，a_1 确定后，则适合 $a_2\equiv a-a_1(\mathrm{mod}2\prod_{i=1}^{k}p_i)$ 及 $0<a_2<2\prod_{i=1}^{k}p_i$ 之 a_2 也被确定，而且一定有 $(a_2,2\prod_{i=1}^{k}p_i)=1$.

于是，对每一 a_1,a_2 而言，$n_a=(2(\prod_{i=1}^{k}p_i)+a_1)+(2(\prod_{i=1}^{k}p_i)+a_2)$，共有 $\prod_{e=1}^{t}(p_{ie}-1)\prod_{f=1}^{t'}(p_{je'}-2)$ 种解，得引理 1.

引理 2 适合条件 $0\le a<2\prod_{i=1}^{k}p_i$ 且能被素数 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 中的 $p_{i_1},p_{i_2},\cdots,p_{i_t}$ 整除并不能被 $p_{j_1},p_{j_2},\cdots,p_{j_{t'}}$ 整除的偶数 a 的个数，并用符号 $\overline{\triangle}p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_t}$ 表示，则有：

$$1.\ \overline{\triangle}p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_t}=\prod_{e'=1}^{t'}(p_{ie'}-1);2.\ \overline{\triangle}p_1p_2\cdots p_k=1.$$

证明 1. 因 a 被 $p_{i\lambda}$ 整除，但不能被 $p_{j\lambda}$ 整除，故 a 应为下面联立同余式组的解：

$$\begin{cases}a\equiv0(\mathrm{mod}p_{je})\ e=1,2,\cdots,t\\a\equiv b_{je'}(\mathrm{mod}p_{je'})\ e=1,2,\cdots,t'\end{cases},$$

其中 $b_{je'}=1,2,\cdots,p_{je'}-1$，同余式组可写成 $\prod_{e'=1}^{t'}(p_{ie'}-1)$ 个同余式组，每一组有唯一的解，故 a 有 $\prod_{e'=1}^{t'}(p_{ie'}-1)$ 个值，即有 $\prod_{e'=1}^{t'}(p_{ie'}-1)$ 个不相同的且适合 $0\le a<2\prod_{i=1}^{k}p_i$ 的偶数 a.

2. 因在模 $2\prod_{i=1}^{k}p_i$ 的完全剩余系中只有唯一的偶数 0，被所有的 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 整除，故有 $\overline{\triangle}p_1p_2\cdots p_k=1$.

引理 2 证毕.

引理 3 在引理 1 及 2 中，对于素数 $p_1,p_2,\cdots,p_k$，有 $\overline{\triangle}_2+\sum_{1<d|p_1p_2\cdots p_k}\overline{\triangle}_d=p_1p_2\cdots p_k$，式中 $\overline{\triangle}_2$ 表示适合 $0\le a<2\prod_{i=1}^{k}p_i$ 且与 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 均互素的偶数 a 之个数.

证明

$$\overline{\triangle}_2+\sum_{1<d|p_1p_2\cdots p_k}\overline{\triangle}_d=(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_k-1)+(p_2-1)(p_3-1)\cdots(p_k-1)+(p_1-1)(p_3-1)\cdots(p_k-1)+\cdots+(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_{k-1}-1)+(p_3-1)(p_4-1)\cdots(p_k-1)+\cdots+(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_{k-2}-1)+\cdots+(p_1-1)+(p_2-1)+\cdots+(p_k-1)+1=[(p_1-1)+1][(p_2-1)+1]\cdots[(p_k-1)+1]=p_1p_2\cdots p_k.$$

引理 4　在引理 1 及引理 2 的条件下，对于素数 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 若用符号 $\triangle$ 表示 $\triangle = \dfrac{\triangle_2 \overline{\triangle_2} + \sum\limits_{1<d\mid p_1p_2\cdots p_k} \triangle_d \overline{\triangle_d}}{\overline{\triangle_2} + \sum\limits_{1<d\mid p_1p_2\cdots p_k} \overline{\triangle_d}}$（$\triangle_d$ 之含义参看引理 1 中 $\triangle_a = \triangle p_{i_1}\cdots p_{i_t}$ 的规定），则有：$\triangle = \dfrac{\prod\limits_{i=1}^{k}(p_i-1)^2}{\prod\limits_{i=1}^{k} p_i}$.

证明　$\triangle_2 \overline{\triangle_2} + \sum\limits_{1<d\mid p_1p_2\cdots p_k} \triangle_d \overline{\triangle_D} =$

$$\triangle_2 \overline{\triangle_2} + (\triangle_{p_1}\overline{\triangle_{p_1}} + \triangle_{p_2}\overline{\triangle_{p_2}}\cdots\triangle_{p_k}\overline{\triangle_{p_k}}) + (\triangle_{p_1p_2}\overline{\triangle_{p_1p_2}} + \cdots) + \triangle_{p_1p_2\cdots p_k}\overline{\triangle_{p_1p_2\cdots p_k}} =$$

$$\prod_{i=1}^{k}(p_i-1)\prod_{i=1}^{k}(p_i-2) + (p_1-1)\prod_{i=2}^{k}(p_i-2)\prod_{i=2}^{k}(p_i-1) + (p_2-1)\prod_{\substack{i=1\\ i\neq 2}}^{k}(p_i-2)\prod_{\substack{i=1\\ i\neq 2}}^{k}(p_i-1) + \cdots +$$

$$(p_1-1)(p_2-1)\prod_{i=3}^{k}(p_i-2)\prod_{i=3}^{k}(p^i-1) + \cdots + \prod_{i=1}^{k}(p_i-1) =$$

$$\prod_{i=1}^{k}(p_i-1)\prod_{i=1}^{k}[(p_i-2)+1] = \prod_{i=1}^{k}(p_i-1)^2.$$

再利用引理 3 得：$\triangle = \dfrac{\prod\limits_{i=1}^{k}(p_i-1)^2}{\prod\limits_{i=1}^{k} p_i}$.

引理 5　$\triangle_2 = \min\{\triangle_a\}$.

证明　在引理 1 的 $\triangle_a$ 中把 (p_i-1) 全部换成 (p_i-2) 即得，故以 $\triangle_2$ 为最小.

引理 6　$\triangle_{p_2p_2\cdots p_k} = \max\{\triangle_a\}$.

证明　在 $\triangle_a$ 中把 (p_j-2) 全部换成 (p_j-1) 即得 $\triangle_{p_1p_2\cdots p_k}$，故以 $\triangle_{p_1p_2\cdots p_k}$ 为最大.

引理 7　恒有不等式 $\dfrac{3}{5} < \dfrac{\triangle_2}{\triangle} \leq \dfrac{\triangle_a}{\triangle} \leq \dfrac{\triangle_{p_1p_2\cdots p_k}}{\triangle}$.

证明　令 $\dfrac{\triangle_2}{\triangle} = \rho_k$

$$\text{因为 } \rho_k = \prod_{i=1}^{k}(p_i-2) \Big/ \frac{\prod\limits_{i=1}^{k}(p_i-1)^2}{\prod\limits_{i=1}^{k} p_i} = \prod_{i=1}^{k}\frac{p_i(p_i-2)}{(p_i-1)^2} = \prod_{i=1}^{k}\frac{(p_i-1)^2-1}{(p_i-1)^2} = \prod_{i=1}^{k}\frac{1}{\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{(p_i-1)^2}}}$$

注意：$(p_1-1)^2 = 2^2, (p_2-1)^2 = 4^2 > 3^2$.

一般地，有：$(p_{i+1}-1)^2 > p_i^2$,

因为 $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{(p_{i+1}-1)^2}} < \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{p_i^2}}$，　因为 $\dfrac{1}{\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{(p_{i+1}-1)^2}}} > \dfrac{1}{\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{p_i^2}}}$，

$$\text{所以 } \rho_k = \frac{1}{\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2^2}}}\cdot\frac{1}{\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{(p_2-1)^2}}}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{(p_k-1)^2}}} > \frac{1}{\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2^2}}}\cdot\frac{1}{\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{3^2}}}\cdot\frac{1}{\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{5^2}}}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{p_{k-1}^2}}} \geq$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2^2}}}\cdot\frac{1}{\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{3^2}}}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{p_k^2}}} = \frac{1}{\zeta(2)} = \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^{-1} = 0.608\cdots > \frac{3}{5}.$$