



高教版考试用书
www.eduexam.com.cn

2014

MBA、MPA、MPAcc
管理类联考
数学应试宝典

(含1997-2013历年真题解析)

● 主 编 孙华明

- 一线名师倾情主笔
- 秒杀技巧精彩演绎
- 基础知识梳理透彻
- 题型总结归纳全面
- 历年真题收录详尽
- 一题多解方法独特



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

013066658



013-42
329
2014



MBA, MPA, MPACC
SHUXUE YINGSHI BAODIAN

MBA、MPA、MPAcc 管理类联考 数学应试宝典 (含1997-2013历年真题解析)



● 主 编 孙华明

责任编辑: 张明 封面设计: 王 强
文字编辑: 张明 版式设计: 王 强
校对: 张明 印刷: 张明

咨询电话: 400-810-0298
网 址: <http://www.hep.com.cn>
网上订购: <http://www.jiaodian.com.cn>
印 次: 2013年7月第1版
印 次: 2013年7月第1次印刷
定 价: 39.00元

013-42
329
2014



北航 C1673361

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING



内容提要

本书根据编者对管理类专业硕士联考历年真题的研究,将各个数学模块分类汇编,并提炼出各种解题技巧。以知识点归纳、例题讲解、题型精解、真题再现等方式展现出来,与目前市面上的辅导班授课相呼应。本书由浅入深、分析透彻、通俗易懂,有些题还尽量给出一题多解,以拓展读者的思路。

本书适用于参加 MBA、MPA、MPAcc 专业联考的考生及相关的辅导教师。

MBA, MPA, MPAcc

管理类联考

数学应试宝典

(含1997-2013年历年真题解析)



图书在版编目(CIP)数据

MBA、MPA、MPAcc 管理类联考数学应试宝典:含 1997
~2013 历年真题解析/孙华明主编.--北京:高等教
育出版社,2013.7

ISBN 978-7-04-037783-5

I. ①M… II. ①孙… III. ①高等数学-研究生-入
学考试-自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 136667 号

策划编辑 张耀明

责任编辑 张耀明

封面设计 王洋

版式设计 余杨

插图绘制 尹莉

责任校对 陈杨

责任印制 韩刚

出版发行 高等教育出版社
社址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印刷 北京汇林印务有限公司
开本 787 mm×1092 mm 1/16
印张 21.5
字数 520 千字
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
版次 2013 年 7 月第 1 版
印次 2013 年 7 月第 1 次印刷
定价 39.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 37783-00

本书编委会成员

主 编 孙华明

副主编 张乃岳

编 委 孙华明 张乃岳 蔡怀恩
张利华 黄国建 徐 栋
周 敏 曹 斌 张 超

序 管理类数学全国联考应试指导

一、管理类联考命题特点

2008年MBA考试改革至今共进行了6次入学考试,考试大纲已删除了微积分、线性代数、概率论三块内容,只考查初等数学,其中从2010年开始,多种专业硕士考试合并成管理类联考,改革意图和考试趋势已经呈现在我们面前,数学部分考试难度适中,趋于稳定,主要体现在以下三个特点:

基础性:对于任何一种考试,知识点都是基础、是核心、是不可或缺的部分。目前,数学只考实数、整式和分式、方程和不等式、排列组合与概率初步、数据描述、平面几何、解析几何和立体几何初步,考点已经大量压缩,保留的知识点大部分考生都在初中时代学习过。在这种情况下,每年纯粹知识点的考题一般5至8个,并且对这些知识点的考查都有相对的深度,知识点的交叉、联合比较多,甚至会考考生不注意的地方或者特别容易出错的地方,这就要求考生对基本知识点有精深的把握。

灵活性:经历数次改革以后,虽然考查的知识点变少了、简单了,但考题向着灵活和多样化方向发展,考点不固定,形式多样,最不容易把握,复习的难度较大。这就要求考生要有一定的数学思维,要有很强的学习和做题的灵活性,然而要具备这样的灵活性不是靠题海战术,更不是靠死记硬背,而是要通过培养和提高思维灵活性,以不变应万变。

技巧性:一方面,目前的数学考试,基本要在55分钟之内解决25道题,这对考生做题速度提出了很高的要求;另一方面,现在的管理类数学考试中,初等数学奥数题目、国家公考题等竞赛类考题时有出现。这些都要求在复习中既要注重基本的知识点,又要掌握一些方便、快捷的方式和方法。但这方面的学习又不能进入误区,每年基本上有6至8个题目有技巧可循,对于这些题目,技巧来得直接、便捷。但是建议不管是什么样基础的学生,首先还是要先夯实基础。运用基础方法一般都会费时、费力,从而影响考试的发挥,因此适当地运用技巧是必要和必需的。

因此,考生要精深掌握基本知识点,要有灵活的思维方式,要熟练运用技巧,三者是数学考高分的关键,也是缺一不可的。

二、管理类联考数学考试内容

1. **实数部分:**实数及其运算、绝对值性质、平均值、比和比例。
2. **整式与分式:**整式运算、多项式因式分解、分式运算。
3. **函数及应用:**集合、一元二次函数及其图像、指数函数、对数函数。
4. **方程和不等式:**一元一次方程(不等式)、一元二次方程(不等式)、二元一次方程组、一元一次不等式组,分式不等式,均值不等式。
5. **数列:**通项公式、求和公式、等差数列、等比数列及其性质。
6. **排列组合及概率初步:**加法原理、乘法原理、排列及排列数、组合及组合数、古典概型、事

件关系及运算、伯努利试验。

7. **数据描述**:平均值、方差与标准差、数据的图表表示。

8. **平面几何**:三角形、平行四边形、矩形、菱形、正方形、梯形、圆、三角形的相似及全等。

9. **解析几何**:基本概念及公式、直线方程式、圆的方程式、直线与直线的位置关系、直线与圆的位置关系、圆与圆的位置关系。

10. **立体几何**:长方体、圆柱体、球体。

对于考题数量来说,实数一般考查3题,其中运算1题,绝对值1题,实数性质1题;整式与分式一般2题;函数1题;方程和不等式部分2题;数列2题;应用题一般有5-8个,主要以比例为载体命题;几何一般有5题其中平面几何2题,解析几何2题,立体几何1题;概率部分5题,其中数据描述1题、排列组合2题、概率2题。建议考生在基础阶段把侧重点放在代数运算和应用题上,在强化阶段把重点放在排列组合、解析几何和数列上,在模考阶段则需要整体把握。

三、数学考试备考建议

针对数学考试的特点、考试内容和考试结构,特提出以下复习建议:

1. **学习方法**。首先,数学学习要系统学,要形成一个有效体系。所以建议数学可以每周集中1~2次学习,每次学习2个小时左右,最好每次学一个专题。其次,不要搞题海战术,要做一定量的题(基础阶段不低于250个题目,系统阶段不低于350个题目),但一定要清楚做题的目的,这是为了进一步理解、熟练、掌握考查的知识点和做题的思路和方法。再次,最好做完一部分题目后,多思考,多总结,培养和建立数学思维,归纳和总结考试题型、考法,对知识点、题型、方法和技巧进行系统归纳,能把知识点理成一条条线,再由线织成一张合理、清晰、有效的知识网。

2. **学习思路**。数学学习最好跟着老师讲的步骤学,不要偏离学习的轨道,老师做了长时间研究,对于考试形式和内容基本能把握得很准,这个时候教学内容的安排相当于把每一位学生领上一条学习的正确道路,考试题型、做题思路和方法的讲解相当于开了一扇门。有了这条路和这扇门,每个学生都可以快速、高效地提高成绩。学习程度好的同学不要考虑找什么奥数书、偏题怪题来做,至少在基础阶段没必要。学习程度差的同学也不要考虑拿初中的课本补,只需要跟着进度走,或者对老师讲的内容提前作一下简单的预习即可。越是基础差的,拥有的辅导书越少越好,只有掌握的资料越精,才能在有效时间内学好、学透、学专。我们讲课的时候既会放一些难题照顾程度好的,也会尽可能地保证每个学生都听懂,照顾程度差的。

3. **学习内容**。首先是老师讲过的部分,这是第一位的,也是最重要的。最好是在听完课一周之内不看老师的讲解,自己重新做一遍,做完和老师的讲解相对照,查找存在哪些问题、哪些和老师的讲解不一致、题目考查的是什么目的。例如2013年1月的第3、第5、第10题,2012年1月第13题,2011年1月联考中第1题、3题和13题的不定方程,以及2010年1月联考中第1题、8题、13题,均为新题型或非常经典的考试题型,在讲课的时候老师会特意作为重点来讲,有些直接考了原题,有些考试题目和讲解题目除了语言环境变了一下,其他都没变,结果还是有个别同学听完课没好好复习,考试的时候不会做。所以,要尤为注重讲过的内容,其次要做完相关的配套练习,高质量完成习题课和作业。

4. **学习策略**。即便是数学这一门课,每一部分的学习的策略也不一样,每一部分有每一部分的特点和考试方式,要分别对待。在这里简要介绍一下每一模块的学习策略。应用题是考试

中灵活性最大的一块,在这里要尤其注重思维,要学会翻译题目,理出题目的主线,变文字描述为一条条主线,就意味着方程出来了;实数、整式和分式部分知识点杂,要归好类,注重小的概念和知识点的运用;函数、方程、不等式、数列部分知识点和考试题目设置相对固定,把每种题型弄透即可;排列组合和概率大家相对比较陌生,好的办法是准确理解概念,理解、掌握典型的题目,在自己脑海里建立起相应的模型(比如什么情况下用加法原理、什么情况下用乘法原理,什么时间该打包、什么时间该插空,古典概型的三种形式等);平面几何主要考查面积的转化,要有一定的几何构思能力;解析几何全是模板化的解题方法,对应掌握即可;立体几何不会考得太复杂,主要是把相应图形的特点弄透。

人生需要磨砺,青春不畏挑战!我们已经扬帆起航,用我们的坚毅、勇敢、智慧和努力,达到理想的彼岸,书写人生华美乐章!

孙华明
2013年3月

III

序
管理类数学全国联考应试指导

前 言

随着 MBA、MPA、MPAcc 等多种专业硕士考试的合并,考查高等数学的时代已经过去,为了体现考试的公平性,目前我们的联考只涉及初等数学的知识点,要求考生掌握数学的基本运算能力、逻辑思维能力、空间想象能力和数据分析能力等。而联考目的是选拔具有高素质、高洞察能力、高思维判断能力的管理型人才,命题方式就应该更灵活多变。初等数学题的考查方式是必然的一个趋势,而且考试的难度会不断增大。

面对上述这种考试应如何复习备考呢?我们认为基础知识是必须的,这套教材中对知识点的剖析是非常到位的;其次,历年真题尤其重要,本书中的例题基本以历年真题为主导,考生只需反复多做几遍,掌握其精髓就能把握命题方向;再次,解题技巧也不容忽视,因为初等数学题难度和运算量并不大,关键是文字信息量多,题目线索比较隐蔽,考生上手慢,这就要求考生掌握数学的一些基本思维方法,并辅助以必要的解题技巧,才是决胜的关键。

编者从事专业硕士联考辅导多年,潜心研究历年真题,将各个数学模块分类汇编,并提炼出各种解题技巧。以知识点归纳、例题讲解、题型精解、历年真题分类解析等方式展现出来,与目前市面上的辅导班授课相呼应,是各个层次考生的良师益友。本书共分十二章,其中第一章到第十章主要是对联考数学各考点的阐述,第十一章为应用题专题,是联考的“主心骨”,是决定成功与否的关键;第十二章专门对联考各类应试技巧作汇总,是解题速度提高的关键;本版修改了上一版的一些错误,并改编了一些例题,新增了真题板块,收录历年所有真题,对每道真题都进行详解,并带有点睛和技巧,最后还增加了核心公式,经验结论等附录。本书由浅入深、分析透彻、通俗易懂,有些题还尽量给出一题多解及应试对策,以拓展读者的思路,可以供广大学员全程备考使用。

本书由孙华明老师担任主编,张乃岳老师担任副主编,蔡怀恩老师做了几何部分的审核与校对。另外,在本书的编写过程中,得到了江苏中洋培训学院、上海众凯教育、复旦托业教育等领导的大力支持,特此感谢!欢迎大家通过作者博客(网易:<http://sun-huaming.blog.163.com>,新浪:<http://weibo.com/sunhuaming>)、邮箱(sun-huaming@foxmail.com)、YY 频道(74573253),YY 备考群(8203633)等网络平台获得本书的最新信息,互动学习方法及经验,最大程度地利用好本书。由于编者水平有限,兼之时间仓促,对书中的不妥之处,恳请读者批评指正。

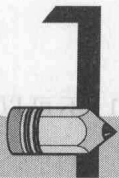
编 者

2013 年 3 月

目 录

第一章 算术	1	第一节 相交线、平行线	117
第零节 充分条件和充分性判断	1	第二节 三角形	119
第一节 整数、分数、小数、百分数	3	第三节 四边形	125
第二节 比和比例	9	第四节 圆与扇形	128
第三节 数轴和绝对值	10	第五节 题型精解	130
第四节 题型精解	14	第六节 本章历年真题分类解析	135
第五节 本章历年真题分类解析	23	第六章 空间几何体	150
第二章 整式、分式及其运算	37	第一节 长方体	150
第一节 整式	37	第二节 圆柱体	152
第二节 分式及其运算	41	第三节 球体	154
第三节 题型精解	42	第四节 本章历年真题分类解析	156
第四节 本章历年真题分类解析	50	第七章 平面解析几何	160
第三章 函数、代数方程和不等式	56	第一节 平面直角坐标系	160
第一节 函数	56	第二节 直线方程	162
第二节 代数方程	60	第三节 圆	167
第三节 不等式	62	第四节 题型精解	170
第四节 题型精解	66	第五节 本章历年真题分类解析	171
第五节 本章历年真题分类解析	75	第八章 数据描述	182
第四章 数列	93	第一节 平均值、方差与标准差	182
第一节 数列的基本概念	93	第二节 数据的图表表示	186
第二节 等差数列	95	第三节 本章历年真题分类解析	190
第三节 等比数列	98	第九章 计数原理	193
第四节 题型精解	100	第一节 两个原理	193
第五节 本章历年真题分类解析	102	第二节 排列组合定义	195
第五章 平面图形	117	第三节 排列组合解题策略	197

第四节	题型精解	201	第十二章 临考冲刺篇	306
第五节	本章历年真题分类解析	205	第一节	管理类数学联考技巧
第十章 概率初步	212	归纳	306	
第一节	事件及其运算	212	第二节	问题求解题黄金准则
第二节	古典概率	214	第三节	条件充分性判断题黄金
第三节	独立性事件的概率	215	准则	317
第四节	题型精解	217	附录 1 2013 年管理类专业硕士学位联考	
第五节	本章历年真题分类解析	222	综合能力数学试题及答案	321
第十一章 算术应用题	242	附录 2 2014 年管理类数学考试考前必会		
第一节	比例与百分比问题	242	重点公式及经验结论	325
第二节	行程工程问题	249	附录 3 2014 年管理类研究生考试考前心	
第三节	其他问题	255	理调节篇	331
第四节	本章历年真题分类解析	259		



第一章 算术

【大纲要求】

实数的概念、性质、运算及应用,比和比例,绝对值.

【备考要点】

本部分主要考查实数的性质、概念和运算,进行数与式的合理变形.通过分析已知条件,寻求与设计合理、简捷的运算途径,比例式的运算技巧,绝对值的性质等.

第零节 充分条件和充分性判断

【知识点归纳与例题讲解】

一、充分条件和必要条件

1. 如果命题 A 成立,则命题 B 也必成立,那么称 A 为 B 的充分条件,可记为 $A \Rightarrow B$,这时也称 B 为 A 的必要条件,也可以说如果 B 不成立,则 A 也必不成立.

例如:命题 A 为 $2 < x < 3$,命题 B 为 $1 < x < 4$,则 A 为 B 的充分条件, B 为 A 的必要条件.

2. 如果命题 A 既是命题 B 的充分条件,又是 B 的必要条件,则称 A 是 B 的充分必要条件,简称充要条件,可记为 $A \Leftrightarrow B$.这时 B 也必为 A 的充分必要条件,也可称条件 A 、 B 等价.

例如:设 a, b, c 为一三角形的三条边长,则此三角形为直角三角形且 c 为斜边 $\Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2$.

二、条件充分性判断

此类题是管理类硕士联考特有的题型,其一般形式如下:

题干:(条件部分)、结论部分.

条件(1): _____ 内容 _____;

条件(2): _____ 内容 _____.

其中题干部分中,可能有已知的条件,解题时可用,也可能没有这一部分,结论部分则必须具备,是本题需要求解得到的结果.如一题题干中有条件部分,则必条件部分在前,结论部分在后,两部分的区分以用词、语气来判断.

条件(1)、条件(2)是两项已知条件.

此类题型的解答以 A、B、C、D、E 五个选项中单选一项作答,各选项的规定意义如下:

如仅已知条件(1)、不知条件(2)可以推出结论,而仅已知条件(2)、不知条件(1)不可以推出结论,则选择 A;

如仅已知条件(2)、不知条件(1)可以推出结论,而仅已知条件(1)、不知条件(2)不可以推出结论,则选择 B;

如仅已知条件(1)或仅已知条件(2)均不可以推出结论,而条件(1)、条件(2)都已知,就可以推出结论,则选择 C;

如仅已知条件(1)、不知条件(2),或仅已知条件(2)、不知条件(1)均可以推出结论,则选择 D;

如仅已知条件(1)、不知条件(2),或仅已知条件(2)、不知条件(1)均不可以推出结论,且条件(1)、条件(2)都已知时仍不能推出结论,则选择 E.

以上五种情况必然有且仅有一种情况成立.当然,不论在任何情况下,题干中如有条件部分,均可作为已知的使用.

三、条件充分性判断题解题思路与方法

1. 条件充分性判断题解题思路

从集合角度,若条件的范围,落在题干成立范围之内,则条件充分,即条件的范围为题干范围的子集(条件 \subseteq 题干).

2. 条件充分性判断题解题方法

【应试对策】方法一(自下而上):将条件中的参数分别代入题干中验证.特点是至少运算两次.

方法二(自上而下):先不看条件,假设题干中命题正确,求出参数.然后将条件中参数范围与题干成立的参数范围进行比较,若条件范围落入题干成立范围之内,则充分.特点是一次运算.

方法三(特殊反例法):在两个条件的交集中取一个特殊值,代入题干不充分,选 E.

【例 1.0.1】 $x^2=1$. ()

(1) $x=1$; (2) $x=-1$.

【答案】D.

【解题思路】两条件代入都充分,选 D.

【例 1.0.2】不等式 $x^2 < 2^x$ 成立. ()

(1) $x=0$; (2) $x=3$.

【答案】A.

【解题思路】条件(1)代入充分,条件(2)不充分,选 A.

【例 1.0.3】能使 $x^2 \neq 4$ 成立. ()

(1) $x \neq 2$; (2) $x \neq -2$.

【答案】C.

【解题思路】题干为 $x^2 \neq 4 \Leftrightarrow x \neq 2$ 且 $x \neq -2$,联合充分,选 C.

【例 1.0.4】不等式 $x^2 - 4x + 3 < 0$ 成立. ()

(1) $x > -1$; (2) $x < 3$.

【答案】 E.

【解题思路】 方法一: 题干为 $x^2 - 4x + 3 < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3$, 选 E.

方法二: 取 $x=0$ 代入发现两条件都不充分, 联合也不充分, 选 E.

【例 1.0.5】 $x^{101} + y^{101}$ 有两个不同的取值. ()

(1) $(x+y)^{99} = -1$; (2) $(x-y)^{100} = 1$.

【答案】 E.

【解题思路】 条件(1)和(2)单独都不充分, 将(1)和(2)联合, 则解下列方程组

$$\begin{cases} x+y=-1, \\ x-y=1 \end{cases} \text{ 和 } \begin{cases} x+y=-1, \\ x-y=-1, \end{cases}$$

它们的解分别为 $\begin{cases} x=0, \\ y=-1 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x=-1, \\ y=0. \end{cases}$

无论哪组解代入 $x^{101} + y^{101}$ 中, 它的值均为 -1 , 结论不成立, 选 E.

第一节 整数、分数、小数、百分数

【知识点归纳与例题讲解】

一、实数的概念、性质

1. 数的概念与性质

整数: 指 $0, \pm 1, \pm 2, \dots, n$ 为整数可记为 $n \in \mathbf{Z}$.

正整数: 指 $1, 2, 3, \dots, n$ 为正整数可记为 $n \in \mathbf{Z}^+$.

负整数: 指 $-1, -2, -3, \dots, n$ 为负整数可记为 $n \in \mathbf{Z}^-$.

自然数: 包括 0 及正整数.

整数分为偶数 ($2n, n \in \mathbf{Z}$) 和奇数 ($2n+1, n \in \mathbf{Z}$) 两类.

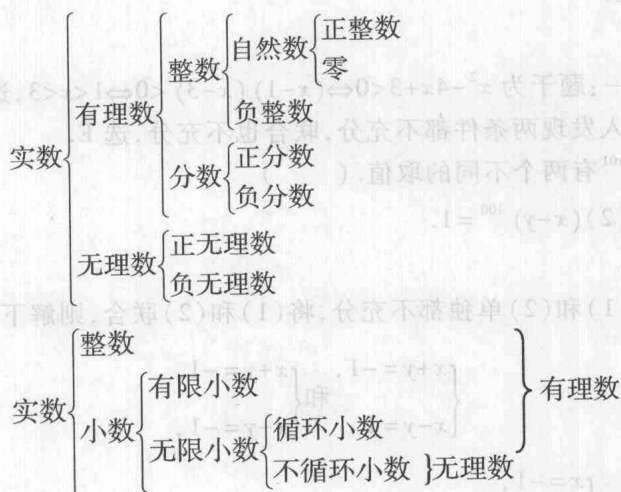
有理数: 指 $\frac{n}{m}$ ($n \in \mathbf{Z}, m \in \mathbf{Z}^+$), 当 n 能被 m 除尽时, $\frac{n}{m}$ 是整数; 否则, 便是分数.

有理数可分为整数、有限小数、无限循环小数 (如: $2, \frac{4}{5} = 0.8, \frac{1}{3} = 0.3\bar{3}$).

无理数: 指无限不循环小数, 如 $\pi = 3.14159\dots, \sqrt{2} = 1.414\dots$.

实数: 有理数和无理数统称为实数.

两种分类:



【例 1.1.1】在 $-\frac{5}{2}, \frac{\pi}{3}, \sqrt{2}, -\sqrt{\frac{1}{16}}, 3.14, 0, \sqrt{2}-1, \frac{\sqrt{5}}{2}, |\sqrt{4}-1|$ 中:

整数有 _____ ;

无理数有 _____ ;

有理数有 _____ .

【答案】整数有: $0, |\sqrt{4}-1|$;

无理数有: $\frac{\pi}{3}, \sqrt{2}, \sqrt{2}-1, \frac{\sqrt{5}}{2}$;

有理数有: $-\frac{5}{2}, -\sqrt{\frac{1}{16}}, 3.14, 0, |\sqrt{4}-1|$.

【命题知识点】数的分类.

2. 正整数的分类

约数: 设 a 为一个正整数 ($a \in \mathbf{Z}^+$), m 为 a 的一个约数是指: a 能被正整数 m 除尽. 如 $a=15$, 则 $a=3 \times 5$, 所以 a 有约数 $1, 3, 5, 15$ 共 4 个.

正整数 $\begin{cases} 1 \\ \text{质数 (也称素数, 只有 1 和自身两个约数)} \\ \text{合数 (有除 1 和自身以外的约数)} \end{cases}$

100 以内的质数共 25 个

2	3	5	7	11
13	17	19	23	29
31	37	41	43	47
53	59	61	67	71
73	79	83	89	97

注意:

(1) 最小质数 2 为偶数, 其余质数均为奇数, 两个相邻整数必一奇一偶. 任何一个合数都能分解为若干个质因数之积. 1 既不为质数, 也不为合数.

(2) 有理数一定可写成分数形式, 无理数则不能, 这是二者的本质区别.

【例 1.1.2】设 m, n 都是自然数, 则 $m=2$. ()

(1) $n \neq 2, m+n$ 为奇数; (2) m 与 n 都是质数.

【答案】C.

【命题知识点】质数.

【解题思路】由条件(1), m 与 n 必有一个是偶数, 另一个为奇数, n 不是偶质数, 推不出结论. 而条件(2)单独也不充分, 两条件联合, 则 m 必为偶质数, 所以 $m=2$. 选 C.

3. 公约数、公倍数、互质

(1) 公约数

若正整数 m 同时是几个正整数 a_1, a_2, \dots, a_r 的约数, 就称 m 是 a_1, a_2, \dots, a_r 的公约数, 并把 a_1, a_2, \dots, a_r 的公约数中的最大的称为它们的最大公约数.

(2) 公倍数

若正整数 n 同时是几个正整数 a_1, a_2, \dots, a_r 的倍数, 就称 n 是 a_1, a_2, \dots, a_r 的公倍数, 并把 a_1, a_2, \dots, a_r 的公倍数中最小的称为它们的最小公倍数.

两个正整数的最小公倍数的求法:

$\frac{n}{m} = \frac{n_1}{m_1}$ (化成最简分数), 则 m, n 的最小公倍数就为 $m_1 n$ 或者 $n_1 m$.

或者使用短除法 $\frac{k \mid m \quad n}{m_1 \quad n_1 \rightarrow \text{互质}}$, 所以最小公倍数为 $km_1 n_1$.

(3) 互质

若正整数 m 与正整数 n 的公约数只有 1, 就称这两个正整数 m 与 n 互质, 并称 $\frac{n}{m}$ 为既约分数 (最简分数).

【例 1.1.3】两个正整数的最大公约数是 6, 最小公倍数是 90, 满足条件的两个正整数组成的大数在前的数对共有 ().

A. 0 对 B. 1 对 C. 2 对 D. 3 对 E. 以上都不对

【答案】C.

【命题知识点】公约数和公倍数.

【解题思路】

设这两数分别为 a, b , 且 $a > b$, 由题意得 $a = 6m, b = 6n \xrightarrow{\text{最大公约数是6}} m, n$ 互质且 $m > n$ (为正整数). 最小公倍数 $90 = 6 \times m \times n \Rightarrow mn = 15 \xrightarrow{m, n \text{ 互质且 } m > n} \begin{cases} m = 15, \\ n = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m = 5, \\ n = 3, \end{cases}$ 则 $a = 90, b = 6$ 或 $a = 30, b =$

18, 共有两对.

4. 带余除法 (商数和余数的表示)

设正整数 n 被正整数 m 除, 得商为 s , 余数为 r , 则可以表示为

$$n = ms + r (s, r \text{ 均为自然数}, 0 \leq r < m).$$

特别当余数 $r=0$ 时, 称 n 能被 m 整除.

数字整除特征:

能被 2 整除的数: 个位为 0, 2, 4, 6, 8.

能被 3 整除的数: 各数位数字之和必能被 3 整除.

能被 4 整除的数: 末两位(个位和十位)数字必能被 4 整除.

能被 5 整除的数: 个位为 0 或 5.

能被 6 整除的数: 同时满足能被 2 和 3 整除的条件.

能被 8 整除的数: 末三位(个位、十位和百位)数字必能被 8 整除.

能被 9 整除的数: 各数位数字之和必能被 9 整除.

能被 10 整除的数: 个位必为 0.

【例 1.1.4】 $8x^2 + 10xy - 3y^2$ 是 49 的倍数. ()

(1) x, y 都是正整数; (2) $4x - y$ 是 7 的倍数.

【答案】C.

【命题知识点】数的整除.

【解题思路】(1)、(2) 单独明显均不充分, 联合之, $8x^2 + 10xy - 3y^2 = (2x + 3y)(4x - y)$, 其中 $4x - y$ 是 7 的倍数, $2x + 3y = 14x - 3(4x - y)$ 也必是 7 的倍数, 可见 $8x^2 + 10xy - 3y^2$ 是 $7^2 = 49$ 的倍数, 充分.

5. 奇数与偶数

能被 2 整除的数称为偶数, 被 2 除余 1 的整数称为奇数.

性质:

(1) 奇数和奇数的差为偶数, 奇数和奇数的和为偶数.

(2) 偶数和偶数的差为偶数, 偶数和偶数的和为偶数.

(3) 偶数和奇数的差为奇数, 偶数和奇数的和为奇数.

(4) 两个奇数的乘积为奇数, 奇数(偶数)的正整数次乘方仍为奇数, 一个偶数和一个奇数的乘积为偶数.

【例 1.1.5】 $(-1)^a = 1$. ()

(1) x, y, a 均为整数, 且 $|x+y| + \sqrt{x-y} = a$; (2) x, y 均为整数, 且 $xy + x^2y^2 = a$.

【答案】D.

【命题知识点】奇数, 偶数.

【解题思路】对(1), $x+y, x-y$ 必有相同奇偶性, 而 $|x+y|$ 和 $x+y, \sqrt{x-y}$ 和 $x-y$ 也均有相同奇偶性(从已知可见 $\sqrt{x-y}$ 为整数), 因此 $|x+y|$ 和 $\sqrt{x-y}$ 有相同奇偶性, a 必为偶数, 题干成立.

对(2), xy 和 x^2y^2 有相同奇偶性, a 也必为偶数, 题干也成立.

6. 有理数与无理数

(1) 有理数和无理数的定义

如 m, n 均为整数, $n \neq 0, p = \frac{m}{n}$, 则称 p 为有理数, 如实数 q 不能写成两个整数之商, 则称 q 为无理数.

例如: 圆周率 π 是无理数. 又如 n 为正整数, 且非完全平方数, 则 \sqrt{n} 为无理数.

(2) 性质

任何两个有理数的和、差、积仍为有理数. 一个有理数和一个无理数的和、差必为无理数. 一个非零有理数和一个无理数的积、商必为无理数. 两个无理数的和、差、积、商有可能为有理数, 也可能为无理数.

【例 1.1.6】下列说法中正确的是().

- A. 任意两个无理数的和仍是无理数
- B. 任意两个无理数的积仍是无理数
- C. 两个无理数的和与差不可能都是有理数
- D. 两个无理数的积与商不可能都是有理数
- E. 以上结论均不正确

【答案】C.

【命题知识点】有理数与无理数的运算性质.

【解题思路】对 C, 如 a, b 均为无理数, $\begin{cases} a+b=x, \\ a-b=y, \end{cases}$ 其中 x, y 均为有理数, 则 $a = \frac{1}{2}(x+y)$ 也是有理数. 矛盾, 可知 x, y 不能均为有理数. 其他 A、B、D 选项均易举例否定.

【例 1.1.7】若 a 是无理数, b 是实数, 且 $ab - a - b + 1 = 0$, 则 b 是().

- A. 负有理数
- B. 正有理数
- C. 负无理数
- D. 正无理数
- E. 有理数、无理数均有可能

【答案】B.

【命题知识点】有理数与无理数的运算.

【解题思路】所给即 $(a-1)(b-1) = 0$, $a-1$ 为无理数, 即 $a-1 \neq 0$, 则 $b-1 = 0, b = 1$. b 为正有理数.

二、实数的运算

实数的四则运算满足加法和乘法运算的交换律、结合律和分配律; 还可以定义实数的乘方和开方运算.

(1) 乘方运算

负实数的奇次幂为负数, 负实数的偶次幂为正数.

$$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdots a}^{n \uparrow a},$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, (ab)^n = a^n \cdot b^n, \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, (a^m)^n = a^{mn},$$