初級中學適用

初學代數學

大同大學叢書之二

序

初學代數學,先室華桂馨女士遺稿,專爲初學說法之書也.桂馨嘗謂余"君等治天算之學者,每好以巨册書教初學.實則節目過繁,原理轉晦;宜乎學者之望而却步矣.憶昔十餘歲時,聽君口授代數,獲益良多.吾意爲大衆計,必得簡易明瞭之教材如彼者,然後方可引人入勝."此本書之所由起也.

民國之十一年,吾國教育家羣議改革學制.於是中學小學之圖速效者,競以加高學科程度相尙.卒之高者其名,降者其實,而桂馨之言乃不幸而更驗.大同於中等教育段向設六年之普通科,固無所謂舊制新制,然新招初級學生,多來自已截去一年程度之高小,與將升高一年學科之初中,所聞愈多,所知愈少;以言習算,戛戛乎其難矣.於時初學代數諸班需一平易切實之書尤急.余因檢桂馨舊稿授之,以爲因時制宜之計.原稿缺聯立二次方程式應用問題,吳君在淵爲增練習題一組及無三元一次方程式之圖.華君綰言爲補製圖若干;余復重加輯訂,以竟全功.一年之間,試用作

教本者二次.爰亟付刊,以便初學.時距桂馨之沒恰週年也.

昔英之名哲穆勒(Mill)序其所著羣己權界論(*On Liberty*),侯官嚴氏譯之,有曰:"以伉儷而兼師友,於眞理要道,有高識遐情,……吾乃今以是長供養此寶愛悲傷之舊影而已."吾於此書亦云.此書摭拾舊籍,淺近無比.然其長處,正在其能淺近;而編者之純爲初學着想,僅事摭拾適當之陳材,而不欲自儕於著作之林,亦足見其爲人之一斑.使此書果能"減少初學之困難,引起上進之興味,"則作者所望於教者學者之初願償矣.使教者學者更能推作者此志而廣之,則此書之有裨初學,又豈限於讀此書者而已哉.

中華民國十二年九月十三日,

胡敦復序於上海大同大學.

教 師 注 意

一班之中,學生材力往往不能齊一.其材力過人者,可於本書練習例題以外令加作較難之練習題.

練習題所由取材之書甚多.茲舉其最切用者數種於下:

Hall and Knight, *Elementary Algebra.*

Smith, *Elementary Algebra,* Revised by Irving Stringham (Complete Edition).

Ross, *Elementary Algebra.*

Wentworth *College Algebra.*

吳在淵著近世初等代數學.

大同大學叢刊:

初等代數學問題一　代數式.

初等代數學問題二　方程式.

編輯例言

一　本編爲代數學入門之書,陳義力避過高,說理務求淺顯,以減少初學之困難,引起上進之興味.

一　本編教材,大都取諸美人温德華氏,郝克斯氏,英人司密斯氏,郝爾那式二氏,日人早川氏等所著初等代數學,而於温氏書採用尤多.

一　本編於方程式之如何應用,講解特詳,以明代數學與人生實用問題之關係.

一　本編述簡易之圖寫圖解方程式法頗詳盡,以示數理之研究多可借助於形象.

一　本編凡論一理,舉一法,必設例若干,不嫌辭費;既以明其意義,著其應用,且示學者以演題之模範.

一　本編設簡易之練習題甚多,俾學者藉以熟知運算之理,嫻習運算之術,爲以後提綱挈領執簡馭繁之地.

一　本編可與中學算術同時教授,亦可逕接高小算術;於初級中學前期師範等校用作教本,最爲適宜.

目　　錄

初學代數學

第一章

緒論

［注意. 本書列舉主要之定義於卷首,以便檢閱,凡定義,所以釋名,學者務宜細心讀過,玩索其意指,勿但以逐字記憶爲能事已畢也.］

1. 量. 事物之大小多寡輕重等等,凡可得而比較者,曰量(Quantity).

2. 單位. 量可得而比較,則必有可與比較者.欲求比較之便利及精密,每取可與比較之一量作標準.此種標準,得隨事物之性質或比較之目的定之,名曰單位(Unit).

例如計學校學生之多寡,其單位爲一個學生;圖書館圖書之多寡,其單位爲一種圖書.鉛筆以打計者,其單位爲一打之鉛筆;磚以萬方計者,其單位爲一萬方之磚.距離之大者以里計,小者以尺或寸計,一里一尺一寸,皆單位也.

3. 數. 以單位度所欲比較之量,視其重複至若

干次;如是所得之結果曰數(Number)。

4. 論數之學,有算術(Arithmetic)及代數學(Algebra).算術示數之加減乘除,乘方開方諸運算,而應用於種種數量之問題.代數學更進而推究數之關係及性質,擴大算術所及之範圍,以期運算之普偏。

5. 算術中數之記號. 算術之表數用數字,其記號凡十: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

6. 代數學中數之記號. 代數學之表數,除用數字外,更用文字.此種文字,用以作數之普徧記號,其特有之值若何,初無一定,得隨意命之.

主要符號

7. 加減乘除四法,常稱爲基本運算.代數學中基本運算之符號,與算術中全同.

8. 加號(Sign of Addition), +. 符號 + 讀作加(plus).

例如 $4+3$, 讀作 4 加 3, 其義爲於 4 加 3, $a+b$, 讀作 a 加 b, 其義爲於 a 加 b.

9. 減號(Sign of Subtraction), −. 符號 − 讀作減(minus).

例如 $4-3$, 讀作 4 減 3, 其義爲從 4 減 3; $a-b$, 讀作

a 減 b, 其義爲從 a 減 b.

10. 乘號 (Sign of Multiplication), $\times$. 符號 $\times$ 讀作乘以 (multiplied by).

例如 4×3, 讀作 4 乘以 3, 其義爲以 3 乘 4; $a\times b$, 讀作 a 乘以 b, 其義爲以 b 乘 a.

乘號有時用一點·代之. 例如 $4\cdot3$ 與 4×3 同義; $a\cdot b\cdot c$, 與 $a\times b\times c$ 同義.

11. 除號 (Sign of Division), $\div$. 符號 $\div$ 讀作除以 (divided by).

例如 $4\div3$, 讀作 4 除以 3, 其義爲以 3 除 4 $a\div b$, 讀作 a 除以 b, 其義爲以 b 除 a.

除號有時用一線 —— 或 / 代之; 被除數在 —— 之上或 / 之左, 除數在 —— 之下或 / 之右. 例如 $\frac{4}{3}$, $4/3$, 均與 $4\div3$ 同義; $\frac{a}{b}$, a/b, 均與 $a\div b$ 同義.

12. 等號 (Sign of Equality), $=$. 符號 $=$ 讀作等於 (is equal to); 置兩數間以示其相等.

例如 $8+4=12$, 示 $8+4$ 及 12 爲相等之數; $x+y=20$, 示 $x+y$ 及 20 爲相等之數.

13. 不等號 (Sign of Inequality), $>$ 或 $<$. 符號 $>$ 讀作大於 (is greater than), 符號 $<$ 讀作小於 (is less than); 均置大小兩數間以示其不相等; 其開口處對大數。

例如 $9+6>12$, 示 $9+6$ 較 12 爲大; $9+6<16$; 示 $9+6$ 較 16 爲小。

14. 推斷號 (Sign of Deduction), $\therefore$. 符號 $\therefore$ 讀作故 (therefore) 或是以 (hence)。

15. 繼續號 (Sign of Continuation), $\cdots$. 符號 $\cdots$ 讀作等等 (and so on)。

16. 括號 (Sign of Aggregation)。 括號之形式不一:有縱括 (Bar) $\Big|$, 有橫括 (Vinculum), ——, 有圓括 (Parentheses) ( ), 有方括 (Brackets) [ ], 有包括 (Braces) { }.

例如 $\left.\begin{matrix} a \\ +b \end{matrix}\right|$, $\overline{a+b}$, $(a+b)$, $[a+b]$, $\{a+b\}$, 均示 $a+b$ 當視作一數。

因數, 係數, 冪

17. 因數. 設一數等於甲乙丙丁等數之積;則甲乙丙丁等數,均名曰此數之因數(Factor)。

乘號在數字與文字之間,或文字與文字之間,常略去不用.

例如 $63\times a\times b$ 常寫作 $63\,ab$; $a\times b\times c$ 常寫作 abc.

abc 與 $a+b+c$ 之別,學者宜十分注意. abc 爲 a,b,c 三數之積; $a+b+c$ 爲 a,b,c 三數之和;二者萬萬不可相混也.

設 $$a=2,\ b=3,\ c=4,$$

則 $$abc=2\times3\times4=24,$$

但 $$a+b+c=2+3+4=9,$$

[註. 算術記法所略去之運算符號,恆爲加號;代數記法所略去之運算符號恆爲乘號;例如 456 之義爲 $400+50+6$, $4ab$ 之義爲 $4\times a\times b$.]

18. 因數之爲數字者曰數字因數;其爲文字者,曰文字因數.

19. 設一數之因數甲乙丙丁等數中有一等於0;則無論其他各因數之值爲何,此數亦等於0.

數值爲0之因數,曰零因數.

20. 係數. 設一數爲甲乙二數之積;則在此數中,甲名曰乙之係數 (Coefficient),乙名曰甲之係數.

例如在 $7c$ 中,7 爲 c 之係數;在 $7ax$ 中,7 爲 ax 之係數,$7a$ 爲 x 之係數.

係數之爲數字者,曰數字係數;其爲文字者,曰文字係數.數字係數爲1者,常略去不寫;例如 ax 即 $1ax$.

21. 羃及根. 設甲數之因數盡爲乙數,則甲數名曰乙數之羃 (Power),乙數名曰甲數之根 (Root).

例如 $9=3\times3$, 9 爲 3 之羃, 3 爲 9 之根.

22. 指數. aa 爲二個 a 之積;恆記作 a^2; aaa 爲三個 a 之積,恆記作 a^3; $aaaa$ 爲四個 a 之積,恆記作 a^4;下倣此. a 右上之 2, 3, 4 等小數字,曰 a 之指數(Exponent).

指數爲 1 者,常略去不寫;例如 a 卽 a^1.

a, a^2, a^3, a^4, 讀作 a 之第一羃,第二羃,第三羃,第四羃;下倣此.

23. 指數與係數之別,學者宜十分注意,例如

$$a^4=a\times a\times a\times a;$$

$$4a=a+a+a+a.$$

設 $a=3$, 則 $a^4=3\times3\times3\times3=81;$

$$4a=3+3+3+3=12.$$

[註. 設一正方形之邊長 a 尺,則其面積爲 a^2 平方尺;因是 a^2 常名曰 a 之平方 (Squure) 又設一立方體之邊長 a 尺,則其體積爲 a^3 立方尺;因是 a^3 常名曰 a 之立方 (Cube).]

代數式

24. 代數式. 用代數記號所記之數曰代數式

(Algebraic Expression),略稱式.代數式或含一數之記號,或含二數以上之記號並其間之運算符號.

例如 $a, 3abc, 5a+2b-3c$, 皆爲代數式.

25. 項. 代數式之無加減號,以隔開其各部分者,曰項(Term).

例如 a, $5xy$, $2ab\times 4cd$, $\frac{3ab}{4cd}$, 皆爲一項之代數式,一項之各部分間,止可有乘除號.

26. 單式. 代數式由一項所成者曰單式 (Simple Expression) 或一項式 (Monomial).

例如 $5xy$, $a\times 2b, 7a\div 2b$, 皆爲單式.

27. 複式. 代數式由二項以上所成者,曰複式 (Compound Expression) 或多項式(Polynomial).

例如 $5xy+7a, 2x-y-3z, 4a-3b+2c-3d$, 皆爲複式.

28. 多項式之含二項者,特名曰二項式(Binomial).含三項者,特名曰三項式(Trinomial).

例如 $3a-b$ 爲二項式; $3a-b+c$ 爲三項式.

29. 正負項. 多項式之各項,其前附有 + 號者曰正項(Positive Term),附有 − 號者曰負項(Negative Term).第一項前之 + 號,常略去不用.

置項前之符號,常稱曰項之號(Sign).

30. 兩項異號而同數,則其合併時恆相消.

例如 $+5-5=0$; $-ab+ab=0$.

31. **同類項.** 兩項所含文字全同者爲同類(Like 或 Similar),所含文字不全同者爲不同類(Unlike 或 Dissimilar.

例如 $5a^2bc$, $-7a^2bc$, a^2bc 互爲同類項; $5a^2bc$, ab^2c, $5abc^2$ 互爲不同類項.

32. **項之次數.** 項以所含文字因數之數爲次數(Degree).

例如 $5abc$ 爲三次項; $2a^2b^2c^2$, 卽 $2aabbcc$, 爲六次項.

33. **複式之次數.** 複式以式中最高次項之次數爲次數.

例如 a^2x^2+bx+c 爲四次式,因 a^2x^2 爲四次故.

34. **元.** 式中往往有一文字較其餘諸文字爲重要者,此種文字,常名曰元(Dominant Letter).式之含元者,常以元之次數爲次數.

例如 a^2x^2+bx+c 爲 x 之二次式.

35. **複式之整列.** 多項式之各項,依式中一文字之羃次排列之,謂之多項式之整列(Arrangement).羃次自大而小者曰降羃(Descending Power),自小而大

者曰升冪(Ascending Power).

例如 $3ax^3-4bx^2-6ax+8b$ 爲依 x 之降冪而整列者,$8b-6ax-4bx^2+3ax^3$ 爲依 x 之升冪而整列者.

括 號

36. 多項式於計算時往往有視作一項者;括號常用以示此意.

例如 $2\times(10+5)$ 之義,爲加5於10而以其和乘2若不用括號而作 $2\times10+5$,則其義爲以10乘2而加5於其積矣.

37. 前有+號之括號. 設某人原有銀幣10圓,後收得3圓,最後又收得2圓;則先加3圓於10圓而後加2圓於其和,與先以3圓2圓相加而後加其和於10圓二者所得之結果,均爲其人最後所有之銀幣.

加3於10而加2於其和,記以式爲 $10+3+2$.

以3與2相加而加其和於10,記以式爲 $10+(3+2)$.

故
$$10+(3+2)=10+3+2. \tag{1}$$

設某人原有10圓,後收得3圓,最後付出2圓;則先加3圓於10圓而後自其和減去2圓與先自3圓減去2圓而後加其差於10圓,二者所得之結果,均爲其人最後所有之銀幣.