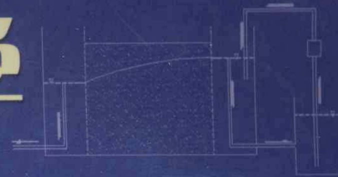
普通高等教育土木与交通类“十二五”规划教材

地下水渗流力学



DIXIASHUI SHENLIU LIXUE

王俊杰　陈亮　梁越　编著

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

普通高等教育土木与交通类“十二五”规划教材

地下水渗流力学

王俊杰 陈亮 梁越 编著

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书旨在使读者认识地下水在岩土体中的渗流规律，为解决工程中水资源利用问题和水环境保护问题奠定理论与技术基础，提升学生及相关技术人员解决工程问题的能力。全书共10章，内容包括：水力学基础、地下水渗流力学基础、地下水渗流微分方程、河渠地下水渗流理论、地下水井流理论、地下水渗流的理论计算、地下水渗流的测试、地下水渗流的模拟与数值计算、地下水渗流的反分析方法及地下水渗流与废弃物处置。

本书可作为高等院校地质工程、水利工程等相关专业教材，也可供地下水工程相关技术人员参考之用。

图书在版编目（CIP）数据

地下水渗流力学 / 王俊杰，陈亮，梁越编著. -- 北京：中国水利水电出版社，2013.5
普通高等教育土木与交通类“十二五”规划教材
ISBN 978-7-5170-0890-3

Ⅰ. ①地… Ⅱ. ①王… ②陈… ③梁… Ⅲ. ①地下水渗流力学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O357.3

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第103913号

书　　名	普通高等教育土木与交通类“十二五”规划教材 **地下水渗流力学**
作　　者	王俊杰　陈亮　梁越　编著
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路1号D座　100038） 网址：www. waterpub. com. cn E-mail：sales@waterpub. com. cn 电话：（010）68367658（发行部）
经　　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京时代澄宇科技有限公司
印　　刷	北京瑞斯通印务发展有限公司
规　　格	184mm×260mm　16开本　16印张　379千字
版　　次	2013年5月第1版　2013年5月第1次印刷
印　　数	0001—3000册
定　　价	**32.00**元

前　言

水是生命之源。古今中外，人类的生存历史大部分都是与水相互依存的。近现代以来，水的问题依然是人类生存与发展中的焦点。地下水是地球环境的重要组成部分，其储存特点、运移规律等与人类生存环境及相关工程的安全密切相关。地下水问题研究的核心学科——地下水渗流力学是工程中应用面最为广泛的学科。地下水渗流力学也称“地下水水力学”或“地下水动力学”，是研究地下水在岩、土体等多孔介质中的运动规律的学科，需要多孔介质理论、表面物理、物理化学、岩土力学等多门学科内容作支撑。

地下水渗流力学的发展过程大体可分为基础理论、稳定流理论、非稳定流理论和现代渗流理论4个阶段。从20世纪初开始，地下水渗流力学进入快速发展的阶段，许多工程技术人员及学者从工程实践和理论两方面进行了大量的研究，获得了许多有价值的成果，既解决了工程中的实际问题，又丰富和发展了地下水渗流理论。目前，地下水渗流力学已经成为许多基础学科，如水力学、土力学、岩石力学、工程地质学、水文地质学以及环境学等不可缺少的重要组成部分；同时它也是许多应用学科，如水工结构、农田水利、地下水供水工程、矿业工程、岩土工程和基础工程的重要理论基础。

地下水渗流力学是地质工程、水利工程等相关专业的一门专业基础课。通过本课程学习，便于读者认识地下水在岩土体中的渗流规律，为解决工程中水资源利用问题和水环境保护问题奠定理论与技术基础，提升学生及相关技术人员解决工程问题的能力。

本书首先介绍了地下水渗流力学相关的预备和基础知识，即水力学基础以及地下水渗流力学的基本概念、基本理论；其次介绍了地下水渗流的基本微分方程、河渠渗流理论以及井流理论；然后介绍了地下水渗流相关的计算、测试与分析方法，如理论计算方法、室内外测试方法、物理及数值模拟方法、反分析方法等；最后结合目前研究热点问题，探讨了与我们生活息息相关的废弃物处置中的渗流问题。

本书共分10章，第1、2、3、6章由重庆交通大学王俊杰教授编写；第4、8、9章由重庆交通大学梁越副教授编写；第5、7、10章由河海大学陈亮副教授编写。全书由王俊杰教授统稿。

本书编写过程中引用了很多单位和个人的科研成果，研究生邓弟平、邓文杰、马伟、郝建云、邱珍锋、吴洋、伍应华、尹文、季纯波、李飞、卢亮等参与了本书的校对、插图绘制等工作，谨向这些单位和个人致以衷心的感谢！

本书力求在理论上推导严谨、描述清晰，内容上尽可能做到深入浅出、循序渐进，便于读者掌握基本要领及深刻内涵。但限于作者水平，书中不足和错误之处在所难免，敬请读者批评指正。

编者

2012年9月

目　录

第1章 水力学基础

水力学是研究液体平衡和机械运动规律及其在生产实践中应用的一门科学。它的研究对象是以水为代表的液体。在研究水在含水层中的运动时，要用到一些与水力学有关的知识。因此，有必要把水力学的一些基本知识，在这里作简单的介绍。

1.1 基础知识

1.1.1 液体的主要物理性质

液体受力作机械运动，一方面与作用于液体上的外部因素和条件有关，但更主要的是决定于液体本身的内在物理性质，所以在研究液体运动规律之前，须了解液体的物理性质。

液体的性状介于气体和固体之间。其主要特征为易流动性和难压缩性。和固体相比，液体分子间距离较远，分子间的吸引力较小，因而没有固体那种保持自身形状的能力。它只能承受压力，在拉力和切力的作用下，液体极易变形。只要有切力存在，不管力是多么微小，液体都要发生流动，这就是易流动性。液体和气体是相似的，所以两者合称流体。但液体也有和气体不同的方面，就是难压缩性，它能保持一定的体积。当容器的体积大于它的体积时，它不能充满容器，形成一个自由液面。而气体很容易被压缩，没有固定的体积，能够充满任何容器。

1.1.1.1 重力特性

液体要受到地球引力的作用而具有重力（重量）的这种特性称重力特性。液体与其他物体一样，具有质量。单位体积内具有的质量称为密度，以 ρ 表示。若一均质液体质量为 m，体积为 V，其密度为：

$$\rho=\frac{m}{V} \tag{1.1.1}$$

对于非均质液体，如在液体内任选一点 A，在 A 点周围取一微小的液体体积 ΔV，该体积中包含的质量为 Δm，则当 ΔV 趋近于零时，比值 $\Delta m/\Delta V$ 的极限定义为液体在 A 点的密度，用下式表示：

$$\rho=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta V} \tag{1.1.2}$$

密度的单位常采用 kg/m^3 或 g/cm^3。

地心对液体的引力就是重力。物体的重力 G 和质量 m 之间有下列关系：

$$G=mg \tag{1.1.3}$$

式中：g 为重力加速度。单位体积的重力称为容重，也称重度，用 γ 表示，单位常用 kN/m^3。如果体积为 V 的液体重力为 G，则：

$$\gamma=\frac{G}{V}=\frac{mg}{V}=\rho g \tag{1.1.4}$$

液体的密度和容重随温度和压强而变化，但这种变化很小，所以在工程应用中常把水的密度和容重视为常数，采用一个标准大气压、温度为4℃时的蒸馏水密度和容重来计算，此时 ρ 为 1000kg/m^3，γ 为 9800N/m^3。

空气及几种常见液体的容重值见表 1.1.1。

表 1.1.1　　空气及几种常见液体的重度

名　称	空　气	水　银	汽　油	酒　精	四氯化碳	海　水
t（℃）	20	0	15	15	20	15
γ（kN/m^3）	0.01182	133.28	6.664～7.35	7.7783	15.6	9.996～10.084

每一个物理量都包含有量的数值及量的种类，量的种类习惯上称为量纲。每个物理量只有一个量纲，一般用 $[F]$、$[M]$、$[L]$、$[T]$ 表示力、质量、长度、时间的量纲。因此，密度的量纲为 $[M/L^3]$，容重的量纲为 $[F/L^3]$。

1.1.1.2　黏滞性

当液体处在运动状态时，若液体质点之间存在着相对运动，则质点间要产生内摩擦力抵抗其相对运动，这种性质称为液体的黏滞性，此内摩擦力称为黏滞力。黏滞性是液体固有的属性，由于它的存在，液体在流动过程中，为了克服内摩擦力必然要做功并消耗液体内部的机械能，所以黏滞性是造成液体在流动过程中能量损失的根源之一。

1686 年 Newton 提出了内摩阻力定律。其主要内容为：内摩阻力 F 的大小和液体性质有关，并与速度梯度 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n}$ 和接触面积 A 成正比，而与接触面上压力无关，可用下式表示：

$$F=\eta A\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n} \tag{1.1.5}$$

式中：v 为液体的流速；n 为与流速方向垂直的法线方向。单位面积上的内摩阻力称为切应力，有：

$$\tau=\frac{F}{A}=\eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n} \tag{1.1.6}$$

式（1.1.5）和式（1.1.6）中的比例系数 η 称为动力黏滞系数，它和液体的种类有关。η 愈大，流体愈难流动。动力黏滞系数的量纲为 $[ML^{-1}T^{-1}]$。

液体黏滞性的大小，也可用运动黏滞系数 υ 来表示：

$$\upsilon=\frac{\eta}{\rho} \tag{1.1.7}$$

式中：υ 的量纲是 $[L^2T^{-1}]$，cm^2/s 或 m^2/s。水的黏滞系数随温度的增加而减小。

对于同一种液体，η 或 υ 值均随温度和压力而变化，但随压力变化甚微，对温度变化较为敏感。对于水，υ 可按下列经验公式计算：

$$\upsilon=\frac{0.01775}{1+0.0337t+0.000221t^2} \tag{1.1.8}$$

式中：t 为水温，℃计；υ 以 cm^2/s 计。

不是所有的液体都适用牛顿内摩阻力定律。在习惯上，把符合牛顿内摩擦定律的流体称为牛顿流体，否则为非牛顿流体。一些多分子结构液体，如水、酒精、苯、油类、水银和气体等都属于牛顿流体；而泥浆、血浆、牛奶、尼龙和橡胶的溶液、颜料、油漆以及生面团、淀粉糊等均属非牛顿流体。

最后说明一点，黏滞性只对于运动的液体才有意义。当液体静止或平衡时，黏滞性是不显示作用的。如果运动的液体黏性较小，运动的相对速度也不大，我们可以近似地把液体看成是无黏性的，对切向变形没有任何抗拒能力，这样的液体称为理想液体。因此，在研究中就把液体分成无黏性的理想液体和有黏性的黏滞液体（实际液体）两大类。理想液体只是一种近似模型，真正的理想液体在实际中是不存在的。

1.1.1.3　压缩性

液体不能承受拉力，但可以承受压力。液体受压缩后体积缩小、密度增加，同时液体内部会产生压应力以抵抗压缩变形，这种性质称为液体的压缩性；当液体承受压力后，体积要缩小，压力撤出后也能恢复原状，这种性质称为液体的弹性。液体的压缩性大小用体积压缩系数或弹性系数表示。

体积压缩系数表示为：

$$\beta=-\frac{\frac{dV}{V}}{dp} \tag{1.1.9}$$

式中：β为体积压缩系数，β值越大，液体压缩性越大；“－”号表示压强增大，体积缩小，体积增量 dV 与压强增量 dp 符号相反，为了保证β是一个正数，前面冠以“－”号。

液体被压缩时，质量并没有改变，故：

$$dm=\rho dV+Vd\rho=0 \tag{1.1.10}$$

$$\frac{dV}{V}+\frac{d\rho}{\rho}=0 \tag{1.1.11}$$

故体积压缩系数可表示为：

$$\beta=\frac{d\rho}{\rho dp} \tag{1.1.12}$$

式中：β的单位为 cm^2/N 或 m^2/N。

体积弹性系数是体积压缩系数的倒数，即：

$$E=\frac{1}{\beta} \tag{1.1.13}$$

式中：E 的单位为 Pa 或 kPa。E 越大，液体越不容易压缩，$E\to\infty$ 表示液体绝对不可压缩。

液体按压缩性可分为不可压缩液体和可压缩液体两大类。不可压缩液体只是真实液体的一种近似模型。

在通常温度和压力下，水的体积弹性系数可近似地采用 $2.0\times10^6\,kN/m^2$，也就是说每增加一个大气压，水的体积相对缩小只有 1/20000。因此，除一些特殊的水力现象外（如水击、水中爆炸等），在绝大多数的实际工程中，均可把水视为不可压缩液体。

特殊问题必须考虑液体压缩性，例如，电站出现事故，突然关闭电站进水阀门，则

进水管中压力突然升高，液体受到压缩，产生的弹性力对运动的影响不能忽视。

1.1.1.4 表面张力

液体自由表面上的每个质点，因为邻近质点分子引力的作用，被拉向液体的内部。液体的自由表面好像一张绷紧的薄膜，沿表面的切线方向有拉力产生，这种拉力称为表面张力。表面张力是液体的特有性质，表面张力不仅在液体与气体接触面上产生，而且液体与固体、液体与液体间接触面上也产生。但表面张力仅在液体表面存在，液体内部并不存在，所以它是一种局部的受力现象。

表面张力常用表面张力系数 σ 来度量。表面张力系数是指在自由面上单位长度的表面张力，单位为 N/m。不同液体的 σ 值是不同的，同一种液体则随温度的升高而减少。由于数值不大，一般在水利工程中常被忽略。但在研究非饱和带的水分运动时，表面张力则是一个重要因素。

水的温度对它的密度、黏滞系数、体积弹性系数、体积压缩系数和表面张力系数均有影响，详见表 1.1.2。

表 1.1.2 不同温度下纯水的物理特征

t (℃)	ρ (kg/m^3)	$\eta\times10^{-3}$ (Pa·s)	$\upsilon\times10^{-6}$ (m^2/s)	σ (N/m)	$E\times10^6$ (kPa)
0	999.9	1.781	1.785	0.0756	2.02
4	1000.0	1.567	1.567	0.075	2.05
10	999.7	1.307	1.306	0.0742	2.1
15	999.1	1.139	1.139	0.0735	2.15
20	998.2	1.002	1.003	0.0728	2.18
25	997.0	0.890	0.893	0.0720	2.22
30	995.7	0.798	0.800	0.0712	2.25
40	992.2	0.653	0.658	0.0696	2.28
50	988.0	0.547	0.553	0.0679	2.29
60	983.2	0.466	0.474	0.0662	2.28
70	977.8	0.404	0.413	0.0644	2.25
80	971.8	0.354	0.364	0.0626	2.20
90	965.3	0.315	0.326	0.0608	2.14
100	958.4	0.282	0.294	0.0589	2.07

注 t—水温；ρ—密度；η—动力黏滞系数；υ—运动黏滞系数；σ—表面张力；E—体积弹性系数。

1.1.2 连续介质的假设和理想液体的概念

1.1.2.1 连续介质的假设

在水力学中，假设液体是连续介质。实际上液体是由大量分子所组成，分子间是不连续的，分子间空隙的尺度远大于分子本身。每个分子无休止地做不规则的运动，相互之间经常碰撞，交换着动量和能量。因此，从微观上看，无论在空间上或时间上液体都呈现出不均匀性、离散性和随机性。在标准状态下，1cm^{3}体积的水中约含有 3.3×10^{22} 个

水分子，相邻分子间距约为 3.1×10^{-8} cm。可见，分子间的距离相当微小，而在很小的体积中，包含了大量的分子。在一般工程问题中所研究的液体空间比分子尺寸远大得多，而且要解决的工程问题是液体大量分子微观运动的物理量统计平均的结果，即宏观特性。但在宏观上，在人们的肉眼和仪器测量所及的范围内，液体却显示出均匀性、连续性和确定性。这是因为个别分子的行为不影响大量分子统计平均后所得的宏观物理量。水力学不关心各个分子的微观运动，只研究大量分子的集合——分子团所显示的特征，因而可以采用连续介质的假设。

连续介质假设：真实液体所占据的空间可近似看作是由“液体质点”连续地、无空隙地充满着。在每一个空间点每个时刻都有确定的物理量（如密度、速度等），它们都是空间坐标和时间的连续函数。

连续介质模型是根据科学的研究目的而提出的，它是对液体的物质结构的一种简化，与人们的感观相一致，这个概念的引入也是非常自然的。实践证明，在连续介质这一假说的条件下得到的结论具有足够的精度，完全能够满足工程实际的要求。今后对于水力学问题的研究，一般都是建立在连续介质假说的基础之上的。只有某些特殊的水力学问题除外，例如掺气水流、空化空穴现象等，因为液体的连续性遭到破坏，所以连续介质模型不再适用。

1.1.2.2 理想液体的概念

实际液体除具有惯性、万有引力特性之外，还存在着黏滞性、可压缩性和表面张力，这些特性均会对液体运动产生不同程度的影响。而对大多数实际工程，考虑液体的黏滞性后，将使液体运动的理论分析变得十分复杂，因此为使分析简化，在水力学中引入了理想液体的概念，即假定水是不可压缩、没有黏滞性、没有表面张力的连续介质。

由前面讨论已知，实际液体的压缩性和膨胀性很小，表面张力也很小，与理论液体没有很大差别，因而有没有考虑黏滞性是理想液体和实际液体的最主要差别。所以，按照理想液体所得出的液体运动结论，应用到实际液体时，必须通过实验对没有考虑黏性所引起的偏差进行修正。这也是水力学研究的基本方法。

1.1.3 作用于液体上的力

研究液体的运动，应首先研究作用于液体上的力。从力的物理性质来看，有重力、惯性力、黏滞力、弹性力、摩擦力、表面张力等；按力的作用特点分，有表面力和质量力两大类。

1.1.3.1 质量力

质量力是指作用于液体每一部分质量上，其大小和液体的质量成正比的力。例如，重力、惯性力等。在均质液体中，质量和体积是成正比的，所以，质量力又称为体积力。质量力除用总作用力表示外，也常用单位质量力度量。单位质量力是指作用在单位质量液体上的质量力。若一质量为 m 的均质液体，作用于其上的总质量力为 $\vec{F}$，则单位质量力 $\vec{f}$ 为：

$$\vec{f}=\frac{\vec{F}}{m} \tag{1.1.14}$$

设 $\vec{F}$ 在 3 个坐标轴方向的分力为 F_x、F_y、F_z，则有：

$$\vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k} \tag{1.1.15}$$

各项除以 m：

$$\frac{\vec{F}}{m}=\frac{F_x}{m}\vec{i}+\frac{F_y}{m}\vec{j}+\frac{F_z}{m}\vec{k} \tag{1.1.16}$$

则有：

$$\vec{f}=f_x\vec{i}+f_y\vec{j}+f_z\vec{k} \tag{1.1.17}$$

式中：f_x、f_y、f_z 分别为单位质量力在 3 个坐标轴上的分量。

单位质量力的单位与加速度相同，对于只有重力作用的液体，单位质量力在各坐标轴上的分力为：$f_x=f_y=0$，$f_z=-g$。

1.1.3.2 表面力

表面力是作用在液体表面上的力。它的大小与受力的表面面积成正比，故也称面积力。它与液体本身的质量无关。这类力有液体的压力、运动液体的内摩阻力、固体对液体的摩擦力和压力等。

一般，作用于液体某一面积上的表面力与该面的法线有一夹角，故可分解为与受力面相切的切向分力和与受力面垂直的法向分力两种。沿液体表面内法线方向的分力为压力。

根据液体的连续介质假说，无论是压应力还是切应力，都是连续分布在液体的表面上，即都为连续可微函数。设液体的受力面积为 ΔA，所受的压力为 ΔP、切力为 ΔT，则其压应力 p 和切应力 τ 可用下式表示：

$$p=\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta P}{\Delta A}=\frac{dP}{dA} \tag{1.1.18}$$

$$\tau=\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta T}{\Delta A}=\frac{dT}{dA} \tag{1.1.19}$$

式中：压应力和切应力的单位均为 N/m^2 或 kN/m^2，N/m^2 亦称帕斯卡，简称帕（Pa），kN/m^2 简称 kPa。

1.2 水静力学理论基础

水静力学的任务是研究液体平衡的规律及其实际应用。

液体的平衡状态有两种：一种是相对于地球没有运动的静止状态；一种是相对静止状态，即液体对于容器没有相对运动。处于相对静止或相对平衡的液体，可以整体相对于地球有运动，如沿直线作等加速运动或等角速旋转运动容器内的液体。

处于平衡状态的液体，其黏滞性不起作用，切向力等于零，实际液体和理想液体没有区别。所以，水静力学中所得出的结论，无论对实际液体还是理想液体都是适用的。

1.2.1 静水压强及其特性

1.2.1.1 静水压强的概念

静止液体作用在每单位受压面积上的压力称为静水压强。在静止液体中任取一脱离

体（图 1.2.1），设脱离体表面有一微小面积 ΔA，作用在该微小面积上 ΔA 上的水压力为 ΔP，则 ΔA 面上单位面积所受的平均静水压力为：

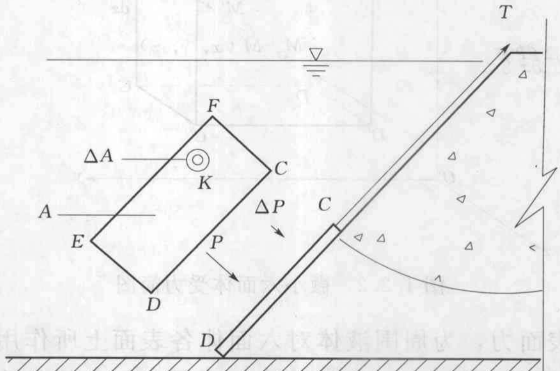


图 1.2.1 静水压强图示

$$\bar{P}=\frac{\Delta P}{\Delta A} \tag{1.2.1}$$

根据极限的定义，当 ΔA 无限缩小趋于 K 点时，K 点的静水压强为：

$$p=\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta P}{\Delta A}=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}A} \tag{1.2.2}$$

静水压强即为压应力，其单位与压应力或切应力的单位相同。在水力学中规定，压强取正值。压强 p 的单位为帕斯卡（Pa）。

1.2.1.2 静水压强的特征

静水压强有两个特性：

(1) 静水压强的方向是垂直压向作用面的，即它的方向和内法线的方向一致。

液体在切应力作用下会产生变形，从而引起液体质点间的相对运动，破坏液体的平衡。因此液体处于平衡状态时，切应力等于零。考虑到液体也不能承受拉力，所以静水压强只能垂直并指向其作用面。

(2) 任一点处的静水压强的大小与受力面的方向无关，即该点处各个方向上的静水压强值的大小都相等。

该特性表明，作为连续介质的平衡液体内，任一点的静水压强仅是空间坐标的函数有关，而与受压面方向无关，即有

$$p=p(x,\ y,\ z) \tag{1.2.3}$$

1.2.2 液体平衡微分方程及其积分

1.2.2.1 液体平衡微分方程

液体平衡微分方程式，是表征液体处于平衡状态时作用于液体上各种力之间的关系式。

设想在平衡液体中分割出一块微小平行六面体 $ABCDA'B'C'D'$（图 1.2.2），其边长分别为 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}z$，形心点在 $M(x,\ y,\ z)$，该六面体应在所有表面力和质量力的作用下处于平衡。现分别讨论其所受的力。

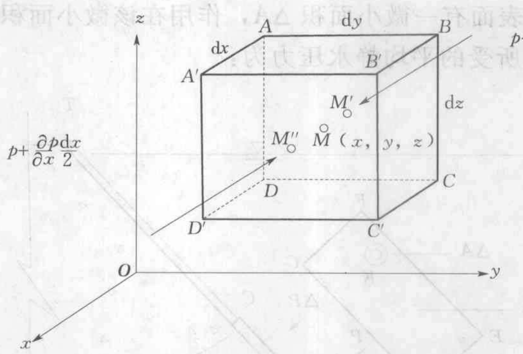


图 1.2.2　微小六面体受力简图

作用于六面体的表面力，为周围液体对六面体各表面上所作用的静水压力。若平行六面体的形心点 M 处静水压强为 p，由于静水压强是空间坐标的连续函数，$ABCD$ 面形心点 $M'\left(x-\frac{\mathrm{d}x}{2}, y, z\right)$处的静水压强可按泰勒级数表示，忽略高阶微量后为$\left(p-\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{2}\right)$；对 $A'B'C'D'$ 面形心点 $M''\left(x+\frac{\mathrm{d}x}{2}, y, z\right)$处的静水压强可表达为$\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{2}\right)$。在微分面上可认为各点静水压强相等，因而作用在 $ABCD$ 及 $A'B'C'D'$ 面上的静水压力各为$\left(p-\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 及$\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$。对其他各表面上的静水压力可用同样方法求得。

令 f_x，f_y，f_z分别表示作用于微分六面体上单位质量力在 x，y，z 轴上的投影，若六面体内的液体平均密度为 ρ，则总质量力在 3 个坐标轴的投影分别为 $\rho f_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$\rho f_y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$\rho f_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$。

当六面体处于平衡状态时，所有作用于六面体上的力，在三个坐标轴方向投影的和应等于零。在 x 方向有：

$$\left(p-\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\rho f_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0 \tag{1.2.4}$$

以 $\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 除式（1.2.4）各项并化简后为：

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\rho f_x \tag{1.2.5}$$

同理，对于 y，z 方向可推出类似结果，从而得到微分方程组：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x}&=\rho f_x\\ \frac{\partial p}{\partial y}&=\rho f_y\\ \frac{\partial p}{\partial z}&=\rho f_z\end{aligned}\right\} \tag{1.2.6}$$

式（1.2.6）是瑞士学者欧拉（Euler）于 1775 年首先推导出来的，故又称欧拉平衡微分方程式。该式的物理意义为：平衡液体中，静水压强沿某一方向的变化率与该方向

单位体积上的质量力相等。

液体平衡微分方程的积分是将式（1.2.6）中各式乘以 dx，dy，dz 然后相加得：

$$\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz=\rho(f_x dx+f_y dy+f_z dz) \tag{1.2.7}$$

因为 $p=p(x, y, z)$，故上式左端为函数 p 的全微分 dp。于是式（1.2.7）可写作：

$$dp=\rho(f_x dx+f_y dy+f_z dz) \tag{1.2.8}$$

式（1.2.8）是不可压缩均质液体平衡微分方程式的另一种表达形式。

下面我们根据液体平衡微分方程式来研究液体在平衡状态下作用于液体上的质量力应当具有的性质。现对式（1.2.6）中的前两式分别对 y 和 x 取偏导数：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 p}{\partial y\partial x}&=\frac{\partial(\rho f_x)}{\partial y}\\ \frac{\partial^2 p}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial(\rho f_y)}{\partial x}\end{aligned}\right\} \tag{1.2.9}$$

对不可压缩均质液体，$\rho=$常数，故上面等式可写作：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 p}{\partial y\partial x}&=\rho\frac{\partial f_x}{\partial y}\\ \frac{\partial^2 p}{\partial x\partial y}&=\rho\frac{\partial f_y}{\partial x}\end{aligned}\right\} \tag{1.2.10}$$

因函数的二次偏导数与取导的先后次序无关，故：

$$\frac{\partial f_x}{\partial y}=\frac{\partial f_y}{\partial x} \tag{1.2.11}$$

同理，对式（1.2.6）中的第 2、3 式及第 1、2 式分别作类似的数学处理，并综合其结果为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f_x}{\partial y}&=\frac{\partial f_y}{\partial x}\\ \frac{\partial f_y}{\partial z}&=\frac{\partial f_z}{\partial y}\\ \frac{\partial f_z}{\partial x}&=\frac{\partial f_x}{\partial z}\end{aligned}\right\} \tag{1.2.12}$$

上式表明，作用于平衡液体上的质量力应满足式（1.2.12）的关系。由理论力学知，当质量力满足式（1.2.12）时，必然存在一个仅与坐标有关的势函数 $\varphi(x, y, z)$，并且函数 φ 对 x，y，z 的偏导数等于单位质量力在 x，y，z 坐标方向的投影，即：

$$\left.\begin{aligned}f_x&=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\\ f_y&=\frac{\partial\varphi}{\partial y}\\ f_z&=\frac{\partial\varphi}{\partial z}\end{aligned}\right\} \tag{1.2.13}$$

而势函数的全微分 $d\varphi$，应等于单位质量力在空间移动 ds 距离所作的功，即：

$$d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz$$

$$=(f_x dx+f_y dy+f_z dz) \tag{1.2.14}$$

具有式（1.2.14）关系的力则称为有势力（或保守力），有势力所作的功与路径无关，而只与起点及终点的坐标有关。重力、惯性力都属于有势力。势函数存在的场称为势场。

上述讨论表明：作用在液体上的质量力必须是有势力，液体才能保持平衡。

比较式（1.2.8）及式（1.2.14），可得出液体平衡微分方程式的另一种表达式：

$$dp=\rho\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial \varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial \varphi}{\partial z}dz\right) \tag{1.2.15}$$

或：

$$dp=\rho d\varphi \tag{1.2.16}$$

对式（1.2.16）积分可得：

$$p=\rho\varphi+C \tag{1.2.17}$$

式（1.2.17）中积分常数C，可由已知条件确定。如果已知平衡液体边界上（或液体内）某点的压强为p_0、φ_0，则积分常数$C=p_0-\rho\varphi_0$。代入式（1.2.17）变为：

$$p=p_0+\rho(\varphi-\varphi_0) \tag{1.2.18}$$

前面已经提到，势函数φ仅为空间坐标的函数，所以，$(\varphi-\varphi_0)$也仅是空间坐标的函数而与p_0无关。故由式（1.2.18）可得出结论：平衡液体中，边界上的压强p_0将等值地传递到液体内的所有点上；即当p_0增大或减小时，液体内任意点的压强也相应地增大或减小同样数值。这就是物理学中著名的巴斯加原理。

1.2.2.2　等压面

液体静水压强p是空间点坐标(x,y,z)的连续函数。在充满平衡液体的空间里，各点的静水压强都有一定的数值。静止液体中凡压强相等的各点连接起来组成的面（平面或曲面）称为等压面。

等压面具有两个重要的性质：

（1）在平衡液体中等压面即是等势面。根据等压面的定义可知，在等压面上p是常数，因而$dp=0$。由于液体的密度$\rho\neq 0$，于是从式（1.2.8）可得等压面的微分方程为：

$$f_x dx+f_y dy+f_z dz=0 \tag{1.2.19}$$

在静止液体的自由表面上各点的压强均为101325Pa（一个大气压），故$dp=0$，自由表面为等压面。因为等压面上$dp=0$，故有$d\varphi=0$，所以平衡液体中等压面也就是等势面。

（2）等压面与质量力正交。式（1.2.15）中，dx、dy、dz表示等压面上任意微小位移ds沿3个坐标轴的分量，f_x，f_y，f_z表示单位质量力f沿坐标轴的3个分量。故式（1.2.19）可改写成：

$$f\cdot ds=0 \tag{1.2.20}$$

由场论可知，二矢量的数量积为零，表示两矢量正交（垂直），而ds是沿等压面任意选取的，故表明等压面与质量力正交。由此可知，作用于静止液体上任一点的质量力必须垂直于通过该点的等压面。这就是等压面的重要性质。