



普通高校“十二五”规划教材

稀薄气体 动力学计算

王保国 刘淑艳◎著

0354
19



北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

013066296

0345

19



普通高校“十二五”规划教材

稀薄气体动力学计算

王保国 刘淑艳 著



航空宇航工程类
飞行器设计专业
教材
王保国 刘淑艳 著
吴文金 孙毓升 审

北京航空航天大学出版社



北航

C1673811

0354
19

内 容 简 介

在 40 多年从事 CFD 计算与最近 10 多年从事国外 18 种著名航天器、242 个工况计算的基础上,本着少而精、重实用的基本原则,本书系统介绍了稀薄气体动力学的基本理论、基本方程和基本方法,特别讲述了高超声速再入飞行时稀薄气体 DSMC 的数值算法。

本书是一部从基础到前沿、关于稀薄气体输运理论与数值计算方面的学术专著,是一部研究与计算在地球大气层以及火星大气层中作高超声速稀薄流动问题的学术专著,在国内外并不多见。从这个意义上讲,这本书的出版,填补了稀薄流动问题的缺憾。

书中以简明扼要的论述使读者对稀薄气体动力学的计算全貌与前沿课题均有所了解。可供高等院校和科研单位从事流体力学和航空航天专业的研究生和科研人员参考,也可作为从事航天飞行器热防护以及星际航行时气动力辅助变轨控制领域研究人员的参考书和工具书。

图书在版编目(CIP)数据

稀薄气体动力学计算 / 王保国,刘淑艳著. --北京:北京航空航天大学出版社,2013.7

ISBN 978-7-5124-1166-1

I. ①稀… II. ①王…②刘… III. ①稀薄气体动力学—计算方法 IV. ①O354

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 139392 号

版权所有,侵权必究。

稀薄气体动力学计算

王保国 刘淑艳 著

责任编辑 金友泉

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(邮编 100191) <http://www.buaapress.com.cn>

发行部电话:(010)82317024 传真:(010)82328026

读者信箱: bhpess@263.net 邮购电话:(010)82316936

涿州市新华印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本:710×1 000 1/16 印张:9.5 字数:202 千字

2013 年 7 月第 1 版 2013 年 7 月第 1 次印刷 印数:2 500 册

ISBN 978-7-5124-1166-1 定价:30.00 元

若本书有倒页、脱页、缺页等印装质量问题,请与本社发行部联系调换。联系电话:(010)82317024

前 言

随着近代物理、空间科学以及航空航天事业的飞速发展,人类进入了一个探索宇宙奥秘的年代。近 50 年来,随着各类航空航天器(科学卫星、宇宙飞船、各种探测器以及航天飞机等)的发射升空、大型国际空间站的建立以及各类太空观测台(Hubble 空间望远镜、Chandra X 射线观测台等)的观察,人类对太阳系、银河系以及广袤的宇宙有了更深刻的认识,对著名理论物理学家和天体物理学家 A. S. Eddington 所提出的“我们现在的宇宙是一个无边、正在膨胀”的论断获得了更加丰富的观测结果和数据。

航天器在高空飞行、机动和制动,离不开空气动力学和稀薄气体动力学的理论支撑。当密度降低到气体分子的平均自由程与飞行器的特征尺度相比不为小量时,通常的空气动力学方法不再适用,而这时稀薄气体动力学便显得十分重要,本书正是阐述这种方法。

全书共分 4 章:前两章为基本理论、基本方程和基本方法,后两章是具体计算方法并给出大量的典型算例。

本书以我们团队近 10 多年来所完成的国外 18 种著名航天器再入飞行时 242 个典型工况为背景,突出高超声速飞行时 DSMC 的数值计算和突出再入飞行中各工况点下三维流场计算时选用计算模型的重要性。面对十分丰富的计算算例与素材,少而精、重实用始终是全书坚持的基本原则。

本书第一作者王保国,曾在中国科学院工作 16 年并两次获中国科学院科技进步奖以及国家劳动人事部首届全国优秀博士后奖,先后在清华大学力学系和北京理工大学宇航学院任教授、博士生导师、流体力学学科带头人并两次获清华大学教学优秀奖,发表学术论文 200 余篇,以第一作者出版学术专著与教材 12 部。另外,1998 年获英国剑桥 Gold Star Award,2000 年获美国 Barons Who's Who 颁发的 New Century Global 500 Award,2007 年获“北京市教学名师”荣誉称号。

第二作者刘淑艳,北京理工大学教授,曾先后赴美国、德国和法国做高级访问学者并进行流体力学、空气动力学研究。自 1978 年至今一直担任《流体力学》、《空气动力学》等课程的教学工作并指导硕士与博士生多名;1994 年获国家级科技发明奖、为主要获奖人之一。该作者发表论文 90 余篇、出版学术专著和教材 6 部。

感谢卞荫贵先生生前对我们团队的关心与厚爱,感谢陈懋章院士、童秉纲院士和陶文铨院士对我们航天航空领域中进行探索所给予的大力支持与帮助。在此,还向书中参考文献里所列出的作者们与同仁们表示感谢。

此外,本书在出版期间得到了北京航空航天大学出版社编辑金友泉先生及同仁的大力支持,正是他们的敬业精神才使得本书得以如期出版,我们表示衷心的感谢。

由于本书涉及面广,而我们的水平有限,书中可能会有欠妥之处,敬请广大读者及专家批评和指正。还可通过 Email: crgame@sina.cn 与我们联系,共同探讨。

作 者

2012 年 10 月 18 日

目 录

第 1 章 气体动理学理论基础及其非平衡统计力学中的三种描述	1
1.1 微观层次的描述及其 Liouville 方程	2
1.2 动理学层次的描述以及 BBGKY 方程链	3
1.3 单粒子分布函数及其输运方程	4
1.4 中子与光子的输运方程	7
1.5 高能带电粒子以及电离气体、等离子体中的输运方程	9
1.6 流体力学层次的描述及其流体力学方程组的导出	12
1.7 考虑系统粒子之间反应的输运方程	16
1.7.1 关于 $\left(\frac{\partial_r f_i}{\partial t}\right)_1$ 的表达式	18
1.7.2 关于 $\left(\frac{\partial_r f_i}{\partial t}\right)_2$ 的表达式	18
1.7.3 关于 $\left(\frac{\partial_r f_i}{\partial t}\right)_3$ 的表达式	20
1.7.4 考虑粒子间多体反应时输运方程右端项的一般表达式	21
1.7.5 反应系统的化学动力学方程	21
第 2 章 稀薄气体动力学的基本方程及逐次逼近解法	23
2.1 Liouville 方程与 Boltzmann 方程间的关系和区别	23
2.2 Boltzmann 方程的守恒性质及其宏观守恒方程	26
2.3 单原子分子、多组元气体的 Boltzmann 方程	30
2.3.1 单组元、单原子分子的 Boltzmann 方程	30
2.3.2 多组元、单原子分子气体的 Boltzmann 方程	31
2.4 单组元、多原子分子、考虑分子内部量子数及简并度的 Boltzmann 方程	32
2.5 多组元、多原子分子的广义 Boltzmann 方程	34
2.6 Boltzmann 方程的 Chapman - Enskog 逐级逼近解法	35
2.6.1 Boltzmann 方程的无量纲化以及量级分析	36
2.6.2 Chapman - Enskog 的逐级逼近解法	37
2.6.3 分布函数的零级近似解	41
2.6.4 分布函数的一级近似解	42
2.6.5 分布函数的二级近似解	43
2.7 BGK 模型方程	45

2.7.1	碰撞模型应具备的主要性质	45
2.7.2	BGK 方程及其基本性质	46
2.7.3	BGK 方程的局限性	48
2.8	求解过渡区 Boltzmann 方程几种方法的概述	49
2.8.1	Grad 的 13 矩方法	49
2.8.2	求解 Boltzmann 方程的 Monte Carlo 有限差分方法	50
2.8.3	广义 Boltzmann 方程的有限差分 Monte Carlo 方法	50
2.9	格子 Boltzmann 模型及其发展	51
2.9.1	LGA 模型及其发展	51
2.9.2	LBE 模型及其主要发展概述	52
第 3 章	DSMC 算法及其典型算例分析	54
3.1	非结构网格下模拟分子的追踪办法	54
3.2	热力学碰撞传能与化学反应的几种类型	56
3.3	三维 DSMC 算法以及源程序的总框图	60
3.4	Ballute 减速装置再入地球大气层的飞行问题	63
3.5	Ballute 减速装置进入火星大气层的飞行问题	73
3.6	Apollo 再入地球大气层的三维绕流计算与分析	80
3.7	Orion 再入地球大气层的三维绕流计算与分析	90
3.8	Mars Pathfinder 进入火星大气层的三维绕流计算与分析	100
3.9	Mars Microprobe 进入火星大气层的三维绕流计算与分析	106
第 4 章	小 Knudsen 数特征区及其在再入飞行计算中的应用	121
4.1	再入飞行中计算高超声速绕流的两类物理模型及其源程序	121
4.1.1	广义 Navier-Stokes 模型及其源程序	122
4.1.2	DSMC 的基本算法以及源程序总框图	124
4.2	选用广义 N-S 模型计算特征区内 RAM-C II 算例	125
4.3	选用广义 N-S 模型计算特征区内 OREX 算例	130
4.4	选用广义 N-S 模型计算特征区内 Orion 算例	133
4.5	选用 DSMC 模型计算特征区内 RAM-C II 算例	134
4.6	选用 DSMC 模型计算特征区内 OREX 算例	136
4.7	选用 DSMC 模型计算特征区内 Orion 算例	137
4.8	小 Knudsen 数特征区及其初步分析	137
参考文献		141

第1章 气体动理学理论基础及其非平衡统计力学中的三种描述

流体的宏观运动状态本质上是由流体分子的微观运动状态所决定的,只有从微观这一更深的层次上观察问题才能进一步看清问题的本质。本章将从分子的微观现象出发,阐述气体的输运过程,这不仅是研究稀薄气体动力学的重要基础,更重要的是借助于 N. N. Bogoliubov 提出的三个时间标度的思想,更容易理解在非平衡态统计物理中存在的三种不同层次的描述,即微观力学层次的描述、动理学(kinetics)层次的描述以及流体动力学层次的描述^[1-3]。

现代物理从研究的领域上看,涉及宇观天体、宏观物理和凝聚态,以至微观的基本粒子以下的亚微观层次;从研究的物质质量来看,涉及重到 10^{70} g 的总星系,轻到 10^{-27} g 的夸克;从研究的广度看,涉及大到 10^{26} cm,小到 10^{-16} cm 的尺度;从研究相互作用间的关系来看,既研究作用半径大到无穷大的引力相互作用,又研究小到 10^{-13} cm 以下的强相互作用,以及介于它们之间的电磁相互作用和弱相互作用;另外,还研究这几种相互作用的统一问题,即统一场论。以电磁相互作用、弱相互作用、强相互作用为例,它们涉及量子电动力学、量子味动力学(即味荷与中间玻色子的相互作用)和量子色动力学(即色荷与胶子间的相互作用)。借助于数学上的群论可以证明,这三种理论之间在性质上具有类似性,仅在由群论所描述的内在对称性上有所差别。所谓大统一理论主要包括对电磁相互作用、弱相互作用和强相互作用的统一描述,把大统一再向前推进一步的统一是超统一,这种统一理论已把引力场包括在内。现阶段,超统一理论仍处在探索中。

这里必须指出的是,在从宏观走向微观的过程中,出现了介于宏观与微观之间的介观世界,它研究的是指其尺度小于或等于其中波的相位相干长度,因而出现量子相干现象的系统。相干长度的物理意义是载流子产生非相干弹性散射的平均自由程。目前,介观世界主要包括纳米材料、团簇材料和量子阱材料等新型功能材料,它们都是当代物理中材料学科的重要研究对象。通常介观物理学研究的对象包含 $10^8 \sim 10^{11}$ 个原子,在固体材料的观测中有 Aharonov-Bohm 效应;另外,它们的样品一般仍属于宏观范畴,并且用宏观的手段测量研究,例如可以进行电流、电压等电学上的测量,但是测量结果却反映出电子的波动特征即量子特征,而量子特征是微观粒子的特征,说明这种体系呈现出微观物理的规律,这就是“介观”,即介于宏观与微观之间的含义。很显然,本章所研究的气体动力学以及稀薄气体动力学问题不应该笼统的认为属于介观物理学的范畴。我们认为: Bogoliubov 所给出的三个时间标度是衡量所研究的物理问题到底应该在哪个层次上进行描述的准则^[3]。

1.1 微观层次的描述及其 Liouville 方程

引入 J. W. Gibbs 系综的概念, 注意到系综分布密度函数 $\rho = \rho(\Gamma_N, t)$ 的定义, 这里用 Γ_N 表示相空间中的代表点:

$$\Gamma_N = \{q_r, p_r; r = 1, 2, \dots, 3N\} \quad (1.1.1)$$

代表点的运动轨迹由运动方程

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r}, \dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r}, r = 1, 2, \dots, 3N \quad (1.1.2)$$

这里 H 为经典系统的 Hamilton 量。引入 Poisson 括号的概念 $\{*, *\}$, 于是 Liouville 方程可表示为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \{H, \rho\} \quad (1.1.3a)$$

或者

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (1.1.3b)$$

令量子力学系统的 Hamilton 算子为 $\hat{H}$, 其所处的微观态 $\psi(t)$ 满足 Schrödinger 方程, 即

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t) = \hat{H} \psi(t) \quad (1.1.4)$$

式中: $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, h 为 Planck 常数; 引入密度算子 (或称密度矩阵) $\hat{\rho}(t)$, 它是 Hermite 算符; 定义量子 Poisson 括号为

$$\{\hat{H}, \hat{\rho}\} = \frac{1}{i\hbar} (\hat{H}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{H}) \quad (1.1.5)$$

于是量子力学中的 Liouville 方程为

$$\frac{\partial \hat{\rho}(t)}{\partial t} = \{\hat{H}, \hat{\rho}\} \quad (1.1.6)$$

显然, 它与 (1.1.3a) 式类似。另外, 在量子统计力学中, 引入熵算符 $\hat{\eta}$ 为

$$\hat{\eta} = -\ln \hat{\rho} \quad (1.1.7)$$

熵算符的平均值 $\langle \hat{\eta} \rangle$ 为经典统计力学熵的 Gibbs 定义, 即

$$s = \langle \hat{\eta} \rangle = -\langle \ln \hat{\rho} \rangle = -\text{tr}(\rho \ln \rho) \quad (1.1.8)$$

引入粗粒化统计算符 $\tilde{\rho}$ 去代替 ρ 本身, 则用 $\tilde{\rho}$ 所定义的熵 s_t 便能够给出与热力学第二定律一致的结果, 即满足热力学中孤立体系熵增加的概念, 也就是说

$$s_t > s_0 \quad (1.1.9)$$

熵 s_t 增加。这里 s_t 定义为

$$s_t = -\text{tr}[\tilde{\rho}(t) \ln \tilde{\rho}(t)] \quad (1.1.10)$$

1.2 动理学层次的描述 以及 BBGKY 方程链

这里把对于多体系统进行概率统计以及动力学分析与描述的内容称为动理学。它研究的是与过渡到平衡状态有关的过程,而统计物理学所研究的是处于统计平衡状态的系统。为了对 Bogoliubov 的标度思想有一个具体的认识,今考虑一个由稀薄气体构成的系统,例如对于标准状态(室温、常压)下处于热平衡的氦(He)气体,设在 $t=0$ 时刻给系统加上一个外界扰动,则系统马上会对这个扰动产生响应,并趋向于这个外加约束相容的宏观状态。这个响应过程的初始阶段称为瞬变阶段或称力学阶段,其时标为碰撞持续时间 $\tau_0 = r_0/\bar{v}$ (这里 r_0 为原子之间两体作用的力程,它比原子之间平均距离小得多; $\bar{v}$ 为原子的平均热速度;对于标准状态下的氦气体, $r_0 \approx 3 \text{ \AA} = 3 \times 10^{-10} \text{ m}$ (这里 $\text{\AA}$ 即 Angstrom), $\bar{v} \approx 1.2 \times 10^5 \text{ cm/s}$, $\tau_0 \approx 2.5 \times 10^{-13} \text{ s}$)。对系统力学阶段的描述,需要依赖于统计分布函数(或简称分布函数)方面的相关知识;当气体分子平均发生一到二次碰撞时,系统响应进入到第二阶段,即动理学阶段。这个阶段的时段为两次碰撞之间的自由飞行时间 $\tau_{\text{coll}} \approx 10^{-10} \text{ s}$; 当 $t \gg \tau_{\text{coll}}$ 时,每个原子都已经过多次碰撞,其间已建立了新的局部平衡,这时的阶段便称为流体力学阶段。

在 Γ 空间,其坐标为 (r^N, p^N) , 其中 r^N 代表 $(r_1, r_2, \dots, r_N)$; p^N 代表 $(p_1, p_2, \dots, p_N)$; 引入概率分布函数 $f_N(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N, t)$, 将它归一为

$$\int f_N(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N, t) d^6 \xi_1 d^6 \xi_2 \dots d^6 \xi_N = V^N \quad (1.2.1)$$

这里 V 为系统的体积, $\xi_i \equiv \{r_i, p_i\}$; 引入 S 个粒子的约化分布函数 $f_S(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_S, t)$, 它与总的 N 个粒子分布函数 $f_N(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N, t)$ 之间有如下关系

$$f_S(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_S, t) = V^{(S-N)} \int f_N(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N, t) d^6 \xi_{S+1} d^6 \xi_{S+2} \dots d^6 \xi_N \quad (1.2.2)$$

考虑全同粒子系统,对于任意选择的 S 个粒子, f_S 是 ξ_i 的对称函数。把 Liouville 方程对 $(N-S)$ 个粒子进行积分,并注意到 f_N 对 ξ_i 的对称性,得

$$\frac{\partial f_S}{\partial t} = \{H_S, f_S\} + \frac{N-S}{V} \int \sum_{i=1}^S (\nabla_{r_i} V_{i, S+1}) \cdot (\nabla_{p_i} f_{S+1}) d^6 \xi_{S+1} \quad (1.2.3)$$

式中 $\{*, *\}$ 代表 Poisson 括号; 在 (1.2.3) 式中, H_S 定义为

$$H_S = \sum_{i=1}^S \left(\frac{p_i^2}{2m} + V(r_i) \right) + \sum_{1 \leq i < j \leq S} V_{ij} \quad (1.2.4)$$

式中: $V(r_i)$ 为外势, $V_{ij} = V(r_i, r_j)$ 代表两粒子的相互作用势; 式 (1.2.3) 就是著名的 BBGKY 方程链, 它给出了 f_S 与 f_{S+1} 之间的关系, 而且在推导式 (1.2.3) 时没有做任何近似。值得注意的是, BBGKY 方程链尽管同 Liouville 方程等价, 但两者仍有很大差别。Liouville 方程是线性的封闭方程, 具有时间反演对称性, 微观熵是个守恒量,

而且它所描述的过程属于 Markoff 类型。BBGKY 方程链尽管也是线性方程,也具有时间反演对称性,但是它不封闭。也就是说,由于相互作用使 f_s 的演化方程中出现了 f_{s+1} 项。

式(1.2.3)又可写为

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \sum_{i=1}^s \left(\frac{\mathbf{p}_i}{m} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{r}_i} \right) + \sum_{i=1}^s \left(m \mathbf{X}_i \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{p}_i} \right) - \sum_{1 \leq i < j \leq s} \left(\frac{\partial V_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{p}_i} \right) = \frac{N-S}{V} \int \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial V_{i,S+1}}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial f_{S+1}}{\partial \mathbf{p}_i} \right) d^6 \xi_{S+1} \quad (1.2.5)$$

式中: $S=1, 2, \dots, N-1$; 另外 $m \mathbf{X}_i = -\frac{\partial V(\mathbf{r}_i)}{\partial \mathbf{r}_i}$, 它表示作用在 i 粒子上的外力。由式(1.2.3)式或者式(1.2.5)可知, 为了确定一个粒子的约化分布函数 f_1 , 将会涉及约化分布函数的整个集合 $f_1, f_2, \dots, f_N$; 而 N 是很大的一个数, 为解 f_1 需要解许多个方程, 因此求解 BBGKY 方程链时要作切断近似。换句话说, 为得到 f_1 的方程需要对 f_2 作某些假设(例如引入分子混沌假设)。最简单的切断近似为

$$f_2(\mathbf{r}, \mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t) = f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t) \quad (1.2.6)$$

借助于式(1.2.6), 对于 f_1 则式(1.2.3)变为

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \{H_1, f_1\} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial t} \right)_{\text{coll}} \quad (1.2.7)$$

式中

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial t} \right)_{\text{coll}} = [\nabla_r \bar{V}(\mathbf{r}, t)] \cdot [\nabla_p f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)] \quad (1.2.8)$$

这里 $\bar{V}(\mathbf{r}, t)$ 代表粒子二体作用产生的平均势。由此便可得到著名的非线性 Vlasov 方程。Vlasov 方程曾用于考虑等离子体中 Coulomb 力的长程效应, 它是等离子体研究中的基本方程之一。

1.3 单粒子分布函数及其输运方程

在许多物理问题中, 感兴趣的物理量 $A(\Gamma_N)$ 可能只与单个粒子的广义坐标 $\mathbf{q}_j$ 及动量 $\mathbf{p}_j$ 有关, 例如

$$A(\Gamma_N) = A(\mathbf{q}_j, \mathbf{p}_j) \quad 1 \leq j \leq N \quad (1.3.1)$$

或者

$$A(\Gamma_N) = \sum_{j=1}^N A(\mathbf{q}_j, \mathbf{p}_j) \quad (1.3.2)$$

对于上述这种较简单形式的物理量, 求系综平均时有可能简化手续, 例如对于(1.3.1)式, 便可有

$$\langle A(t) \rangle = \int A(\mathbf{q}_j, \mathbf{p}_j) \rho(\Gamma_N, t) d\Gamma_N = \iint [\rho(\Gamma_N, t) A(\mathbf{q}_j, \mathbf{p}_j) d\Gamma_{N-1}] d\mathbf{q}_j d\mathbf{p}_j \quad (1.3.3)$$

式中: ρ 是系综分布函数; 中括号内的 $\int \cdots d\Gamma_{N-1}$ 表示除第 j 个粒子以外对其他 $N-1$ 个粒子的广义坐标及动量进行积分, 记

$$f(\mathbf{q}_j, \mathbf{p}_j, t) = \int \rho(\Gamma_N, t) d\Gamma_{N-1} \quad (1.3.4)$$

若 $\rho(\Gamma_N, t)$ 对于 N 个粒子为对称, 则(1.3.4)式中函数 f 的形式便与 j 无关, 这时可省略 $\mathbf{q}_j$ 与 $\mathbf{p}_j$ 的下标 j , 于是有

$$\langle A(t) \rangle = \int f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) A(\mathbf{q}, \mathbf{p}) d\mathbf{q} d\mathbf{p} \quad (1.3.5)$$

这里 $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ 称为单粒子分布函数。对于(1.3.2)式, 注意到每个粒子在系统中的地位是平等的, 故有

$$\langle A(t) \rangle = \int \sum_j A(\mathbf{q}_j, \mathbf{p}_j) \rho(\Gamma_N, t) d\Gamma_N = N \int A(\mathbf{q}, \mathbf{p}) f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{q} d\mathbf{p} \quad (1.3.6)$$

在上述情况下, 可把系统相空间中的分布函数约化为单粒子分布函数来讨论系综平均。引入粒子相空间(即由 $\mathbf{q}$ 与 $\mathbf{p}$ 这六个分量作独立变量所构成的空间)的密度算子 $\hat{n}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ 和密度分布函数 $n(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, 其表达式分别为

$$\hat{n}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{q}_j(t)) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_j(t)) \quad (1.3.7)$$

$$n(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \equiv \langle \hat{n}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \rangle = N \int f(\mathbf{q}_j, \mathbf{p}_j, t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{q}_j(t)) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_j(t)) d\mathbf{q}_j d\mathbf{p}_j = N f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \quad (1.3.8)$$

并注意 $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ 是归一化的, 即

$$\int f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{p} = 1 \quad (1.3.9)$$

借助于式(1.3.8)与式(1.3.9)便有

$$\int n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{p} = N \quad (1.3.10)$$

考虑粒子相空间在 $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ 附近微小体积 $d\mathbf{r} d\mathbf{v}$ 中, 粒子数 $n d\mathbf{r} d\mathbf{v}$ 随时间的变化率, 便能得到如下形式的输运方程

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \frac{\partial n}{\partial \mathbf{v}} = \left(\frac{\partial n}{\partial t} \right)_c + \left(\frac{\partial n}{\partial t} \right)_s \quad (1.3.11)$$

式中: $n \equiv n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ 为粒子相空间的密度分布函数, 它与单粒子分布函数 $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ 间的关系为

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \frac{n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{N} \quad (1.3.12)$$

式在(1.3.11)中, $\left(\frac{\partial n}{\partial t} \right)_c$ 与 $\left(\frac{\partial n}{\partial t} \right)_s$ 分别代表碰撞项与外源项。如果碰撞是瞬间完成的, 即碰撞时间远比粒子自由飞行的时间短, 便可以定义碰撞核函数 $\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}')$, 它代表在 $\mathbf{r}$ 处一个速度为 $\mathbf{v}$ 的粒子经过单位长度路程时受到碰撞并放

出速度为 $\mathbf{v}'$ 的粒子平均数。引入总宏观截面 $\sigma_t(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, 于是借助于碰撞核函数以及总宏观截面的概念, 可得碰撞项为

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_c = \int n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) v \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}') d\mathbf{v} - v \sigma_t(\mathbf{r}, \mathbf{v}) n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (1.3.13)$$

这里右边第一项代表单位时间内由于碰撞所造成的 $\mathbf{r}$ 处速度为 $\mathbf{v}$ 的粒子数的增加, 第二项代表单位时间内由于碰撞所引起的在 $\mathbf{r}$ 处速度的模为 v 的粒子数的减少。如果外源项为

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_s = s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (1.3.14)$$

将(1.3.13)式与(1.3.14)式代入到(1.3.11)式, 得

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \frac{\partial n}{\partial \mathbf{v}} = s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) - v n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \sigma_t(\mathbf{r}, \mathbf{v}) + \int n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) v \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}') d\mathbf{v} \\ s - v n \sigma_t + \int v n \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}') d\mathbf{v} \quad (1.3.15)$$

假设没有外源项, 并记

$$\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = v n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (1.3.16)$$

这时输运方程可写为

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{v} \cdot \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \mathbf{r}} + \tilde{\varphi} \sigma_t(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \int \tilde{\varphi}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}') d\mathbf{v} \quad (1.3.17)$$

式中: $\tilde{\varphi}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ 称为角通量, 而角流密度 $\tilde{j}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ 定义为

$$\tilde{j}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = v n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (1.3.18)$$

令

$$\hat{\Omega} = \frac{\mathbf{v}}{v} \quad (1.3.19)$$

粒子相空间的密度分布函数 $n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ 还可以用 $\mathbf{r}$ 、 v 、 $\hat{\Omega}$ 与 t 表达, 如果

代表 t 时刻位置在 $\mathbf{r}$ 附近的 $d\mathbf{r}$ 内、速度在 v 附近的 dv 内、速度方向在 $\hat{\Omega}$ 附近的 $d\hat{\Omega}$ 内的粒子数期望值时, 由

$$n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) dr dv = n(\mathbf{r}, v, \hat{\Omega}, t) dr dv d\hat{\Omega} \quad (1.3.20)$$

并注意到

$$d\mathbf{v} = v^2 dv d\hat{\Omega} \quad (1.3.21)$$

于是有

$$n(\mathbf{r}, v, \hat{\Omega}, t) = v^2 n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (1.3.22)$$

令动能 E 为

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \quad (1.3.23)$$

并且用 $n(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) d\mathbf{r} dE d\hat{\Omega}$ 代表 t 时刻位置在 $\mathbf{r}$ 附近的 $d\mathbf{r}$ 内、动能在 E 附近的 dE 内、速度在 $\hat{\Omega}$ 附近的 $d\hat{\Omega}$ 内的粒子数期望值时, 则有

$$n(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) = \frac{v}{m} n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \frac{1}{mv} n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \hat{\Omega}, t) \quad (1.3.24)$$

对于角通量 $\tilde{\varphi}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ 以及角流密度 $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ 也可以作类似的自变量变换, 例如

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) = \frac{v}{m} \tilde{\varphi}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (1.3.25)$$

借助于(1.3.25)式, 则(1.3.17)变为

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} + \hat{\Omega} \cdot \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \mathbf{r}} + \tilde{\varphi}(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) \sigma_t = s + \iint \tilde{\varphi}(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) \sigma(\mathbf{r}, E \rightarrow E', \hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}') d\hat{\Omega}' dE \quad (1.3.26)$$

式中

$$\sigma_t = \sigma_t(\mathbf{r}, E) = \sigma_t(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \quad (1.3.27a)$$

$$\sigma(\mathbf{r}, E \rightarrow E', \hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}') = \frac{v}{m} \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}') \quad (1.3.27b)$$

$$s = s(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) = \frac{v}{m} s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (1.3.27c)$$

1.4 中子与光子的输运方程

中子在运动中也会受到外场力的作用, 例如中子具有质量和磁矩, 因此会受到重力场或者磁场的作用, 不过在绝大多数场合下这些外场作用都很小, 故忽略。因此, 可以用角通量 $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t)$ 作为描述中子的分布函数, 借助于(1.3.26)式可得中子的输运方程为

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} + \hat{\Omega} \cdot \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \mathbf{r}} + \tilde{\varphi} \sigma_t = s + \iint \tilde{\varphi}(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}, t) \sigma(\mathbf{r}, E \rightarrow E', \hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}') d\hat{\Omega}' dE \quad (1.4.1)$$

严格地讲, 碰撞核函数 σ 与中子的分布函数有关, 而且中子与介质的相互作用会使介质的状态受到扰动, 这时碰撞核函数也要发生相应的变化, 因此方程(1.4.1)式带有非线性方程的特征。但在通常情况下中子的数密度比介质原子核的数密度小得多, 因此可以忽略中子之间的碰撞而仅考虑中子与原子核之间的碰撞, 同时还认为介质的性质不变。这样便使得方程(1.4.1)式可以作为线性输运方程。

在天体物理中, 常引入辐射强度角分布函数 I , 即

$$I_{\nu} \equiv I_{\nu}(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) = h\nu c n(\mathbf{r}, \hat{\nu}, \hat{\Omega}, t) \quad (1.4.2)$$

这里: h 为 Planck 常数, $\hat{\nu}$ 为频率, $h\hat{\nu}$ 为光子的能量, c 为光速, n 为粒子密度分布; $n(\mathbf{r}, \hat{\nu}, \hat{\Omega}, t) d\mathbf{r} d\hat{\nu} d\hat{\Omega}$ 代表 t 时刻在 $\mathbf{r}$ 、 $\hat{\nu}$ 、 $\hat{\Omega}$ 附近 $d\mathbf{r} d\hat{\nu} d\hat{\Omega}$ 的光子数; $I_{\nu} d\hat{\Omega} d\hat{\nu}$ 代表 t 时刻单位时间内穿过垂直于 $\hat{\Omega}$ 的单位面积的频率在 $\hat{\nu}$ 附近的 $d\hat{\nu}$ 内、方向在 $\hat{\Omega}$ 附近的 $d\hat{\Omega}$ 内的辐射能量。光子服从 Bose-Einstein 统计, 光子的发射频率由自发发射概率 A_{ν} 与诱导发射概率 $A_{\nu} \frac{c^3}{2\hat{\nu}^2} n$ 两个部分构成。借助于(1.3.26)式以及(1.4.2)式, 可得以 I_{ν} 表达的光子输运方程, 即

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_{\nu}}{\partial t} + \hat{\Omega} \cdot \frac{\partial I_{\nu}}{\partial \mathbf{r}} = j_{\nu} - (k_{\nu} + N_e \sigma_s) I_{\nu} + N_e \sigma_s J_{\nu} \quad (1.4.3)$$

式中: 变量 $\mathbf{r}$ 与 t 省略未写; $k(\hat{\nu}, \hat{\nu}', \hat{\Omega}, \hat{\Omega}')$ 代表 $(\hat{\nu}, \hat{\Omega})$ 光子的经散射后变为 $(\hat{\nu}', \hat{\Omega}')$ 光子的概率, 即散射概率函数; N_e 为电子密度; N^* 为具有过剩能量 $h\hat{\nu}$ 、并能放出一个 $\hat{\nu}$ 光子的物质粒子(原子或分子)的密度; σ_s 代表电子对光子的微观散射截面; k_{ν} 为吸收系数; j_{ν} 为发射系数。在辐射输运方程中, j_{ν} 与 k_{ν} 常称作辐射参数; 如何计算 j_{ν} 和 k_{ν} 以及如何求解式(1.4.3)都是很重要的研究课题。由于 j_{ν} 与 k_{ν} 依赖于不同能级的原子或分子的数目, 而这些数目又依赖于辐射强度 I_{ν} 的分布, 因此通常方程式(1.4.3)是非线性的。符号 j_{ν} 与 J_{ν} 的含义为

$$j_{\nu} = h\hat{\nu} A_{\nu} N^* \quad (1.4.4a)$$

$$J_{\nu} = \int k(\hat{\nu}, \hat{\nu}', \hat{\Omega} \cdot \hat{\Omega}') I_{\nu}(\hat{\Omega}') d\hat{\nu}' \quad (1.4.4b)$$

当光子能量较电子的固有能量小得多时, 散射对光子的频率改变很小, 故可忽略, 于是散射概率函数变为

$$k(\hat{\nu}, \hat{\nu}', \hat{\Omega} \cdot \hat{\Omega}') = k(\hat{\Omega} \cdot \hat{\Omega}') \delta(\hat{\nu} - \hat{\nu}') \quad (1.4.5)$$

发射概率与吸收概率之间由细致平衡原理相联系, 如果物质未处于热力学平衡状态则发射与吸收间的关系只能由微观理论去求得。以下仅考虑局部热力学平衡态, 这时发射系数 j_{ν} 与吸收系数 k_{ν} 之间满足 Kirchhoff 关系, 即

$$j_{\nu} = k_{\nu} B_{\nu} \quad (1.4.6)$$

式中: B_{ν} 为黑体辐射强度, 其表达式为^{[3],[4]}

$$B_{\nu} = B_{\nu}(T) = \frac{2h\hat{\nu}^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\hat{\nu}}{k_B T}} - 1} \quad (1.4.7)$$

式中, k_B 为 Boltzmann 常数。在局部热力学平衡下(如果物质处于局部热力学平衡时, 则其状态仅由温度 T 决定), 这时辐射方程(1.4.3)式可变为

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_{\nu}}{\partial t} + \hat{\Omega} \cdot \frac{\partial I_{\nu}}{\partial \mathbf{r}} = \tilde{k}_{\nu} [-I_{\nu} + \eta_{\nu} B_{\nu} + (1 - \eta_{\nu}) J_{\nu}] \quad (1.4.8)$$

式中

$$J_v = \int I_v(\hat{\Omega}) k(\hat{\Omega} \cdot \hat{\Omega}') d\hat{\Omega} \quad (1.4.9a)$$

$$\tilde{k}_v = k_v + N_e \sigma_s, \quad \eta_v = \frac{k_v}{k_v + N_e \sigma_s} \quad (1.4.9b)$$

这里辐射输运方程(1.4.8)式是线性方程。

1.5 高能带电粒子以及电离气体、等离子体中的输运方程

这里讨论的带电粒子主要是指轻离子,如质子、 α 粒子等。这些粒子在重介质中运动时,会与重核碰撞,也会与原子中的电子碰撞。前一种碰撞,能量交换可以忽略,只会使带电粒子的运动方向发生变化;后一种碰撞,每次这种碰撞都使带电粒子的能量有微小的变化,频繁的这种碰撞所造成的能量变化可看成带电粒子所走路程 ξ 的递减函数(这里 $E=E(\xi)$, E 为带电粒子的能量)。注意到 $d\xi=vdt$,于是高能带电粒子的输运方程便可以写为

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \xi} + \hat{\Omega} \cdot \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \mathbf{r}} + \tilde{\varphi} \sigma_t = s + \int \sigma(r, \xi, \hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}') \tilde{\varphi}(r, \xi, \hat{\Omega}') d\hat{\Omega}' \quad (1.5.1)$$

式中: $\tilde{\varphi}=\tilde{\varphi}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ 为角通量,其含义同(1.3.17)式;这里假定 $dE/d\xi=\psi(\xi)$ 为已知函数。因此方程(1.5.1)式为线性方程。

令 ρ 与 $\mathbf{j}$ 分别代表电荷密度与电流密度,由Coulomb-Ampere力密度(即作用在电荷和电流上单位体积的力)公式,为

$$\tilde{\mathbf{f}} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (1.5.2a)$$

或者

$$\tilde{\mathbf{f}} = \rho \mathbf{E} + \rho \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (1.5.2b)$$

式中: $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{B}$ 分别为电场强度与磁感应强度; $\tilde{\mathbf{f}}$ 称为洛伦兹(Lorentz)力。

由(1.3.11)式,如果不考虑源项,则粒子的输运方程为

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial n}{\partial \mathbf{v}} = \left(\frac{\partial n}{\partial t} \right)_c \quad (1.5.3)$$

式中: m 与 q 分别为粒子的质量与电荷。

令 λ_D 代表Debye长度,它反映了带电粒子之间Coulomb作用力的作用半径。当 λ_D 远小于系统的尺寸时,式(1.5.3)右端碰撞项并不重要,故可省略,于是便得到Vlasov方程;另外对于方程式(1.5.3)左端的 $\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{E}$ 应服从麦克斯韦(Maxwell)方程组;如果用 f 代表分布函数,于是Vlasov-Maxwell方程组为

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (1.5.4a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.5.4b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.5.4c)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.5.4d)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{j} \quad (1.5.4e)$$

式中: ρ 与 $\mathbf{j}$ 分别代表电荷密度与电流密度, ϵ_0 与 μ_0 分别为真空中的介电常数与磁导率。

由于电磁场的存在,带电粒子运动时要受到洛伦兹力的作用,这时粒子的分布函数 $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ 不仅要满足 Vlasov 方程式(1.5.4a),而且 $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{B}$ 还要服从 Maxwell 方程组(1.5.4b)~(1.5.4e)式。由偏微分方程理论可知, Vlasov 方程为关于分布函数 f 的一阶双曲型偏微分方程,其系数依赖于未知函数 $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{B}$,而 Maxwell 方程组是关于未知函数 $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{B}$ 的一阶对称双曲型方程组。值得注意的是, (1.5.4e)式中的 $\mathbf{j}$ 应由 $\mathbf{v}$ 以及分布函数 f 来决定,其表达式为

$$\mathbf{j} = q \int \mathbf{v} f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} \quad (1.5.5)$$

式中: q 为粒子的电荷。因此 Vlasov-Maxwell 方程组式(1.5.4)是一个一阶非线性双曲型积分-微分方程组。

下面讨论电离气体中的输运问题。首先给出电离气体与稀薄电离气体的概念:当组成气体的所有分子都被电离时,称其为完全电离气体。这种情况必须在极高的温度下才能出现,例如核反应堆内的气体介质便可以认为是完全电离气体。在通常情况下,气体中的一部分分子处于电离状态,另一部分分子处于中性状态,这时也称这种气体为电离气体。在地球大气的高空层,由于存在强烈的热辐射作用以及处于低气压区域,空气呈电离状态,故称这时的电离气体为稀薄电离气体。电离气体实际上是电子、离子和中性分子的多组元混合气体,因此稀薄电离气体的宏观运动及其微观量都可以通过三个组元所对应的分布函数来描述。这三个分布函数分别为电子分布函数 $f_e(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ 、离子分布函数 $f_i(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ 和中性分子分布函数 $f_o(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ 。在混合气体情况下,相同组元之间以及不同组元之间的分子都存在着碰撞作用,存在着组元类的组合平均自由程 λ_{jk} 、碰撞时间 τ_{jk} 和碰撞频率 $\hat{v}_{jk}$,而这些微观特征量又都依赖于相应的碰撞截面 σ_{jk} ;将 λ_{jk} 、 τ_{jk} 和 $\hat{v}_{jk}$ 对组元类 j 求和便可得到各组元的平均自由程 λ_k 、碰撞时间 τ_k 和碰撞频率 $\hat{v}_k$,然后注意将 λ_k 、 τ_k 和 $\hat{v}_k$ 按组元数密度加权平均便可得到气体的平均自由程 λ 、碰撞时间 τ 和碰撞频率 $\hat{v}$;如果电离气体存在三类组元,即电子 e 、离子 i 和中性分子 o ,于是便有 6 种组合的碰撞截面(即 σ_{ee} 、 σ_{ei} 、 σ_{eo} 、 σ_{ii} 、 σ_{io} 、 σ_{oo}),在电离气体中所出现的这 6 种组合的碰撞截面是同量阶的。

在电离气体中,各组元分子的热运动是无序的;另外,对于稀薄气体,各态遍历以及分子混沌假设总是成立的;由于各组元的平均自由程总是远大于组元分子的维度,

因此虽然存在着电磁场的作用,但这种作用仅仅影响着碰撞之前带电分子的运动轨迹而不影响分子碰撞作用的时间以及碰撞机理,所以二元碰撞假设依然成立。对于电离气体各组元的分布函数 $f_e(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ 、 $f_i(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ 和 $f_o(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ 应满足 Boltzmann 方程^[3],即

$$\frac{df_k}{dt} = \frac{\partial f_k}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}_k}{m_k} \cdot \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{v}} = \sum_j \int (f'_k f'_j - f_k f_j) g_{kj} b_{kj} db_{kj} d\varphi_{kj} d\mathbf{v}_j, \quad (k = e, i, o) \quad (1.5.6)$$

式中

$$g_{kj} = |\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_k| \quad (1.5.7a)$$

$$f_j = f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}_j), f_k = f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}_k) \quad (1.5.7b)$$

$$f'_j = f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}'_j), f'_k = f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}'_k) \quad (1.5.7c)$$

式中: $\mathbf{v}_j$ 与 $\mathbf{v}_k$ 为粒子对碰撞前的速度,而 $\mathbf{v}'_j$ 与 $\mathbf{v}'_k$ 为粒子对碰撞后的相应速度。注意到

$$\sigma_T = \int_0^{4\pi} \sigma d\hat{\Omega} = \int b db d\varphi \quad (1.5.8)$$

$$|d\hat{\Omega}| = \sin \theta d\theta d\varphi \quad (1.5.9)$$

在(1.5.8)式中 σ_T 代表总的碰撞截面; b 为碰撞接触参数。借助于(1.5.8)式,则(1.5.6)式又可写为

$$\frac{df_k}{dt} = \frac{\partial f_k}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}_k}{m_k} \cdot \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{v}} = \sum_j \int (f'_k f'_j - f_k f_j) g_{kj} \sigma_{kj} d\hat{\Omega}_{kj} d\mathbf{v}_j \quad (1.5.10)$$

式中 $\hat{\Omega}_{kj}$ 为一单位矢量,其方向为碰撞后相对速度 $\mathbf{g}'_{kj}$ 的方向。

对于电离气体,由于通常因有电场以及磁场的出现,因此电场力与磁场力作用于带电的分子之上。在忽略重力场对分子的作用下,中性分子不受任何外力的作用;带电分子所受到的电磁力是 Coulomb 力与 Ampere 力的合成,即 $\mathbf{F}_j = e z_j (\mathbf{E} + \mathbf{v}_j \times \mathbf{B})$, 这里 $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{B}$ 分别代表电场强度与磁感应强度。在上述假设下,方程(1.5.6)式针对电子、离子以及中性分子而言,其分布函数所满足的方程分别为

$$\frac{df_e}{dt} = \frac{\partial f_e}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{r}} - \frac{e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})}{m} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} = \sum_{j=e,i,o} \int (f'_e f'_j - f_e f_j) g_{ej} b_{ej} db_{ej} d\varphi_{ej} d\mathbf{v}_j \quad (1.5.11a)$$

$$\frac{df_i}{dt} = \frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e z_i (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})}{m} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}} = \sum_{j=e,i,o} \int (f'_i f'_j - f_i f_j) g_{ij} b_{ij} db_{ij} d\varphi_{ij} d\mathbf{v}_j \quad (1.5.11b)$$