GAODENGSHUXUE

普通高等教育"十二五"规划教材

（理工类）高等数学 上册

主 编 唐晓文
副主编 李 林 唐燕贞 兰友发
主 审 韩 明

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

（理工类）上册

主　编　唐晓文
副主编　李　林　唐燕贞　兰友发
主　审　韩　明

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书是在认真贯彻落实教育部"高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"精神的基础上，按照国家非数学类专业数学基础课程教学指导委员会最新提出的"工科类本科数学基础课程教学基本要求"，结合一些高等院校实施的"卓越工程师计划"以及本科院校学生的基础和特点编写的.

全书分上、下两册，此为上册.内容包括函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用，附录包括二阶和三阶行列式简介，常用曲线图像，积分表，数学建模与数学实验.每章分若干节，每节都配有习题，同时每章还配有综合习题，书末附有习题的参考答案.

本书体系结构严谨、内容难度适宜、语言通俗易懂、例题习题丰富，适合作为普通高等院校理工类(非数学专业)"高等数学"课程的教材使用，可供成教学院或申请升本的专科院校的学生选用，也可供相关专业人员和广大教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：理工类.上册 / 唐晓文主编. —上海：同济大学出版社，2012.8

ISBN 978-7-5608-4908-9

Ⅰ.①高… Ⅱ.①唐… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第136158号

普通高等教育"十二五"规划教材

高等数学(理工类)上册

主　编　唐晓文

副主编　李　林　唐燕贞　兰友发

主　审　韩　明

责任编辑　张　莉　**责任校对**　徐春莲　**封面设计**　潘向蓁

出版发行　同济大学出版社　www.tongjipress.com.cn

(上海市四平路1239号　邮编:200092　电话:021-65985622)

经　销　全国各地新华书店

印　刷　江苏句容市排印厂

开　本　787 mm×960 mm　1/16

印　张　18.75

字　数　375 000

印　数　1—4 100

版　次　2012年8月第1版　2012年8月第1次印刷

书　号　ISBN 978-7-5608-4908-9

定　价　33.00元

前　　言

“高等数学”是普通高等院校本科各专业普遍开设的一门公共基础课程，在培养具有良好数学素质及其应用型人才方面起着特别重要的作用．为适应21世纪教学改革的需要与市场经济对人才的需求，适应我国高等教育从“精英型教育”向“大众化教育”的转变，结合一些高等院校实施的“卓越工程师计划”和“闽台合作项目”，根据我们多年的教学改革实践，在多次研讨和反复实践的基础上，编写了这部高等数学课程的教材．

本书认真贯彻落实教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的精神，并按照国家非数学类专业数学基础课程教学指导委员会最新提出的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”编写而成．

全书以通俗易懂的语言深入浅出地介绍了高等数学的知识．全书分上、下两册，上册有5章内容，包括函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用．上册附录包括二阶和三阶行列式简介，常用曲线图像，积分表，数学建模与数学实验．下册也有5章内容，包括向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数，常微分方程．下册附录包括数学建模与数学实验．全书每章分若干节，每节都配有习题，同时每章还配有综合习题，书末附有习题的参考答案．

带“*”号的内容可根据教学需要和学时安排酌情增删，附录是学习高等数学的辅助内容，可供教学时参考．

本书具有以下几方面的特点：

(1) 淡化理论推导过程，加强训练强化应用．在第1章中没有介绍映射的内容，直接通过实例给出函数的定义，同时在有些章节中还淡化了定理证明的推导过程，既简明易懂，又解决了课时少、内容多的矛盾．同时，本书经过精心设计与编选，配备了相当丰富的习题，包括填空题、选择题、计算题、应用题．目的是使学生理解基本概念和基本定理的实质，掌握重要的解题方法和应用技巧．

(2) 内容结构设计合理，突出重点消除难点．平面极坐标是积分中经常用的重要内容，因此，在第5章中比较详细地介绍了平面极坐标与直角坐标的关系，给出了一些常用曲线的极坐标方程，为后面的学习奠定了一定的理论基础；第二类线面积分是高等数学的难点，一般的书都是通过物理意义抽象出第二类线面积分的概念，本书则是把第二类线面积分以一种特殊的第一类线面积分引入，不但消除了难点问题，而且

直接得到了两类积分之间的关系，同时也突出了第一类线面积分在线面积分中的重要作用.

(3) 渗透数学建模思想，注重理论联系实际. 将数学实验和数学建模的思想渗透到高等数学的教学中一直是高等数学教育改革的努力方向. 为配合卓越工程师计划和闽台合作项目，增加实践环节，本书将与高等数学课程各章节紧密呼应的"数学建模"和"数学实验"内容作为附录放在教材的后面，它既可以供学生自学，也可以供教师参考，特别是还可以作为一门独立的和高等数学配套的同时进行的实验课程. 该课程既可以由老师上课，也可以供师生讨论，还可以直接在老师的指导下以学生为主体进行课程实践. 这是一种新的值得期待的尝试.

本书体系结构严谨、内容难度适宜、语言通俗易懂、例题习题丰富，适合作为普通高等院校理工类专业高等数学课程的教材使用，可供闽台合作院校和成教学院或申请升本的专科院校选用，也可供相关专业人员和广大教师参考.

本书的编写大纲由唐晓文提出，并经过编者充分讨论而确定. 具体分工如下：

第 1 章至第 5 章由唐燕贞编写，第 7 章、第 8 章及附录由李林编写，第 6 章、第 9 章及第 10 章由唐晓文编写，全书的习题以及参考答案由兰友发编写，全书由唐晓文统稿、定稿.

本书的主审是韩明教授. 韩明教授对本书作了认真的审查，提出了许多宝贵的修改意见和建议，在此表示诚挚的谢意.

在编写过程中参考了书后所列的参考文献，谨此对参考文献的作者表示衷心的感谢. 本书的出版还得到编者单位领导及同事的大力支持，在此一并表示感谢.

虽然编者力求本书通俗易懂、简明流畅、便于教学，但由于水平有限，肯定还有一些不尽如人意之处，诚挚欢迎专家和读者提出宝贵意见. 本书将不断改进与完善，突出自己的特色，更好地为教学服务.

唐晓文

2012 年 8 月

目 录

第 1 章　函数、极限与连续

函数是高等数学研究的主要对象，也是高等数学中最重要的基本概念之一. 极限的概念是微积分的理论基础，极限方法是研究变量的一种基本方法. 连续是函数的一个重要性态. 本章介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念以及它们的一些性质.

1.1　函　　数

1.1.1　集　合

"集合"是数学中的一个重要概念，现代数学各个分支几乎都构筑在严格的集合理论上. 为今后学习的需要，本节从介绍微积分所涉及的有关集合的一些基本知识开始.

1. 集合与元素

所谓集合，就是具有某种特定性质的事物的全体，简称集，组成这个集合的事物称为该集合的元素，简称元. 通常用大写字母 A, B, X, Y, … 表示集合，用小写字母 a, b, x, y, … 表示元素. 若集合不含任何元素，则称为空集，记为 $\varnothing$. 仅含有限个元素的集合称为有限集，否则，称为无限集.

若元素 x 在集合 A 中，则称 x 属于 A，记为 $x \in A$；若元素 x 不在集合 A 中，则称 x 不属于 A，记为 $x \notin A$.

设 A, B 是两个集合，若集合 A 中的元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记为 $A \subseteq B$（读为 A 包含于 B），或 $B \supseteq A$（读为 B 包含 A）.

若集合 A 和 B 互为子集，即 $A \subseteq B$ 且 $B \supseteq A$，则称 A 和 B 相等，记为 $A = B$.

若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$，则称 A 是 B 的真子集，记为 $A \subset B$.

例如一般用字母 $\mathbf{N}^+$ 表示全体正整数集合，$\mathbf{Z}$ 表示全体整数集合，$\mathbf{Q}$ 表示全体有理数集合和 $\mathbf{R}$ 表示全体实数集合，则 $\mathbf{N}^+ \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$. 另外通常 $\mathbf{R}^*$ 表示非零的实数的集合，$\mathbf{R}^+$ 表示全体正实数的集合.

2. 集合的表示方法

表示集合的方法有两种，一种是枚举法，即把集合中的元素一一列举出来，如

$$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}, \quad \mathbf{Z}=\{\cdots, -n, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\};$$

另一种是描述法，即把元素的特性描述出来，例如

$$\mathbf{R}^+=\{x \mid x>0\},$$

$$Q=\left\{\frac{p}{q} \middle| p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}^+ \text{ 且 } p \text{ 和 } q \text{ 互质}\right\}.$$

3. 集合的运算

集合的基本运算有并、交、差 3 种.

设 A, B 是两个集合，由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的并集(简称并)，记为 $A \cup B$，即

$$A \cup B=\{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\};$$

一般地，n 个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并集记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$，即

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i=\{x \mid x \in A_1 \text{ 或 } x \in A_2 \cdots \text{ 或 } x \in A_n\}.$$

由所有属于 A 又属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的交集(简称交)，记为 $A \cap B$，即

$$A \cap B=\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\};$$

一般地，n 个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的交集记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$，即

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i=\{x \mid x \in A_1 \text{ 且 } x \in A_2 \cdots \text{ 且 } x \in A_n\}.$$

由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的差集(简称差)，记为 $A \backslash B$，即 $A \backslash B=\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$.

有时仅把问题限于某一个确定的集合 X 中进行，所研究的其他集合 A 是它的子集，这时称集合 X 为全集或基本集，称 $X \backslash A$ 为 A 的余集或补集，记为 A^C. 即

$$A^C=\{x \mid x \in X \text{ 且 } x \notin A\}.$$

集合的并、交、差 3 种运算满足下列法则：

设 A, B, C 为任意 3 个集合，则有

(1) 交换律　$A \cup B=B \cup A$, $A \cap B=B \cap A$;

(2) 结合律　$(A \cup B) \cup C=A \cup(B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C=A \cap(B \cap C)$;

(3) 分配律　$(A \cap B) \cup C=(A \cup C) \cap(B \cup C)$,

$(A \cup B) \cap C=(A \cap C) \cup(B \cap C)$;

(4) 对偶律 $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$，$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

以上法则都可根据集合相等的定义验证.

为了表达的方便，引入逻辑记号"$\forall$"表示"对于任意给定的"或"对于每一个".记号"$\exists$"表示"存在".

此外还可以定义两个集合的笛卡儿乘积.

设 A，B 是任意两个集合，$\forall x \in A$，$\forall y \in B$，组成一个有序对 (x, y)，把这样的有序对作为新元素，它们全体组成的集合称为集合 A 与集合 B 的笛卡儿乘积或直积，记为 $A \times B$，即 $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A 且 y \in B\}$.

例如，$\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbf{R} 且 y \in \mathbf{R}\}$ 即为 xOy 面上全体点的集合，$\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 常记作 $\mathbf{R}^2$.

直积可以推广到多个集合，例如，$\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y, z) \mid x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}, z \in \mathbf{R}\}$ 即为空间上全体点的集合. $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 常记为 $\mathbf{R}^3$.

4. 区间和邻域

区间是一类用得较多的数的集合.设 a 和 b 为实数，且 $a < b$.

数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 称为开区间，记为 (a, b)，即 $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$.

数集 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为闭区间，记为 $[a, b]$，即 $[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$.

数集 $\{x \mid a < x \leqslant b\}$ 和 $\{x \mid a \leqslant x < b\}$ 均称为半开区间，分别记为 $(a, b]$ 和 $[a, b)$.

a，b 称为上述各区间的端点，数 $b-a$ 称为区间长度，由于 a，b 是有限的实数，故上述各区间均称为有限区间.

此外引进记号 $+\infty$（正无穷大）和 $-\infty$（负无穷大），则可类似地表示无限区间，例如 $[a, +\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}$ 和 $(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$ 等等均为无限区间.

全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 也可记作 $(-\infty, +\infty)$，它也是无限区间.

以后在不需要明确所论区间是否包含端点以及是有限还是无限区间时，就简称为"区间"，并且常用字母 I 表示它.

邻域也是常用到的一类集合.设 $\delta > 0$，则开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 称为 a 的一个 δ 邻域，记为 $U(a, \delta)$，即

$$U(a, \delta) = \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\},$$

其中点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径，如图 1.1 所示. $U(a, \delta)$ 也可表示为 $\{x \mid |x-a| < \delta\}$.

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉，例如由于 $0 < |x-a|$ 表示 $x \neq a$ 的一切点，故集合 $\{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$ 不包含点 a，称为点 a 的去心 δ 邻域，记为 $\mathring{U}(a, \delta)$，即

$$\mathring{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}.$$

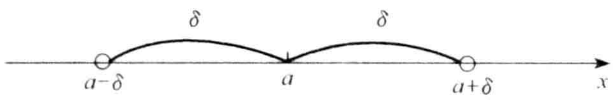

图 1.1

另外，把开区间 $(a-\delta, a)$ 称为 a 的左 δ 邻域，把开区间 $(a, a+\delta)$ 称为 a 的右 δ 邻域. 不关心 δ 的大小时，就将 a 的邻域表示为 $U(a)$.

1.1.2 函　数

1. 函数概念

在研究实际问题时，常常有几个量同时变化，它们的变化往往不是彼此独立，而是相互联系着，其间的关系复杂，为了便于研究，先考察两个变量之间的关系. 下面是具体的例子.

例 1.1.1　圆的面积 S 与它的半径 r 间的关系由公式 $S=\pi r^2$ 确定. 当半径 r 取某一正的数值时，圆的面积 S 相应地有一个确定的数值.

这个例子表达了两个变量之间的依赖关系，这种依赖关系给出了一种对应关系. 根据这种对应关系，当其中一个变量在某一个范围内取值时，另一个变量就有一个确定的值与之对应，两个变量间的这种对应关系就是函数关系.

定义 1.1.1　设 D 是一个给定的非空数集，x 和 y 是两变量，若存在对应关系 f，使得当变量 x 在其变化范围 D 内任意取定一个数值时，变量 y 按照对应关系 f，总会取到唯一确定的数值和 x 对应，则称 f 是定义在 D 上的函数，记为

$$y=f(x).$$

此时 x 称为自变量，y 的值由它所依赖的变量 x 所确定，故称 y 为因变量. 数集 D 称为函数 f 的定义域，也记为 D_f，即 $D_f=D$.

对 $x_0\in D$ 按照对应关系 f，总有确定的值 y_0（记为 $f(x_0)$）与之对应，称 $f(x_0)$ 为函数 f 在 x_0 处的函数值. 函数值的集合 $\{f(x)\mid x\in D\}$ 称为函数 f 的值域，用 $f(D)$ 或 R_f 表示，即

$$R_f=f(D)=\{f(x)\mid x\in D\}.$$

函数概念的几点说明：

(1) 表示函数的符号是可以任意选取的，除了常用的 f 外，还可用其他的英文字母或希腊字母，如 g, ϕ, ψ, F 等. 相应地，函数记为 $y=g(x)$, $y=\phi(x)$, $y=\psi(x)$ 或 $y=F(x)$ 等. 有时还可以用因变量的符号表示函数，即 $y=y(x)$.

(2) 函数的定义中有两个基本要素：一是定义域，二是对应关系. 若两个函数

的定义域相同，对应关系也相同，则这两个函数是相同的函数，否则就表示不同的函数.

(3) 函数的定义域的确定通常有两种方式：一是对有实际背景的函数，根据它的实际意义来确定定义域，另一种是不考虑函数的实际意义，只抽象地研究用数学式子表示的函数，这时约定：函数的定义域就是自变量所能取的使数学式子有意义的一切实数值. 这种定义域称为函数的自然定义域. 例如函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的自然定义域是 $[-1, 1]$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的自然定义域是 $(-1, 1)$. 一般来说，给出一个函数的具体表达式的同时应该指出它的定义域，否则表明默认它的定义域就是自然定义域.

2. 函数的图形

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，对于任意取定的 $x\in D$，对应的函数值为 $y=f(x)$. 这样，以 x 为横坐标，y 为纵坐标，就在 xOy 平面上确定了一点 (x, y). 当 x 取遍 D 上的每一个数值时，就得到点 (x, y) 的一个集合 C，即 $C=\{(x, y) \mid y=f(x), x\in D\}$. 则点集 C 称为函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 的图形，如图 1.2 所示. 图中的 R_f 表示函数的值域.

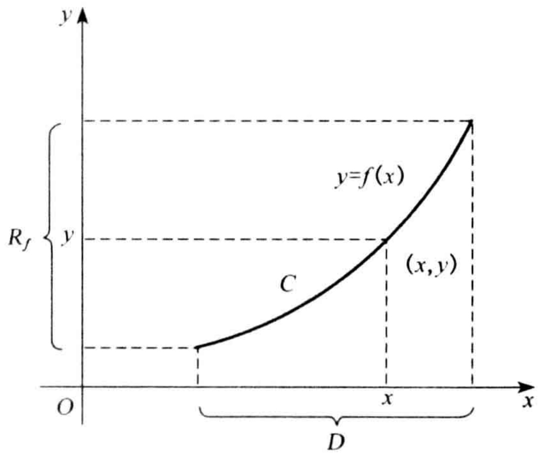

图 1.2

3. 函数的表示法

常用的函数的表示法有 3 种：表格法、图形法和解析法.

表格法，即变量间的函数关系用列表的方法来表示，这种方法有利于查找函数值. 例如火车的时刻表，银行的外汇兑换表，等等.

图形法，即在坐标平面上把函数的图形描绘出来.

解析法，即把变量间的函数关系用方程给出，这些方程通常称为函数的解析表达式. 具体地，又分为 3 种情形：

(1) 显函数，即函数 y 由 x 的解析式直接表示出来. 例如 $y=\arctan x+x^2$.

(2) 隐函数，即 x 和 y 的对应关系由方程 $F(x, y)=0$ 来确定. 例如 $xy+\ln y=1$.

(3) 分段函数，即一个函数在其定义域的不同范围内具有不同的解析表达式.

下面给出几个分段函数的例子以及它们的图形表示.

例 1.1.2 函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

称为符号函数,其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=\{-1,0,1\}$,它的图形如图 1.3 所示.

例 1.1.3 函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

称为绝对值函数. 其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=[0,+\infty)$,它的图形如图 1.4 所示.

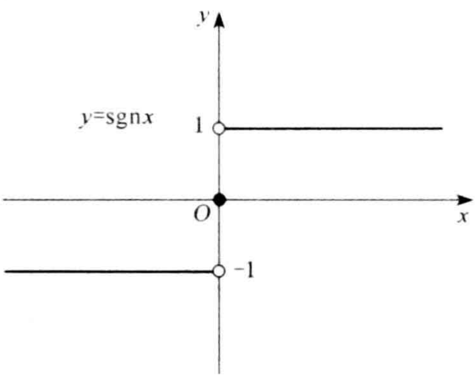

图 1.3

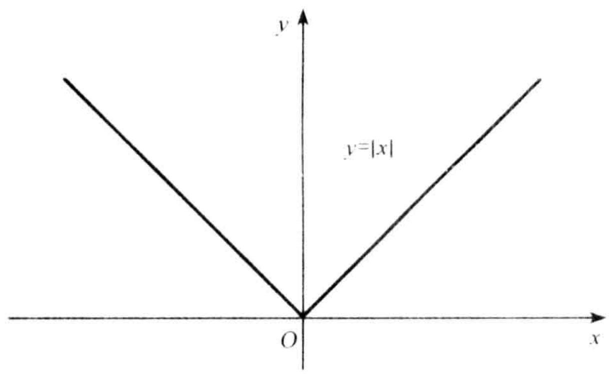

图 1.4

例 1.1.4 函数

$$y = f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$. 它的图形如图 1.5 所示.

注意:分段函数是用几个式子合起来表示一个函数,而不是几个函数. 另外,它也可以用无限多个式子来表示一个函数,如下例:

例 1.1.5 函数

$$y = [x] = n, \quad n \leqslant x < n+1,\ n \in \mathbf{Z}.$$

称为**取整函数**,即 x 是任意实数,y 是不超过 x 的最大整数,记为 $[x]$. 如 $\left[\frac{3}{2}\right]=1$, $[-2.5]=-3$. 其中定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=\mathbf{Z}$. 它的图形如图 1.6 所示.

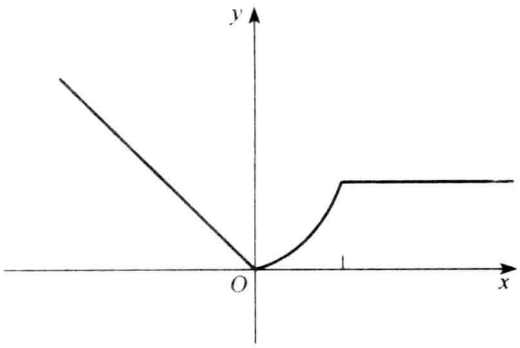

图 1.5

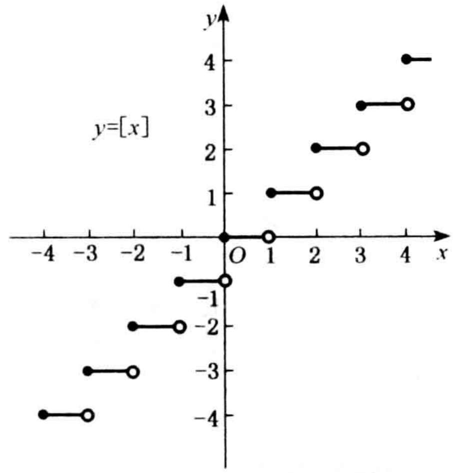

图 1.6

4. 函数的几种特性

(1) 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X \subset D$，如果 $\exists\ K_1$，使对 $\forall\ x \in X$，有 $f(x) \leqslant K_1$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界，而称 K_1 为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个上界.

如果 $\exists K_2$，使对 $\forall x \in X$，有 $f(x) \geqslant K_2$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界，而称 K_2 为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个下界.

如果 $\exists M > 0$，使对 $\forall x \in X$，有 $|f(x)| \leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界. 如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

函数 $f(x)$ 在 X 上无界，就是说 $\forall M > 0$，总 $\exists x_1 \in X$，使 $|f(x_1)| > M$.

例如，$f(x) = \sin x$ 在$(-\infty, +\infty)$上是有界的，因为对 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$，恒有 $|\sin x| \leqslant 1$；又如函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在开区间$(0, 1)$内是无上界的，而在$[1, +\infty)$上有界.

(2) 函数的单调性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subseteq D$. $\forall x_1, x_2 \in I$，且 $x_1 < x_2$. 若有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的. 若有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的. 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

例如，函数 $y = \dfrac{1}{x^2}$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上是单调增加的，在 $(0, +\infty)$ 上是单调减少的，如图 1.7 所示. 又如函数 $y = x^2$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 内是单调减少的，在区间 $(0, +\infty)$ 内是单调增加的，在 $(-\infty, +\infty)$ 上不是单调的，如图 1.8 所示.