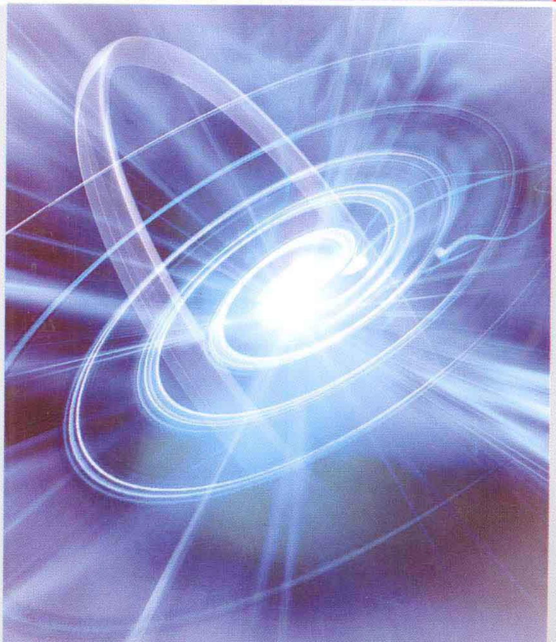
应用型本科院校"十二五"规划教材/数学

主编　于丽

高等数学

上册

Advanced Mathematics



- 适用面广
- 应用性强
- 促进教学
- 面向就业

哈爾濱工業大學出版社

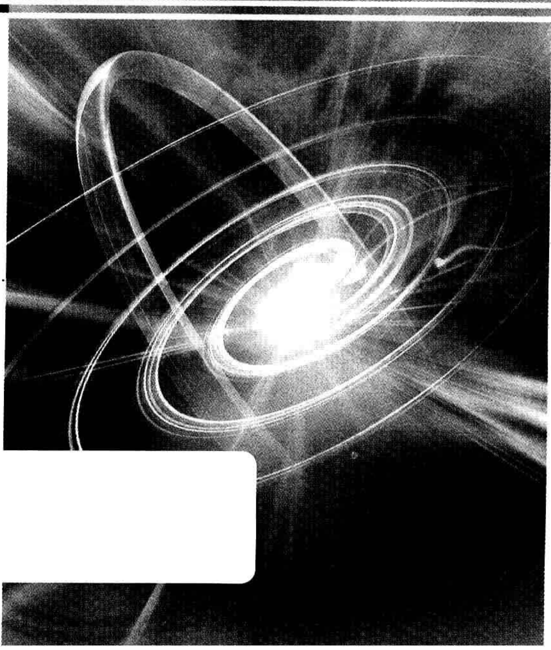
应用型本科院校“十二五”规划教材/数学

主　编　于丽
副主编　张静　陈佳妮

高等数学

上册

Advanced Mathematics



哈爾濱工業大學出版社

内容提要

全书分上、下两册出版。本册(上册)内容包括:第1章函数的极限与连续;第2章一元函数微分学;第3章一元函数积分学;第4章微分方程。

本书适合于应用型本科院校工程类、经济类、管理类专业学生自学及教学使用,也可供工程技术、科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上/于丽主编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2013.6

ISBN 978-7-5603-4098-2

Ⅰ.①高… Ⅱ.①于… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第116311号

策划编辑 杜 燕 赵文斌

责任编辑 李广鑫

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 http://hitpress.hit.edu.cn

印 刷 黑龙江省肇东市一兴印刷有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张14 字数320千字

版 次 2013年6月第1版 2013年6月第1次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-4098-2

定 价 28.00元

序

哈尔滨工业大学出版社策划的《应用型本科院校“十二五”规划教材》即将付梓，诚可贺也。

该系列教材卷帙浩繁，凡百余种，涉及众多学科门类，定位准确，内容新颖，体系完整，实用性强，突出实践能力培养。不仅便于教师教学和学生学习，而且满足就业市场对应用型人才的迫切需求。

应用型本科院校的人才培养目标是面对现代社会生产、建设、管理、服务等一线岗位，培养能直接从事实际工作、解决具体问题、维持工作有效运行的高等应用型人才。应用型本科与研究型本科和高职高专院校在人才培养上有着明显的区别，其培养的人才特征是：①就业导向与社会需求高度吻合；②扎实的理论基础和过硬的实践能力紧密结合；③具备良好的人文素质和科学技术素质；④富于面对职业应用的创新精神。因此，应用型本科院校只有着力培养“进入角色快、业务水平高、动手能力强、综合素质好”的人才，才能在激烈的就业市场竞争中站稳脚跟。

目前国内应用型本科院校所采用的教材往往只是对理论性较强的本科院校教材的简单删减，针对性、应用性不够突出，因材施教的目的难以达到。因此亟须既有一定的理论深度又注重实践能力培养的系列教材，以满足应用型本科院校教学目标、培养方向和办学特色的需要。

哈尔滨工业大学出版社出版的《应用型本科院校“十二五”规划教材》，在选题设计思路上认真贯彻教育部关于培养适应地方、区域经济和社会发展需要的“本科应用型高级专门人才”精神，根据黑龙江省委书记吉炳轩同志提出的关于加强应用型本科院校建设的意见，在应用型本科试点院校成功经验总结的基础上，特邀请黑龙江省9所知名的应用型本科院校的专家、学者联合编写。

本系列教材突出与办学定位、教学目标的一致性和适应性，既严格遵照学科体系的知识构成和教材编写的一般规律，又针对应用型本科人才培养目标

及与之相适应的教学特点，精心设计写作体例，科学安排知识内容，围绕应用讲授理论，做到“基础知识够用、实践技能实用、专业理论管用”。同时注意适当融入新理论、新技术、新工艺、新成果，并且制作了与本书配套的PPT多媒体教学课件，形成立体化教材，供教师参考使用。

《应用型本科院校“十二五”规划教材》的编辑出版，是适应“科教兴国”战略对复合型、应用型人才的需求，是推动相对滞后的应用型本科院校教材建设的一种有益尝试，在应用型创新人才培养方面是一件具有开创意义的工作，为应用型人才的培养提供了及时、可靠、坚实的保证。

希望本系列教材在使用过程中，通过编者、作者和读者的共同努力，厚积薄发、推陈出新、细上加细、精益求精，不断丰富、不断完善、不断创新，力争成为同类教材中的精品。

前　　言

随着我国经济建设与科学技术的迅速发展，应用型教育已进入了一个飞速发展时期。为了更好地适应培养高等技术应用型人才的需要，促进和加强应用型本科院校高等数学的教学改革和教材建设，由我院数学教研室教师编写了这本非数学类的教材。

在编写中，我们结合应用型、职业型、开放式的应用型本科院校的培养目标，努力把以应用为目的、强化应用作为教学重点。在保证科学性的基础上，吸取了许多国内优秀教材的精华，注意处理基础与应用、经典与现代、理论与实践的联系，适当地削弱理论证明，注重计算能力、经典与现代、理论与实践的联系，适当地削弱理论证明，注重计算能力、分析问题能力、解决问题能力的培养，通俗易懂，即便于学生学习，又便于教师参考。

本教材的主要内容有：函数的极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、微分方程。每节后都附有充实新颖的习题，每章后均有综合练习性质的总习题。

本教材由于丽任主编，由张静、陈佳妮任副主编，参加编写的人员有徐萍、李宛娜、李世薇、赵雯辉、丁敏。陈佳妮编写函数的极限与连续、多元函数微分学；于丽编写一元函数微分学、无穷级数；张静编写一元函数积分学、微分方程；徐萍、李宛娜、李世薇、赵雯辉、丁敏对书稿中的习题进行了校对和整理。

教材初稿曾得到田桂林主任的细心审查，田教授提出了许多宝贵意见，特此感谢。由于水平有限，书中难免有不妥之处，殷切希望广大读者批评指正，以便不断改善。

编者

2013 年 5 月

目　　录

第 1 章

函数的极限与连续

高等数学是以变量为主要研究对象的一门数学课程. 极限是贯穿高等数学始终的一个重要概念,是这门课程的基本推理工具. 连续是函数的一个重要性态,连续函数在高等数学中占有重要的位置. 本章主要介绍函数极限与连续的基本知识,为以后的学习奠定基础.

1.1 函　　数

一、函数的定义

定义 1　设 D 为非空实数集,如果存在一个对应法则 f,使得对任一实数 $x \in D$,都有唯一确定的实数 y 与之对应,则称 f 是定义在 D 上的函数,y 是 f 在 x 处的函数值,记作 $f(x)$,即

$$y = f(x), x \in D,$$

其中称 x 为自变量,y 为因变量,数集 D 为函数 f 的定义域,记作 D_f,即 $D_f = D$. 又称全体函数值的集合为函数的值域,记作 $f(D)$ 或 R_f,即

$$f(D) = R_f = \{y \mid y = f(x), x \in D_f\}.$$

确定函数的两个要素是定义域 D 和对应法则 f. 如果两个函数的定义域、对应法则都相同,那么这两个函数就是相同的.

函数的定义域可根据函数的实际意义确定,例如 $s = vt$ 这个函数,时间 t 不能取负值;凡未标明实际意义的函数,其定义域是使该函数有意义的自变量的值的全体,这种定义域通常称为自然定义域,例如 $y = \ln x$ 的定义域是区间 $(0, +\infty)$,$y = \sqrt{4 - x^2}$ 的定义域是区间 $[-2, 2]$. 通常用不等式、区间或集合的形式表示定义域.

设 $a \in \mathbf{R}$,$\delta > 0$,称以 a 为中心,δ 为半径的开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 为点 a 的 δ 邻域(图 1.1),记作 $U(a, \delta)$. $U(a, \delta)$ 去掉中心 a 后,称为点 a 的 δ 去心邻域(图 1.2),记作 $\mathring{U}(a, \delta)$,即

$$\overset{\circ}{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta).$$

当不需要注明邻域半径 δ 时，常将点 a 的邻域和点 a 的去心邻域分别简记作 $U(a)$ 和 $\overset{\circ}{U}(a)$.

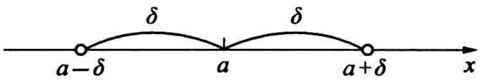


图 1.1

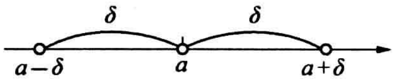


图 1.2

【例 1.1】 求函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{\lg(3x-8)}}$ 的定义域.

解 给定函数的定义域要求满足

$$3x-8>1,$$

即

$$x>3,$$

因此函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{\lg(3x-8)}}$ 的定义域为

$$D=(3,+\infty).$$

【例 1.2】 求函数 $y=\arcsin\dfrac{x-2}{5}+\dfrac{1}{\sqrt{36-x^2}}$ 的定义域.

解 给定函数的定义域要求满足

$$\left|\frac{x-2}{5}\right|\leqslant 1 \text{ 且 } 36-x^2>0,$$

即

$$-3\leqslant x\leqslant 7 \text{ 且 } -6<x<6,$$

因此函数 $y=\arcsin\dfrac{x-2}{5}+\dfrac{1}{\sqrt{36-x^2}}$ 的定义域为

$$D=[-3,6).$$

通常函数的表示方法有三种：表格法、解析法（公式法）、图形法. 用解析法和图形法相结合的方法来研究有关函数的问题，可以使抽象问题更直观更具体. 另外，一些几何问题也可借助函数来做理论研究.

若一个函数在定义域的不同子集上的对应法则不同，则需要用几个式子来表示该函数，通常称这种形式的函数为分段函数. 分段函数是在自然科学、工程技术等领域中常涉及的函数形式.

【例 1.3】 绝对值函数（图 1.3）：

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=[0,+\infty)$.

【例 1.4】　取整函数 $y=[x]$（图 1.4）.

$[x]$表示不超过 x 的最大整数. 例如，$[0.5]=0$；$[-0.5]=-1$；$[5]=5$.

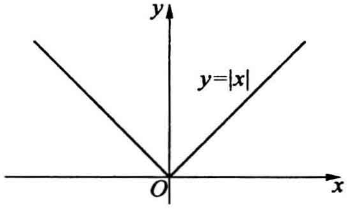


图 1.3

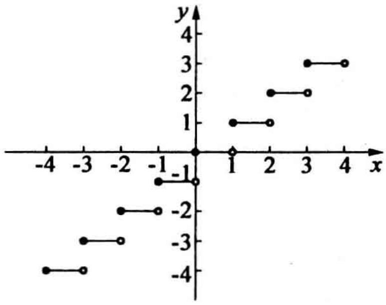


图 1.4

【例 1.5】　符号函数（图 1.5）：

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

对任一 $x\in\mathbf{R}$，总有 $|x|=x\operatorname{sgn} x$，所以 $\operatorname{sgn} x$ 起了 x 的符号的作用，因此称 $y=\operatorname{sgn} x$ 为符号函数.

注　分段函数是由几段函数构成的一个函数，而不是几个函数！

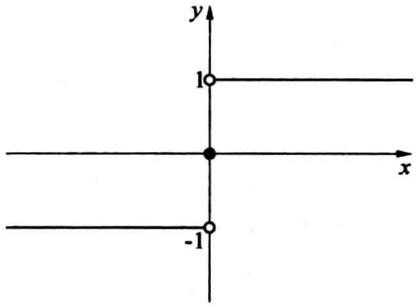


图 1.5

二、函数的基本性质

1. 有界性

定义 2　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$，若存在正数 M，使得对任一 $x\in X$，都有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界，称 $-M$ 为 $f(x)$ 在 X 上的一个下界，M 为 $f(x)$ 在 X 上的一个上界. 如果这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

若函数 $f(x)$ 在数集 X 上有上界（下界），则必有无限多个上界（下界）.

例如，对任一 $x\in(-\infty,+\infty)$，都有 $|\sin x|\leqslant 1$，所以 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界；$y=\mathrm{e}^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有下界（0 就是它的一个下界），但不存在正数 M，使得对任一 $x\in(-\infty,+\infty)$，都有 $|\mathrm{e}^x|\leqslant M$，所以它在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界；$y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 内既没有上界，又没有下界，显然它在 $(0,+\infty)$ 内无界.

2. 单调性

定义 3　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$. 如果对于数集 X 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

(1) $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在数集 X 上是单调增加的.

(2) $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在数集 X 上是单调减少的.

特别地，在其定义域内单调增加（单调减少）的函数，称为单调增加（单调减少）函数，单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数.

例如，函数 $\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加，在 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 上单调减少，但它不是单调函数.

3. 周期性

定义 4　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在正数 l，使得对任一 $x\in D$ 有 $(x\pm l)\in D$，且

$$f(x\pm l)=f(x),$$

则称函数 $f(x)$ 为周期函数，l 为函数 $f(x)$ 的一个周期.

显然，若 l 是函数 $f(x)$ 的周期，则 $nl(n\in\mathbf{N}^+)$ 也是它的周期. 通常我们说的周期函数的周期是指最小正周期（若该函数存在最小正周期）.

例如，函数 $\sin x,\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；函数 $\tan x,\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数；$y=\sin 2x$，$y=\cos\frac{x}{2}$ 分别是以 π 和 4π 为周期的周期函数；常函数 $y=C$ 是以任何正数为周期的周期函数，但它没有最小正周期.

4. 奇偶性

定义 5　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对于任一 $x\in D$，都有

$$f(-x)=f(x)\ (f(-x)=-f(x)),$$

则称函数 $f(x)$ 为偶（奇）函数.

从函数图形来看，奇函数的图象关于原点对称，偶函数的图象关于 y 轴对称.

例如，$y=\sin x$ 为奇函数；$y=\cos x$ 为偶函数；$y=\sin x+\cos x$ 既不是奇函数，也不是偶函数；$y=0$ 既是奇函数，又是偶函数.

三、复合函数与反函数

1. 复合函数

由两个或两个以上的函数通过所谓“中间变量”传递的方法能生成新的函数，称这种新的函数为复合函数.

定义 6　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=g(x)$ 的定义域为 D_g，值域为 R_g，若 $R_g\cap D_f\neq\varnothing$，则称定义在

$$\{x\mid x\in D_g,g(x)\in D_f\}$$

上的函数 $y=f[g(x)]$ 为函数 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 复合而成的函数，其中 u 称为中间变量，$y=f(u)$ 称为外函数，$u=g(x)$ 称为内函数.

关于复合函数，需要注意内函数 $u=g(x)$ 的值域与外函数 $y=f(u)$ 的定义域的关系，当且仅当 $R_g\cap D_f\neq\varnothing$ 时，函数 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 才能复合成函数

$$y=f[g(x)].$$

例如，函数 $y=f(u)=\sqrt{u}$ 与 $u=g(x)=\sin x-2$ 不能复合成函数 $y=\sqrt{\sin x-2}$，因为内函数 $u=g(x)$ 的值域 R_g 为 $[-3,-1]$，外函数 $y=f(u)$ 的定义域 D_f 为 $[0,+\infty)$，即 $R_g\cap D_f=\varnothing$.

【例 1.6】　求函数 $y=f(u)=\sqrt{u}$ 与 $u=g(x)=1-x^2$ 构成的复合函数 $y=f[g(x)]$ 及其定义域.

解　外函数 $y=f(u)$ 的定义域 D_f 为 $[0,+\infty)$，内函数 $u=g(x)$ 的值域 R_g 为 $(-\infty,1]$，因为

$$R_g\cap D_f=[0,1]\neq\varnothing,$$

故 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=1-x^2$ 可以构成复合函数 $y=f[g(x)]=\sqrt{1-x^2}$，定义域为

$$\{x|x\in D_g,g(x)\in D_f\}=[-1,1].$$

【例 1.7】　求函数 $y=f(u)=\ln u$ 与 $u=g(x)=\sin x$ 构成的复合函数 $y=f[g(x)]$ 及其定义域.

解　外函数 $y=f(u)$ 的定义域 D_f 为 $(0,+\infty)$，内函数 $u=g(x)$ 的值域 R_g 为 $[-1,1]$，因为

$$R_g\cap D_f=(0,1]\neq\varnothing,$$

故 $y=\ln u$ 和 $u=\sin x$ 可以构成复合函数 $y=f[g(x)]=\ln\sin x$，定义域为

$$\{x|x\in D_g,g(x)\in D_f\}=(2k\pi,\pi+2k\pi).$$

有时，一个复合函数可能由多个函数复合而成. 例如，复合函数 $y=\ln\sin x^3$ 是由函数 $y=\ln u,u=\sin v,v=x^3$ 构成的，其中 u 和 v 都是中间变量.

在学会如何构成复合函数的同时，还应熟练掌握“分解”复合函数.

【例 1.8】　指出 $y=e^{\sqrt{2x}}$ 是由哪些函数复合而成的.

解　$y=e^{\sqrt{2x}}$ 是由 $y=e^u,u=\sqrt{v},v=2x$ 复合而成的.

【例 1.9】　指出 $y=\lg(\arctan\sqrt{1+x^2})$ 是由哪些函数复合而成的.

解　$y=\lg(\arctan\sqrt{1+x^2})$ 是由 $y=\lg u,u=\arctan v,v=\sqrt{w},w=1+x^2$ 复合而成的.

2. 反函数

定义 7　设函数 $y=f(x),x\in D$，如果对每个 $y\in f(D)$，都有唯一确定的 $x\in D$ 使得 $f(x)=y$，则按此对应法则得到一个定义在 $f(D)$ 上的函数，称这个函数为 $y=f(x)$ 的反函数，记作

$$x=f^{-1}(y),y\in f(D).$$

关于反函数，有以下几点说明：

(1) 只有一一对应的函数才具有反函数.

(2) 由于在函数的书写上习惯用字母 x 作为自变量的记号，字母 y 作为因变量的记号，所以反函数 $x=f^{-1}(y),y\in f(D)$ 可改写成 $y=f^{-1}(x),x\in f(D)$.

(3) 曲线 $y=f(x)$ 和曲线 $x=f^{-1}(y)$ 是同一条曲线；而曲线 $y=f(x)$ 和曲线 $y=f^{-1}(x)$ 关于 $y=x$ 对称.

(4) 若函数 $y=f(x)$ 在数集 A 上单调增加（或减少），则函数 $y=f(x)$ 必存在反函数 $x=f^{-1}(y)$，且反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $f(A)$ 上也是单调增加（或减少）的.

【例 1.10】　求 $y=x^2,x\in(0,+\infty)$ 的反函数.

解　在 $(0,+\infty)$ 内，$y=x^2$ 是一一对应的函数关系，故 $y=x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 内存在反函数，由 $y=x^2$ 得

$$x=f^{-1}(y)=\sqrt{y},$$

将上式中的 x,y 互换，得反函数

$$y=\sqrt{x}.$$

四、初等函数

1. 基本初等函数与图象

下面六类函数统称为基本初等函数.

(1)常函数:$y=C,x\in\mathbf{R}$,其中 C 是常数.

常函数是有界函数、周期函数(没有最小正周期)、偶函数、既是单调不增函数又是单调不减函数,特别地,当 $C=0$ 时,它还是奇函数(图1.6).

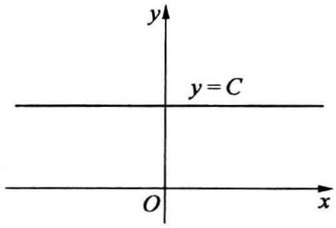


图1.6

(2)幂函数:$y=x^{\mu}$($\mu\in\mathbf{R}$ 是常数).

幂函数的定义域和值域依 μ 的取值不同而不同,但是无论 μ 取何值,幂函数在 $x\in(0,+\infty)$ 内总有定义,图形都经过点(1,1).图1.7给出了几个常见的幂函数的图形.

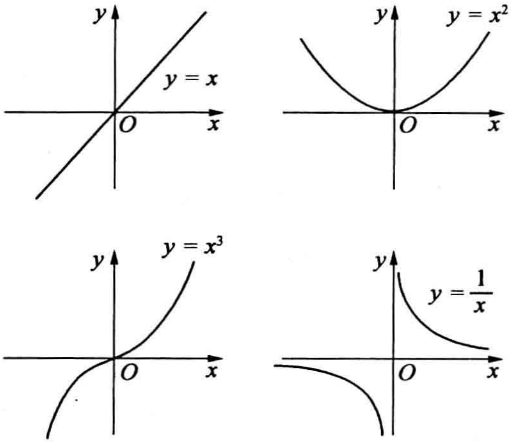


图1.7

(3)指数函数:$y=a^x$($a>0,a\neq1$).

指数函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(0,+\infty)$.不论 a 为何值($a>0,a\neq1$),函数图形都经过点(0,1).

当 $a>1$ 时,函数单调增加;当 $0<a<1$ 时,函数单调减少.函数 a^x 和 $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ 的图形关于 y 轴对称(图1.8).

(4)对数函数:$y=\log_a x$ ($a>0,a\neq1$).

对数函数的定义域为$(0,+\infty)$,值域为$(-\infty,+\infty)$.不论 a 为何值($a>0,a\neq1$),函数图形都经过点(1,0).

当 $a>1$ 时,函数单调增加;当 $0<a<1$ 时,函数单调减少(图1.9).

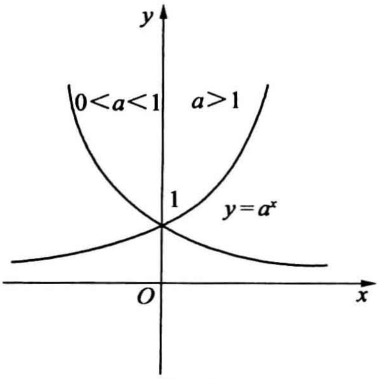


图1.8

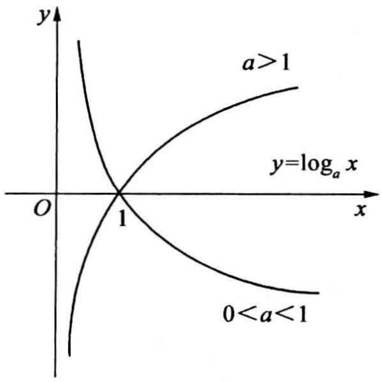


图1.9

对数函数和指数函数互为反函数.

常用的对数函数有以 10 为底的,称为常用对数,即 $\log_{10}x$,简记为 $\lg x$;还有以 e 为底(e 为常数,e = 2.718 28…)的,称为自然对数,并且将自然对数 $\log_e x$ 简记为 $\ln x$.

(5)三角函数.

$y=\sin x$(正弦函数),$y=\cos x$(余弦函数),$y=\tan x$(正切函数),$y=\cot x$(余切函数)(表 1.1,图 1.10).

表 1.1

	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$	$y=\cot x$
定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}-\{k\pi+\frac{\pi}{2}\}$	$\mathbf{R}-\{k\pi\}$
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
增区间	$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$	$[-\pi+2k\pi,2k\pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$	
减区间	$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$	$[2k\pi,\pi+2k\pi]$		$(k\pi,\pi+k\pi)$
奇偶性	奇	偶	奇	奇
周期	2π	2π	π	π

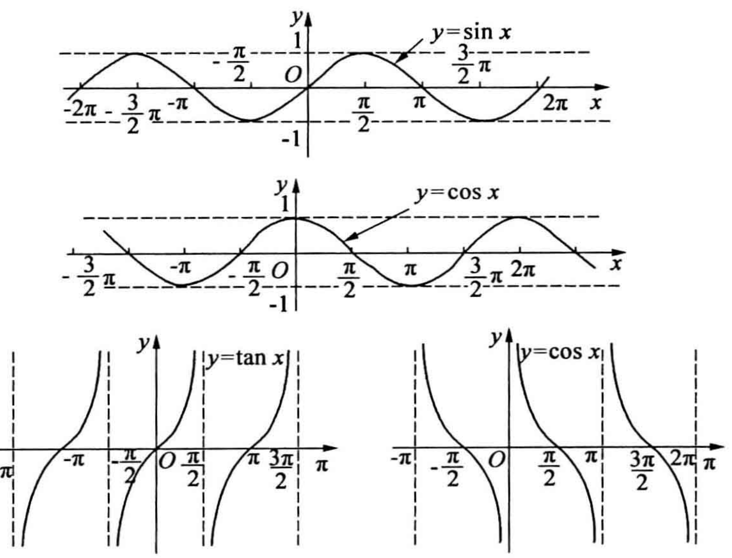


图 1.10

(6)反三角函数.

$y=\arcsin x$(反正弦函数),$y=\arccos x$(反余弦函数),$y=\arctan x$(反正切函数),$y=\operatorname{arccot} x$(反余切函数)(表 1.2,图 1.11).

表 1.2

	$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$	$y=\arctan x$	$y=\operatorname{arccot} x$
定义域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
主值域	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	$[0,\pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	$(0,\pi)$
增区间	$[-1,1]$		$\mathbf{R}$	
减区间		$[-1,1]$		$\mathbf{R}$
奇偶性	奇		奇	

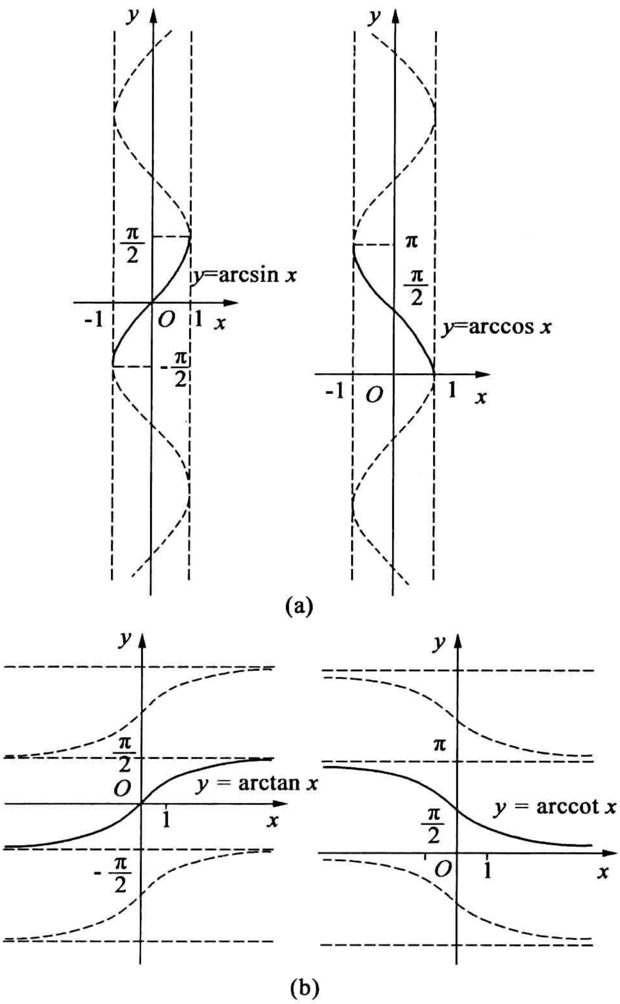


图 1.11

2. 初等函数

凡是由基本初等函数经过有限次的四则运算以及有限次的复合所生成的函数称为初等函数.