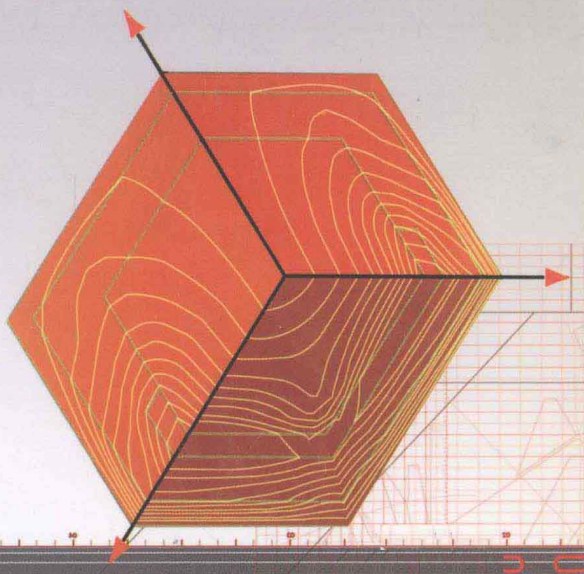


第2版

# 三维涡流场的 有限元分析

谢德馨 等编著



机械工业出版社  
CHINA MACHINE PRESS

# 三维涡流场的 有限元分析

第2版

谢德馨 姚纓英 白保东 李锦彪 编著

机械工业出版社

本书系统、简要地阐述了电工设备中的电磁场——涡流场的基本理论与有限元分析方法。

全书共7章，内容主要包括三维正弦涡流场和瞬态涡流场的有限元解法，铁磁材料中涡流场计算的特点和处理方法，大型稀疏代数方程组的解法，有限元网格的自动生成和电磁场分析结果的后处理等问题，并附有若干计算实例。每章后面附有参考文献。书末附有求解大型稀疏代数方程组的ICCG法源程序。

书中，特别是铁磁材料中涡流场的不同分析方法与材料特性的模拟，表面阻抗法的有限元模型，三维瞬态涡流场的求解，牛顿-拉夫逊法在解复系数非线性代数方程组中的应用，将ICCG法用于求解大型工程问题的经验，ICCG法的改进算法，二、三维网格的自动生成及三维场图示等内容，收入了电磁场有限元分析的新进展，也反映了作者近年来的研究成果。

本书可供高等工科院校电气工程学科的研究生、教师和从事电工设备设计及运行维护工作的工程技术人员阅读、参考。

## 图书在版编目 (CIP) 数据

三维涡流场的有限元分析/谢德馨等编著. —2版. —北京: 机械工业出版社, 2007. 12

ISBN 978-7-111-08704-5

I. 三… II. 谢… III. 三维—涡旋流动—电磁计算—有限元分析 IV. TM153

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第169035号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

责任编辑: 卢若薇 版式设计: 霍永明 责任校对: 樊钟英

封面设计: 王奕文 责任印制: 杨曦

三河市国英印务有限公司印刷

2008年3月第2版第1次印刷

140mm×203mm·9.25印张·245千字

标准书号: ISBN 978-7-111-08704-5

定价: 22.00元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

销售服务热线电话: (010) 68326294

购书热线电话: (010) 88379639 88379641 88379643

编辑热线电话: (010) 88379727

封面无防伪标均为盗版

## 第2版前言

本书第1版曾获机械工业出版社高水平著作出版基金资助。自本书第1版出版以来，仅仅过去了短短的6年，然而在此期间计算电磁学又有了许多新的进展。考虑到由于时间仓促和有关原因所限，在第1版中有些内容尚不尽如人意，涡流场分析方法的某些重要方面也未能包含其中，因此有必要对本书第1版进行补充和修订，以便较好地反映近年来在相关领域内的新成果。

与第1版相比较，第2版所增加的内容主要包括：

(1) 棱边元单元插值函数的构建以及电磁场有限元分析中棱边元与节点元的比较。

(2) 非正弦周期性涡流问题有限元分析的新进展，谐波平衡有限元法与时间周期有限元法。

(3) 考虑电机、电器中的局部旋转磁化现象与材料各向异性的E-S模型。

(4) 有限元离散化方程组解法中预处理共轭梯度法的改进。

(5) 三维有限元分析中绕组磁链的计算。

此外，对本书内容所涉及范围内有关文献研究者的不同观点（或对同一问题从不同角度的认识）作了适当介绍，并提出了作者的意见，例如，关于在涡流场的矢量磁位与标量电位数学模型中加入散度项以保证库仑规范成立的问题；非正定算子的涡流方程是否可应用相应的泛函表示等。

限于作者的水平，第2版中仍可能有不少缺点错误，欢迎读者指正。

谢德馨

2007年6月

# 第1版前言

计算电磁学 (Computational Electromagnetics) 是经典电磁学的发展, 它以计算机为工具, 研究工程中的电磁学问题。近三十年来, 计算电磁学已经发展成为一门综合性的学科。它涉及电磁场理论、数值分析方法、计算机图示学、优化方法和计算机软件工程等诸多方面, 它的研究范围也不断扩大, 从二维场到三维场, 从稳态场到瞬态场直至微波电磁场, 从正问题到逆问题。目前, 计算电磁学广泛应用于工程技术中涉及电磁理论的许多领域。涡流场特指求解区域中含有导电材料的似稳电磁场, 涡流场的数值计算已成为电机、变压器等电工设备设计和运行中不可缺少的计算工具。

在似稳电磁场的计算中, 三维涡流分析被认为最为复杂和繁琐, 但许多工程问题的解决又很难避开三维涡流场的计算。本书试图由浅入深地介绍三维涡流场的理论和它的有限元计算方法, 为强电专业的研究生开展研究工作做些基础准备, 也供从事电工设备设计和运行维护工作的工程师和研究人员参考, 使他们了解电磁学的语言, 便于学会电磁场分析的商用软件, 理解场的图示, 能够说明数值计算结果并把它们体现在设计过程中。

为便于从事三维涡流分析的读者自己动手编制计算机程序或深入理解计算机理, 本书第2章给出了三种基本等参元的离散化表达式, 并提供了用于检验计算方法正确性的实际算例 (TEAM Workshop 问题7, 问题10和问题21)。

三维电磁场有限元分析的关键问题之一, 是大型稀疏对称代数方程组的求解。本书在附录中给出了求解实系数方程

组的一种预处理共轭梯度法计算机程序，该程序经过少量修改即可适用于求解复系数方程组。这一程序已经过本书作者多年计算实践的检验，表明具有较好的通用性。

本书融入了作者及沈阳工业大学工程电磁场研究室近十余年的科研成果。在这些研究工作中，博士研究生曾林锁副教授、王金铭副教授，博士研究生闫秀恪，硕士研究生栾茹、张艳丽同志和曾建斌老师作出了很多成绩，在此表示衷心的感谢。

本书由哈尔滨理工大学汤蕴璆教授主审。他仔细审阅了全稿，改正了手稿中的一些不妥之处，并对内容安排提出了宝贵意见，在此致以深切的谢意。

本书的出版得到了机械工业出版社出版基金的资助，本书所包含的研究工作得到了辽宁省科学技术委员会两项自然科学基金的资助，在此一并表示感谢。

由于作者水平有限，书中可能还有不少缺点错误，恳请读者批评指正。

谢德馨

2000年10月

# 目 录

## 第 2 版前言

## 第 1 版前言

第 1 章 基本理论 .....	1
1.1 概述: 计算电磁学的发展历史与现状 .....	1
1.1.1 发展历史的简单回顾 .....	1
1.1.2 当前概况 .....	2
1.1.3 计算电磁学未来的展望 .....	5
1.1.4 有限元法在计算电磁学发展中的地位 .....	7
1.2 电磁场控制方程的表述 .....	8
1.2.1 电磁场的基本方程 .....	8
1.2.2 三维涡流分析的特点 .....	10
1.2.3 三维涡流场控制方程的表述 .....	14
1.3 涡流场分析数学模型的建立, 唯一性问题 .....	17
1.3.1 求解区域的定义 .....	17
1.3.2 用场矢量表示的定解问题 .....	18
1.3.3 矢量磁位与标量电位, $\mathbf{A}, \phi - \mathbf{A}$ 法数学模型的导出 .....	18
1.3.4 标量电位的作用 .....	26
1.3.5 矢量电位与标量磁位, $\mathbf{T}, \psi - \psi$ 法 .....	29
1.4 边界条件 .....	33
1.4.1 不同媒质分界面上的边界条件 .....	33
1.4.2 场域边界条件 .....	35
本章参考文献 .....	38
第 2 章 有限元法的实施 .....	41
2.1 基于变分原理的有限元法 .....	41
2.1.1 古典变分法简介 .....	41
2.1.2 变分有限元法 .....	48
2.1.3 矢量磁位变分有限元分析中的罚函数法 .....	51

2.2 伽辽金有限元法 .....	54
2.2.1 伽辽金有限元法简介 .....	54
2.2.2 函数的分片展开与单元插值基函数的构成 .....	56
2.2.3 三维正弦电磁场有限元离散化方程的建立 .....	65
2.3 棱边元及其形状函数 .....	86
2.3.1 棱边元简介 .....	86
2.3.2 六面体 Whitney 单元插值函数的构建 .....	88
2.3.3 六面体 Mur 单元插值函数 .....	97
2.3.4 棱边元与节点元在三维电磁场分析中的比较 .....	99
2.4 计算实例: 线性正弦稳态涡流问题 (TEAM Workshop 问题 7) .....	101
本章参考文献 .....	104
<b>第 3 章 三维瞬态涡流场 .....</b>	<b>107</b>
3.1 时步法 .....	107
3.1.1 基本方程 .....	107
3.1.2 时间离散 .....	108
3.1.3 非线性磁参数的处理 .....	113
3.2 状态空间法 .....	114
3.2.1 基本方程 .....	114
3.2.2 计算步骤 .....	118
3.3 计算实例: 非线性瞬态涡流问题 (TEAM Workshop 问题 10) .....	119
本章参考文献 .....	124
<b>第 4 章 铁磁材料中的涡流场 .....</b>	<b>125</b>
4.1 铁磁材料中涡流场计算的特点 .....	125
4.2 各向异性问题 .....	128
4.2.1 结构各向异性 .....	128
4.2.2 材料各向异性 .....	129
4.3 正弦激励下非线性电磁场的磁导率 .....	138
4.3.1 问题的复杂性 .....	138
4.3.2 有效磁导率的计算 .....	140
4.4 谐波平衡有限元法 .....	142
4.5 时间周期有限元法 .....	147



4.6 表面阻抗法 .....	151
4.6.1 一维表面阻抗条件的导出 .....	151
4.6.2 对一维表面阻抗条件的修正 .....	153
4.6.3 饱和工作状态时的表面阻抗 .....	156
4.6.4 表面阻抗法的有限元模型 .....	158
4.7 计算实例: 铁磁材料中的涡流与磁场 (TEAM Workshop 问题 21) .....	163
本章参考文献 .....	167
<b>第 5 章 有限元离散化方程组解法的若干问题 .....</b>	<b>171</b>
5.1 求解线性方程组的方法分类 .....	171
5.2 预处理共轭梯度法 .....	172
5.2.1 共轭梯度法简介 .....	172
5.2.2 预处理共轭梯度法 .....	178
5.2.3 ICCG 法应用中的几个问题 .....	182
5.2.4 ICCG 法的改进 .....	184
5.3 牛顿-拉夫逊法在求解非线性代数方程组中的应用 .....	187
5.3.1 牛顿-拉夫逊法简介 .....	187
5.3.2 牛顿-拉夫逊法在静磁场有限元分析中的迭代格式 .....	189
5.3.3 用牛顿-拉夫逊法求解正弦涡流场复系数非线性代数 方程组 .....	194
5.4 计算实例: 改进的预处理共轭梯度法 .....	200
本章参考文献 .....	202
<b>第 6 章 有限元网格的自动生成 .....</b>	<b>204</b>
6.1 概述: 有限元分析的瓶颈问题——网格自动生成技术 .....	204
6.2 实体造型技术中形体表示的几种常用模式 .....	206
6.3 二维与三维有限元网格生成方法的分类 .....	209
6.3.1 自动与半自动网格生成方法的综合分类 .....	209
6.3.2 几种流行的全自动网格生成方法 .....	211
6.4 网格自适应细分与后验误差估计 .....	215
6.4.1 互补变分法 .....	216
6.4.2 局部误差分析法 .....	218
6.5 网格生成方法举例 .....	220
6.5.1 用拓扑分解法生成三角形网格 .....	220

6.5.2 基于正四面体八叉树法的三维网格自动生成 .....	229
本章参考文献 .....	236
<b>第7章 有限元分析的后处理 .....</b>	<b>239</b>
7.1 局部与总体电磁量的计算 .....	239
7.1.1 磁感应强度 .....	240
7.1.2 电流密度 .....	240
7.1.3 电感、能量与涡流损耗 .....	241
7.1.4 绕组磁链 .....	245
7.2 力与力矩的计算：经典理论与有限元法的结合 .....	249
7.2.1 麦克斯韦应力法 .....	250
7.2.2 虚功原理 .....	253
7.2.3 计算实例 .....	258
7.3 三维涡流场场矢量的图示 .....	260
7.3.1 标量场与矢量场的图形显示 .....	261
7.3.2 场矢量的点图标表示 .....	262
7.3.3 磁场的场线表示 .....	268
本章参考文献 .....	273
<b>附录 求解稀疏对称方程组的 ICCG 法源程序 .....</b>	<b>275</b>
附录 A 程序说明 .....	275
A1 程序功能与结构 .....	275
A2 存储方式与主要符号说明 .....	276
附录 B 程序 .....	278
B1 主程序单元 .....	278
B2 模块 .....	284
B3 输入数据 .....	284
B4 输出结果（算例） .....	285

# 第1章 基本理论

## 1.1 概述：计算电磁学的发展历史与现状

### 1.1.1 发展历史的简单回顾

电磁学是经典物理学的一个分支，主要研究源（电荷、电流）与场（电场、磁场）的相互联系、相互作用的规律。计算电磁学（Computational Electromagnetics）是经典电磁学的发展与应用，它以计算机为工具，研究工程中的电磁学问题。

电磁理论的研究具有悠久的历史。静磁学方面最早的应用——指南针的发明，可以追溯到4600年以前的中国。在静电学方面，摩擦起电现象是在2600年前的希腊发现的。电磁理论的迅速发展是近300年的事，欧洲的工业革命首先促进了这一发展。人们从静电、静磁开始，认识了动电（电流）与磁场的关系，认识了电磁波。100多年前，麦克斯韦总结了前人的研究成果，建立了电磁场理论（其著作《Treatise on Electricity and Magnetism》成书于1873年）。其后，赫兹用实验证明了这一理论的正确性。从理论框架上看，麦克斯韦方程组加上洛伦兹力的计算公式，合起来构成了静止及低速运动媒质中电动力学的基础，概括了发电机、电动机和其它电磁装置的工作原理，也概括了电磁波的发射、传播和接收的原理。至此，电磁学已发展成为经典物理学的较完善的分支。但是，麦克斯韦方程组的实际应用并不容易。在计算机技术发展以前，工程问题的解决依赖于解析法或场化为路的简化方法，这些方法在电工产品的设计中曾起了重要的历史作用。例如，在电机设计中常常假设气隙是均匀的，定、转子开槽对气隙磁场的影响用一个大于1的系数来考虑，看作气隙

长度的等效增加。这一系数称为卡特系数，是在较多的简化假设下应用许瓦兹-克利斯多夫变换<sup>[1]</sup>求出的。此外，定、转子比漏磁导的计算<sup>[2]</sup>，同步发电机磁极极面形状（这一形状在一定条件下可保证气隙磁场按正弦分布）的计算<sup>[3]</sup>等等，都是解析法应用的范例。但是，大量的工程问题包含了复杂的几何、物理参数，对此，解析法或简单的场化路方法是无能为力的。

最近 30 多年来，电子计算机技术的迅速发展促进了计算电磁学的前进。作为计算电磁学的主要部分，电磁场数值分析的理论与方法得到了较充分的研究。已经发展起来的数值分析方法可以分成积分方程法和微分方程法两大类。积分方程法还可再分为体积分方程法和边界元法；微分方程法主要包括有限差分法和有限元法。有限元法是目前应用最广泛的一种数值算法，最初是在力学领域提出并发展起来的。把有限元法首先用于电工设备电磁场计算的是 Winslow<sup>[4]</sup>，他用有限元法分析了加速器磁铁的饱和效应。Silverster 和 Chari<sup>[5]</sup>则提出了电机内电磁场问题的第一个通用非线性变分表述。自此以后，有限元法在各种电工问题中得到了广泛应用，与此有关的研究文章不胜枚举。其中，20 世纪 70 年代 Anderson<sup>[6]</sup>对变压器漏磁场的研究，奥田（Okuda）<sup>[7]</sup>等人对汽轮发电机端部磁场的研究，80 年代 Nakata<sup>[8]</sup>等人对电磁材料特性的数值模拟和实验研究，Morisue<sup>[9]</sup>、Biro<sup>[10]</sup>等人对规范问题的新见解，这些都是富有开创性的成果。

### 1.1.2 当前概况

目前，计算电磁学已发展成为一门综合性的学科，它涉及电磁场理论、数值分析、优化方法、计算机软件工程等多个方面，所求解的问题深入到工业生产的各领域。数千篇研究论文发表在国际性的学术会议和刊物上。

COMPUMAG (Computing Electromagnetic Fields) Conference 是这一学科最重要的世界性会议之一，从 1976 至 2005 年，这一会议共举行了 15 次，大约 3600 篇论文参加了交流。从会议交流

的论文中可以看出计算电磁学已经取得的成就和尚待解决的问题。下面首先根据国际 COMPUMAG 学会理事会前主席 C. W. Trowbridge 1996 年在总结前 10 届 COMPUMAG 会议时对当时这一领域发展状况的描述<sup>[11]</sup>，概括说明计算电磁学研究的现状：

1) 有限元法 (FEM) 的二维、三维解已经有了很大发展，包括对稳态、时变场问题和非线性问题、运动媒质问题的处理，对规范问题的正确理解等等。用有限元法解决工程问题的论文所占的比例最大。目前，三维涡流场分析仍然是最受重视的问题之一。

2) 边界元法 (BEM) 可以用来分析二维、三维问题，但边界元与有限元相比较，哪一种方法更有前途，仍没有定论。

3) 用棱边元 (Edge Element) 方式构造 FEM 和 BEM 的基函数，是对传统节点元的革新，对于描述场的变化和连续性提供了有效的物理框架。

4) 提出了用于有限元的其它泛函，其中包含了能量的上界和下界解以及构成方法。

5) 所研究场域外部问题的处理有多种方法，特别是 Kelvin 变换 (用于与 FEM 结合) 已被广泛采用。

6) 网格的自动形成和误差分析已经取得了很大进展，但是自适应三维网络的生成还有待于大力研究。

7) 电磁场分析的逆问题和优化问题发展很快，几种随机化的总体优化方法正在平行研究，但是尚未形成通用性强、易于操作的高效能方法。

8) 软件的操作与运行环境已经有了长足的进步，开发出了一批电磁场分析的商品软件，其中包括用以计算三维恒定电、磁场和涡流场及其后处理的功能，在实际工作中给设计工程师带来很大的方便。

9) 利用计算电磁学的工具已能够进行电磁设备的有效设计，避免制造昂贵的样机，能够研究许多传统方法不能解决的问

题，因而这一工具在许多工业领域得到了日益广泛的应用。

10) TEAM (Testing of Electromagnetic Analysis Method) Workshop 的有组织的学术活动是计算电磁学积极发展的标志之一。数值计算的结果是大量的数据，对于三维工程问题，数据量常超过几十兆个十进制的数字。如何从计算结果来检验计算方法和相应计算机软件的正确性，这个问题本身就构成值得研究的课题。计算电磁学的研究者们提出了一个又一个实验模型并给出详细的测试数据，分别模拟某一类工程问题，经 TEAM Workshop 的国际学术组织确认后，作为检验和比较各种算法计算精度的模型题目，称为 TEAM Workshop 问题。

纵观第 11 ~ 第 15 届 COMPUMAG 会议的论文交流，能够看出，10 年来上述情况又有新的进展，可以归结为以下几方面。

1) 有限元法应用最为广泛，仍然是数值计算方法的主流。但由于有限元网格生成与数据前处理的繁复费时，在进一步研究网格自适应技术的同时，一些研究者已经开始进行“无单元法”的新探索<sup>[12]</sup>，应用移动的最小二乘近似 (moving least square approximation)，在无网格的情况下构造基于节点集的形状函数。此外，作为对节点元的革新的棱边元法得到更多成功的应用。

2) 耦合问题的研究取得了很大进展。采用电路系统变量与电磁场变量的直接耦合来分析二维电磁场已经很普遍。电磁系统与机械运动的耦合、电磁系统与包括磁致伸缩效应在内的微型机械变形问题的耦合、磁场与熔融金属流场的耦合、电场与气流场的耦合均已吸引了不少研究者的关注。不过，由于问题的复杂性，大部分耦合问题的计算尚限于二维分析。

3) 尽管电磁场形状优化研究直到 20 世纪 90 年代初才成为 COMPUMAG 会议的一个专题，但这一领域的研究发展很快，取得了众多成果。遗传算法、模拟退火法、禁忌搜索法、灵敏度分析等不同领域发展起来的方法被应用于电磁装置的优化设计。为了获得全局最优解并加速算法收敛，近年来许多研究者致力于不同方法的有机结合，形成了一些混合优化算法。

4) 与高频电磁场、电磁波的传播相关的论文在近十年的 COMPUMAG 会议中数量激增。所采用的数值算法中, 时域有限差分法 (FDTD) 占有很大份额, 并得到深入研究; 此外, 有限元、边界元和矩量法的应用也很广泛。

5) 在数值技术方面, 大型代数方程组解法、网格技术、并行计算的研究都取得了重要进展。由于不断改进大型稀疏对称线性代数方程组系数矩阵的预处理方法, 大大减少了求解有限元离散化方程组的存储量要求和计算时间。与此同时, 借助于计算机运算速度和内存容量的迅速提高, 使得在微型计算机上求解几百万个未知数的有限元代数方程组成为可能。

6) 计算结果的实验验证研究积累了丰富成果。自 1985 年起, 每一届 COMPUMAG 会议都伴随着 TEAM Workshop 讨论会的召开。从第 14 届 COMPUMAG 会议开始, TEAM 问题作为专题并入 COMPUMAG 会议。到目前为止, 已经确认的基准算例共有 34 个<sup>[13]</sup>, 其中“模拟电磁装置的漏磁场在实心钢结构件中杂散损耗的 TEAM 问题 21”由我国学者提出<sup>[14]</sup>。

### 1.1.3 计算电磁学未来的展望

计算电磁学的研究与发展可以分为电磁场分析 (正问题)、逆问题求解 (含优化设计问题) 和电磁场工程三个部分, 它们相互衔接, 又相互融合、相互促进。电磁场工程面对的是复杂的大系统工程问题, 其中常包含电磁场及相关物理场在内的瞬态耦合问题、优化设计问题和逆问题, 通常还含有非线性。在新的世纪中, 计算电磁学正在接受新的挑战, 电磁场工程面临新的任务。许多研究者都在作深入思考, 并寻找新的突破点。文献 [15] 提出了几个值得关注的研究方向, 包括半解析数值方法, 离散形式的约束方程, 非线性电磁场, 以及寻找建立数值方法的其他途径等。展望未来, 作者认为以下方面也值得研究者注意。

#### 1. 各种快速算法的研究

1) 计算电磁学的核心问题是实现快速高效的计算, 为此需

要总结现有的电磁场数值计算方法的优缺点，提出例如无单元法那样新的方法，或者在不同算法的巧妙结合中寻找有效的新算法，从数学模型开始就提高算法的快速性。

2) 工程电磁系统的许多问题都需要反复求解几万阶甚至更高阶的代数方程组，有些问题所导出的代数方程组具有病态的系数矩阵。有时，采用现代的甚至未来的超级计算机也难以完成计算任务。面对工程实际提出的要求，研究快速、高效的代数方程组解法仍是持续的任务。目前正在探索的各种预处理共轭梯度法、快速多重多极子算法、区域分解快速算法、样条基函数应用、小波基函数应用等等将得到进一步研究。

3) 计算机网络技术的发展为在多台个人计算机上实现并行计算提供了条件。预计针对代数方程组求解、优化搜索中的方案评价过程、数值算法中的网格形成等不同目的的并行计算方法将会有更大的发展。

## 2. 全局优化方法的研究

在电磁装置与系统的制造和运行中，实现设计与控制的优化是工业界与研究者的最终目标。工程上的优化问题通常为多目标，并含有非线性约束。目前流行的各类随机化优化方法和确定性优化方法并未完全解决加快优化搜索收敛速度和避免陷入局部最优解的问题。研究与复杂电磁分析相结合的全局优化方法仍然是计算电磁学的长期课题。

## 3. 提高复杂电磁场问题的分析能力

1) 三维电磁场分析，特别是包含物体的运动、与不同物理场（热、力、流体等）相耦合的问题，仍具有相当难度。

2) 电磁材料特性在数值计算中的模拟需要进一步精细化，例如电磁参数的各向异性、非线性模拟，局部磁滞回线、电磁参数温度效应的计入等等。

3) 非线性介质中电磁波的传播，电大尺寸物体的电磁场分析，微分与积分方程的混合方法仍在探索中。

## 4. 智能化工程专家系统



尽管目前已经存在一些通用性商业软件，并且商业软件的功能也在不断丰富，但显然不能代替专用工程软件的作用。从发展来看，智能化工程专家系统是电磁场工程的具体体现。

1) 需要研究知识数据库和智能设计系统的集成，以便构造适当的工业设计环境。

2) 进一步研究各种几何建模方式和网格自适应方法，以便满足电磁-机械耦合问题、形状优化问题中重复形成网格的需要。

3) 利用图形与色彩进行各类矢量与标量三维场的图示，以便于工程技术人员检查计算结果，并对设计方案实施必要的人工干预。

#### 1.1.4 有限元法在计算电磁学发展中的地位

在电磁场数值分析中，有限差分法先于有限元法得到应用。有限差分法的特点是直接求场的基本方程和定解条件的近似解。其基本步骤是，首先将求解区域分成等距或不等距的矩形网格（二维）或立方体网格（三维），然后在网格的节点上用差分方程近似微分方程，形成离散化的差分方程组并求解之。当采用较多节点时，近似解的精度可以得到改善。有限差分法有它自己的优势，目前在流体力学的数值计算领域仍占支配地位。但有限差分法的规则网格不能满意地模拟几何形状复杂的问题，而电工设备中的电磁场却往往正是以包含复杂的几何形状和不同材料的物理参数为特征，因此有限差分法在电磁场分析中的应用逐渐被有限元法替代。

有限元法的出现，是数值分析方法研究领域内的重大突破性进展。与其它数值方法相比较，有限元法的突出优点是：

1) 有限元网格具有很大的灵活性，可以根据一定的条件构造不同类型的单元，在一个求解场域中可以使用同一类型单元，也可将不同类型单元组合起来使用，同一类型单元又可以具有不同的形状。因此，有限元网格可以很方便地模拟不同形状的边界面和交界面。