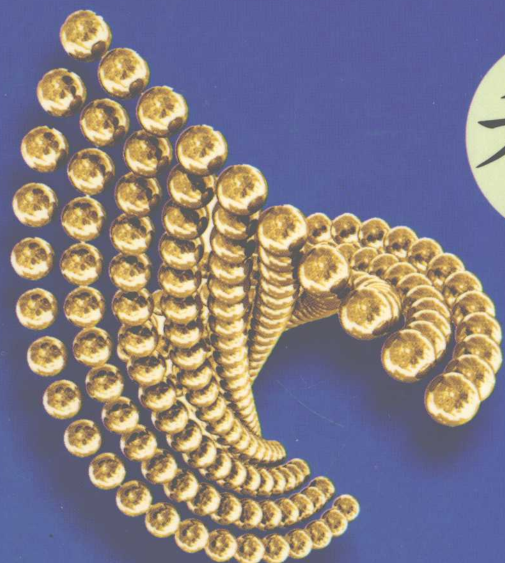
第一卷

下册（第二版）

高中竞赛数学教程

熊 斌 刘诗雄 主编



全国优秀出版社
武汉大学出版社

第一卷

下册（第二版）

高中竞赛数学教程

■ 主编 熊 斌 刘诗雄

■ 编著（以姓氏笔画为序）

边红平 冯志刚 刘诗雄

岑爱国 范端喜 姚华鹏

郭希连 董方博 裴光亚

熊 斌

全国优秀出版社

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中竞赛数学教程:第1卷下册/熊斌,刘诗雄主编.—2版.—武汉:武汉大学出版社,2003.1

ISBN 7-307-03718-1

Ⅰ.高… Ⅱ.①熊… ②刘… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第071221号

责任编辑:顾素萍　　　责任校对:黄添生　　　版式设计:支　笛

出版发行:**武汉大学出版社** (430072 武昌 珞珈山)

(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn 网址:www.wdp.whu.edu.cn)

印刷:武汉大学出版社印刷总厂

开本:787×960 1/16 印张:18.875 字数:312千字 插页:1

版次:1993年3月第1版 2003年1月第2版

2003年1月第2版第1次印刷

ISBN 7-307-03718-1/G·598 定价:21.00元

再版前言

本书自初版以来，受到了广大读者的持久欢迎。作为作者，没有比经常收到读者因使用此书而获得数学学习长足进步或参加国内外竞赛获奖后写来感谢信更高兴的事了——能为中国数学基础教育的提高和科学人才的发现培养尽绵薄之力这正是我们的初衷！谨借此书再版之机，向为中国数学教育事业倾情奉献的广大数学教育工作者致以崇高的敬意！

此次再版，我们对原书作了较大修改。其中第一卷修改由熊斌、冯志刚、范端喜完成；第二卷由刘诗雄、郭希连、边红平、岑爱国、姚华鹏完成。诚恳欢迎广大读者指正书中错漏。

编　者

2002 年 12 月

序　言

数学竞赛是当今中国教育界的热点之一。自1986年我国派出整队参加国际奥林匹克数学竞赛以来，连获佳绩，令世人侧目。国人在欢欣之余，不断升温，以至各级领导、各类学校都将它列入议事日程，此种“热”，在世界上也堪称独步。

关于“数学竞赛”在数学教育中的地位和作用，国际上是有争论的。1992年8月，在加拿大魁北克市举行的第七届国际数学教育会议上，就有一场特意设计的辩论会（Crossfire），题目就是数学竞赛。会上，攻之者说“数学竞赛只为少数天才服务，题目怪偏，不反映数学的应用功能，在社会公众中带来不好影响。”辩之者称“数学竞赛是培养学生数学兴趣的重要途径，竞赛题思考性强，有助于创造性能力的培养，天才学生的选拔对整个国家的人才开发有利等等。”辩论没有统一的结论，但是多数人似乎赞成数学竞赛，问题是要组织得好，尽量使多数人受益，数学题目有很多档次，应该在不同水平上组织竞赛，吸引更多的人参加。

我想，这里还是用得到一句名言：“在普及的基础上提高，在提高的指导下普及。”我国的数学竞赛已取得巨大成绩，频夺奖牌之际，今后也许应在普及上多下些功夫，多从教育意义上着眼。

有念及此，恰闻熊斌、刘诗雄等先生编著《高中竞赛数学教程》一书，洋洋近百万字中，有一部分内容安排得和当今的数学教学进度同步，便于一般教师采用，这倒是一个进步。数学竞赛和日常教学相结合，该会更有生命力吧！

作者告诉我，此书非常全，又非常新，几乎囊括了历届的竞赛题及世界各国近几年来的试题，可称数学竞赛的“百科全书”。以我国数学竞赛规模之大，水平之高，出这样一部“全书”，应该是合适的。

二位主要作者都是30岁上下的年轻人，尤令人高兴，我国的数学竞赛专家，早期由华罗庚、苏步青等亲自领导。近10年来则以中国科技大学等高校的一批教授为中坚。现在，欣喜地看到第三梯队也在成长。这是我国数学竞赛事业继续兴旺的标志之一。我想：他们的努力将会是跨世纪

的，应该给予支持。我对数学竞赛可说是外行，但因希望中国数学竞赛继续取得成功，遂乐于作此序，并就教于方家。

张奠宙

1992年10月8日于华东师大

前　言

数学奥林匹克是一项历史悠久的国际性智力竞赛活动。自 1894 年匈牙利揭开现代中学生数学竞赛的序幕始，近百年来，开展数学竞赛的范围由欧洲而北美，而澳洲，而亚洲、非洲，不断扩大。尤为引人注目的是，在有着五千年光辉文明的中华大地，鼓励、支持和参加数学竞赛正在成为一种社会风尚。

悠久的历史，普遍的热情，广泛的参与，促成了数学奥林匹克的形式和内容日臻完善。一门奥林匹克数学（又称竞赛数学）正在发育成熟。奥林匹克数学是数学百花园中的一株奇葩，她把现代的数学内容与趣味性的陈述、独创性的技巧有机地结合起来，充分展示了数学的统一美、简洁美、对称美和奇异美。

作为一次甘冒失败风险的尝试，我们编写了这套《高中竞赛数学教程》。也许她过于早产，过于稚嫩。但我们还是抱着聊胜于无的想法将她献给我们所敬重的数学教育界的前辈、专家学者和年轻的同仁，献给跃跃欲试立志在数学奥林匹克赛场上一抖雄风的广大中学生朋友。

鉴于数学奥林匹克培训在我国已经形成的特点，《高中竞赛数学教程》的编写突出了以下两点：(1) 基础与提高并重，本书采用同一内容分“A”和“B”两部分的编写方法，“A”强调基础，帮助学生从竞赛的角度进一步深化对中学数学内容的认识，掌握中学数学以外的竞赛内容；“B”强调提高，帮助学生掌握奥林匹克数学的一些较难的内容和技巧。(2) 同步与超前结合。“A”内容顺序与中学数学内容同步，但在数学思想方法的渗透和思维能力与技巧的培养方面又有一定的超前性，以便帮助那些出类拔萃的学生更快地提高；“B”则不受教材知识顺序的限制，在突出重点的基础上加强知识和方法的纵横联系，帮助学生从整体上把握奥林匹克数学的内容，提高数学素养和综合解题的能力。

这套《高中竞赛数学教程》由熊斌、刘诗雄共同策划和主编。其中第2,4,5,7,8,9,10,13,14 章由熊斌和冯志刚编写；第 3,6,16,20 章由裴光亚编写；第 15,18,19 章由董方博编写；第 1,11,12,17 章由刘诗雄编写。

正值《高中竞赛数学教程》出版之机，我们向热情为本书题写书名的全国政协副主席、我国数学竞赛创始人之一的著名数学家苏步青老前辈致

以无比的敬意和谢忱；向支持和关心本书写作的数学家、数学教育家张奠宙教授致以崇高的谢意；我们要感谢为数学竞赛作出贡献的所有专家学者和中学数学教师，本书的许多材料来源于他们的智慧和创造。

由于水平所限，书中错漏难免，敬请专家和读者批评指正。作为抛砖引玉，我们热情地期待更多的优秀奥林匹克数学教材问世。

编　　者

1992 年 9 月 1 日

符号说明

$\mathbf{N}$	自然数0,1,2,…构成的集合
$\mathbf{N}^+$	正整数集
$\arg z$	复数z的辐角主值
$\tan\alpha$	角α的正切函数值
$\cot\alpha$	角α的余切函数值
(a,b)	整数a,b的最大公约数
$[a,b]$	整数a,b的最小公倍数
$a\mid b$	整数a能整除b
$p^\alpha \parallel a$	表示$p^\alpha\mid a$，而$p^{\alpha+1}\nmid a$，这里p为质数，$\alpha\in\mathbf{N}^+$
$[x]$	不超过实数x的最大整数
$\{x\}$	实数x的小数部分，即$\{x\}=x-[x]$
$\binom{n}{m}$	从n个元素中选出m个元素的组合数
$\delta_m(a)$	a对模m的指数
$\mathbf{Z}[x]$	整系数多项式全体构成的集合
$\deg f$	多项式$f(x)$的次数

目　录

第 6 章 复 数

A

§6.1 复数的概念与运算

1. 复数的概念

一个复数 z 可以写成几种不同的形式:

代数形式: $z=a+b\mathrm{i}$, $a,b\in\mathbf{R}$;

三角形式: $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$, $r\geqslant 0$, $\theta\in\mathbf{R}$;

指数形式: $z=re^{\mathrm{i}\theta}$, $r\geqslant 0$, $\theta\in\mathbf{R}$;

其中, $e^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$, 角 θ 为复数 z 的**辐角**, 除相差 2π 的一个整数倍外, θ 是确定的.

我们称 z 的满足 $0\leqslant\theta<2\pi$ 的辐角 θ 为 z 的**主辐角**, 记为 $\arg z$. 指数形式中, r 是 z 的**模长**, 记为 $|z|$. 代数形式中, 实数 a,b 分别称为 z 的**实部和虚部**, 记为 $\mathrm{Re}(z)$和 $\mathrm{Im}(z)$. 而 i 是虚数单位, 满足 $\mathrm{i}^2=-1$.

两个复数相等的充要条件是它们的实部、虚部对应相等, 或者它们的模与辐角主值对应相等.

如果 $z=a+b\mathrm{i}$, $w=c+d\mathrm{i}$, $a,b,c,d\in\mathbf{R}$, 那么

$$z+w=(a+c)+\mathrm{i}(b+d),$$

在几何上对应于以 z 和 w 为邻边的平行四边形的一条对角线.

如果 $z=re^{\mathrm{i}\theta}$, $w=se^{\mathrm{i}\varphi}$, $r,s\geqslant 0$, $\theta,\varphi\in\mathbf{R}$, 那么 $zw=rse^{\mathrm{i}(\theta+\varphi)}$. 注意到 $|zw|=rs=|z||w|$, 以及 $\arg zw$ 等于 $\arg z+\arg w$ 或者与 $\arg z+\arg w$ 相差 2π 的整数倍, 因此在相乘时, 模相乘, 辐角相加.

例 1 设复数 α,β 满足 $|\alpha|=|\beta|=1$, $\alpha+\beta+1=0$. 证明: α,β 都是 1 的立方根.

证法 1 运用代数形式, 设 $\alpha=a+b\mathrm{i}$, $\beta=c+d\mathrm{i}$, $a,b,c,d\in\mathbf{R}$, 则由 $|\alpha|=|\beta|=1$ 有

$$a^2+b^2=1,\quad c^2+d^2=1. \qquad ①$$

再由 $\alpha+\beta=-1$，根据复数相等的条件得

$$a+c=-1,\quad b+d=0. \qquad ②$$

将上述①,②中 4 式联立，解得

$$a=c=-\frac{1}{2},\ b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ d=\mp\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

所以 $\alpha=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$\beta=-\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$. 可见 $\alpha^3=\beta^3=1$.

证法 2 运用三角形式. 由 $|\alpha|=|\beta|=1$，可设

$$\alpha=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta,\ \beta=\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi\quad(\theta,\varphi\in\mathbf{R}).$$

再由 $\alpha+\beta=-1$ 有

$$\begin{cases}\cos\theta+\cos\varphi=-1,\\ \sin\theta+\sin\varphi=0.\end{cases}$$

由此求得 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$，$\sin\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，从而 $\cos\varphi=-\frac{1}{2}$，$\sin\varphi=\mp\frac{\sqrt{3}}{2}$. 所以

$$\alpha=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},\ \beta=-\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

证法 3 考虑几何意义. 由 $\alpha+\beta=-1$ 及 $|\alpha|=|\beta|=1$，可设 $\overrightarrow{OA}=\alpha$，$\overrightarrow{OB}=\beta$，$\overrightarrow{OC}=-1$，如图 6-1. 根据复数加法的几何意义，可知四边形 $OACB$ 是平行四边形，且各边相等，从而

$$\angle XOA=120^\circ,\quad \angle XOB=120^\circ.$$

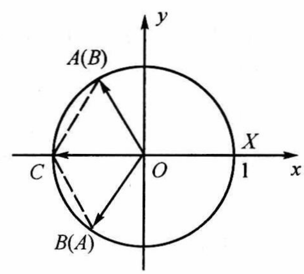


图 6-1

因此 $\alpha=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$\beta=-\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

证法 4 运用共轭复数的运算技巧. 由 $\alpha+\beta=-1$，知 $|\alpha+\beta|^2=1$，即

$$(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})=1.$$

展开上式，并利用 $\alpha\overline{\alpha}=|\alpha|^2=1$，$\beta\overline{\beta}=|\beta|^2=1$ 进行化简，得

$$\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta+1=0.$$

将 $\beta=-\alpha-1$，$\overline{\beta}=-\overline{\alpha}-1$ 代入上式并化简，得

$$\alpha+\overline{\alpha}+1=0.$$

将上式两边同乘以 α，得 $\alpha^2+\alpha+1=0$. 所以 $\alpha^3=1$. 同理 $\beta^3=1$.

上述例子中采用的 4 种证明方法是处理复数问题的基本方法和技巧.

2. 复数的运算

这里暂只涉及复数的四则运算及开(乘)方运算.

例 2 已知复数 $z=\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$，$u=\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta$，且 $z+u=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\mathrm{i}$.

(1) 求 $\tan(\alpha+\beta)$的值. (2) 求证：$z^2+u^2+zu=0$.

解 (1) 依题设，有

$$\begin{aligned} z+u &=(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)+(\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta) \\ &=(\cos\alpha+\cos\beta)+\mathrm{i}(\sin\alpha+\sin\beta) \\ &=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\mathrm{i}. \end{aligned}$$

根据复数相等的充要条件，知

$$\begin{cases} \cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{4}{5}, \\ \sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{3}{5}. \end{cases}$$

因此

$$\begin{cases} 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\dfrac{4}{5}, & ① \\ 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\dfrac{3}{5}. & ② \end{cases}$$

②÷①得 $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{4}$. 所以

$$\tan(\alpha+\beta)=\left(2\tan\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Big/\left(1-\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{24}{7}.$$

(2) 由(1)可得

$$\sin(\alpha+\beta)=\left(2\tan\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Big/\left(1+\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{24}{25}.$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\left(1-\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Big/\left(1+\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{7}{25}.$$

而 $zu=(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)(\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta)=\cos(\alpha+\beta)+\mathrm{i}\sin(\alpha+\beta)=\frac{7}{25}+\frac{24}{25}\mathrm{i}$，所以

$$z^2+u^2+zu=(z+u)^2-zu=\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\mathrm{i}\right)^2-\left(\frac{7}{25}+\frac{24}{25}\mathrm{i}\right)=0.$$

例 3 给定实数 a,b,c. 已知复数 z_1,z_2,z_3 满足

$$\begin{cases} |z_1|=|z_2|=|z_3|=1, & ① \\ \dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_3}+\dfrac{z_3}{z_1}=1. & ② \end{cases}$$

求 $|az_1+bz_2+cz_3|$的值.

解 令 $p=\frac{z_1}{z_2}$，$q=\frac{z_2}{z_3}$，则由①知 $|p|=|q|=1$. 代入②，知 $p+q+$

$\dfrac{1}{pq}=1$，即 $p+q+\overline{pq}=1$. 于是，有

$$\sin\alpha+\sin\beta-\sin(\alpha+\beta)=0, \qquad ③$$

这里 $\alpha=\arg p$，$\beta=\arg q$. 由③得

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=0.$$

所以，$\dfrac{\alpha}{2},\dfrac{\beta}{2},\dfrac{\alpha+\beta}{2}$中必有一个为 0 或 π，即 p,q 或 pq 中必有一个数为实数，不妨设 $p\in\mathbf{R}$. 则由 $|p|=1$，知 $p=1$ 或 -1.

如果 $p=-1$，则 $q-\bar{q}=2$，这是不可能的．于是，$p=1$，此时 $q+\bar{q}=0$. 结合 $|q|=1$，得 $q=\pm\mathrm{i}$. 从而

$$\begin{aligned}|az_1+bz_2+cz_3|&=\left|a\frac{z_1}{z_2}+b+c\frac{z_3}{z_2}\right|=|ap+b+c\bar{q}|\\&=|a+b\pm c\mathrm{i}|=\sqrt{(a+b)^2+c^2}.\end{aligned}$$

依对称性，还有两种可能．所以 $|az_1+bz_2+cz_3|=\sqrt{(a+b)^2+c^2}$ 或 $\sqrt{a^2+(b+c)^2}$ 或 $\sqrt{b^2+(a+c)^2}$.

例 4 方程 $x^{10}+(13x-1)^{10}=0$ 的 10 个复数根分别为 $r_1,\overline{r_1},r_2,\overline{r_2},r_3,\overline{r_3},r_4,\overline{r_4},r_5,\overline{r_5}$. 求代数式

$$\frac{1}{r_1\overline{r_1}}+\frac{1}{r_2\overline{r_2}}+\cdots+\frac{1}{r_5\overline{r_5}}$$

的值.

解 设 $\varepsilon=\cos\dfrac{\pi}{10}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{10}$，则 $\varepsilon^{10}=-1$. 由方程

$$(13x-1)^{10}=-x^{10},$$

我们可设 $13r_k-1=r_k\cdot\varepsilon^{2k-1}$，$k=1,2,\cdots,5$. 于是 $\dfrac{1}{r_k}=13-\varepsilon^{2k-1}$. 所以，有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{r_k\overline{r_k}}&=\sum_{k=1}^{5}(13-\varepsilon^{2k-1})(13-\bar{\varepsilon}^{2k-1})\\&=\sum_{k=1}^{5}[170-13(\varepsilon^{2k-1}+\bar{\varepsilon}^{2k-1})]\\&=850-13\sum_{k=1}^{5}(\varepsilon^{2k-1}+\bar{\varepsilon}^{2k-1})\\&=850-26\left(\cos\frac{\pi}{10}+\cos\frac{3\pi}{10}+\cos\frac{5\pi}{10}+\cos\frac{7\pi}{10}+\cos\frac{9\pi}{10}\right)\\&=850.\end{aligned}$$

于是，所求代数式的值为 850.

3. 复数的取模与取共轭运算

由于复数对应于复平面上的一个复向量，它与实数的最重要的区别就在于，它不仅有长度(模长)，还有方向(辐角). 所以，复数的运算中，取模与取共轭就是其特有的运算了.

这两种运算对于四则运算成立如下的一些关系：

(1) $\overline{z_1 \pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$;

(2) $\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ $(z_2\neq 0)$;

(3) $\overline{z}=z$ 的充要条件是 $z\in\mathbf{R}$;

(4) $z+\overline{z}=0$ 的充要条件是 z 为纯虚数或零；

(5) $\mathrm{Re}(z)=\dfrac{1}{2}(z+\overline{z})$, $\mathrm{Im}(z)=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(z-\overline{z})$;

(6) $|z|=|\overline{z}|$, $|z|^2=z\cdot\overline{z}$;

(7) $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ $(z_2\neq 0)$;

(8) $||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$，当 z_1 或 z_2 中有一个为零时，上述不等式成为等式；当 $z_1z_2\neq 0$ 时，当且仅当 $|\arg z_1-\arg z_2|=\pi$ 时，左边取等号；当且仅当 $\arg z_1=\arg z_2$ 时，右边取等号.

类似地，还有

$$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1-z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|.$$

这两个不等式称为**三角形不等式**.

(9) $\max\{\mathrm{Re}(z),\mathrm{Im}(z)\}\leqslant|z|\leqslant|\mathrm{Re}(z)|+|\mathrm{Im}(z)|$.

例 5 已知复数 z_1,z_2 满足如下条件：

$$|z_1|=2,\ |z_2|=3,\ 3z_1-2z_2=2-\mathrm{i}.$$

求 z_1z_2 的值.

解 由条件，可知 $z_1\overline{z_1}=4$，$z_2\overline{z_2}=9$，于是

$$3z_1-2z_2=\frac{1}{3}z_1z_2\overline{z_2}-\frac{1}{2}z_2z_1\overline{z_1}=\frac{1}{6}z_1z_2(2\,\overline{z_2}-3\,\overline{z_1}).$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}z_1z_2&=\frac{6(3z_1-2z_2)}{2\,\overline{z_2}-3\,\overline{z_1}}=-\frac{6(3z_1-2z_2)}{\overline{3z_1-2z_2}}=-\frac{6(2-\mathrm{i})}{2+\mathrm{i}}\\&=-\frac{6}{5}(2-\mathrm{i})^2=-\frac{18}{5}+\frac{24}{5}\mathrm{i}.\end{aligned}$$

故 z_1z_2 的值为 $-\dfrac{18}{5}+\dfrac{24}{5}\mathrm{i}$.

说明 此题利用复数的三角形式亦能得到结果，只是不如现在的做法

更能体现条件与结论之间的本质联系.

例 6 已知复数 z 满足 $11z^{10}+10\mathrm{i}z^{9}+10\mathrm{i}z-11=0$. 证明：$|z|=1$.

证 设 $z=a+b\mathrm{i}$. 由条件，可知 $|z^9||11z+10\mathrm{i}|=|11-10\mathrm{i}z|$，即

$$|z|^9\cdot\sqrt{121(a^2+b^2)+220b+100}=\sqrt{100(a^2+b^2)+220b+121}. \quad ①$$

如果 $|z|>1$，即 $a^2+b^2>1$，则

$$121(a^2+b^2)+220b+100>100(a^2+b^2)+220b+121,$$

这导致①式左边大于右边，矛盾.

类似地，如果 $|z|<1$，将导致①式左边小于右边，亦得矛盾.

所以，$|z|=1$.

说明 本题直接处理难以达到目的，而巧用不等式分析，却使结论浮出了水面.

例 7 设 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 为复数，满足 $\sum\limits_{k=1}^{n}|z_k|=1$. 求证：这 n 个复数中，必存在若干个复数，它们的和的模不小于 1/4.

证 设 $z_k=x_k+\mathrm{i}y_k$，$x_k,y_k\in\mathbf{R}$ $(k=1,2,\cdots,n)$，则 $|z_k|\leqslant|x_k|+|y_k|$. 那么由题设有

$$\begin{aligned}1&=\sum_{k=1}^{n}|z_k|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|x_k|+\sum_{k=1}^{n}|y_k|\\&=\sum_{x_i\geqslant0}x_i-\sum_{x_j<0}x_j+\sum_{y_k\geqslant0}y_k-\sum_{y_t<0}y_t.\end{aligned}$$

故 $\sum\limits_{x_i\geqslant0}x_i$，$-\sum\limits_{x_j<0}x_j$，$\sum\limits_{y_k\geqslant0}y_k$，$-\sum\limits_{y_t<0}y_t$ 中必有一个不小于 $\frac{1}{4}$，不妨设 $\sum\limits_{x_i\geqslant0}x_i\geqslant\frac{1}{4}$. 于是

$$\left|\sum_{x_i\geqslant0}z_i\right|=\left|\sum_{x_i\geqslant0}x_i+\mathrm{i}\sum_{x_i\geqslant0}y_i\right|\geqslant\left|\sum_{x_i\geqslant0}x_i\right|\geqslant\frac{1}{4}.$$

所以命题成立.

说明 这里巧妙地利用了前面所列的性质(9)，结合抽屉原则，问题迎刃而解. 性质(9)是连接复数的模与其实部和虚部的纽带.

4. 复数在代数方面的应用

复数概念的提出，本身为许多代数问题提供了另一种处理方法.

例 8 设 $a,b,n\in\mathbf{N}^+$. 证明：存在 $x,y\in\mathbf{Z}$，使得

$$(a^2+b^2)^n=x^2+y^2.$$

证 令 $z=a+b\mathrm{i}$，于是

$$(a^2+b^2)^n=(|z|^2)^n=|z^n|^2.$$

设 $z^n=x+y\mathrm{i}$. 由于 a,b 为正整数，由二项式定理知 $x,y\in\mathbf{Z}$，且