应用型本科“十二五”重点规划教材

简明概率论与数理统计

北京交通大学海滨学院数学教研室 编

北京交通大学出版社
http://press.bjtu.edu.cn

应用型本科“十二五”重点规划教材

简明概率论与数理统计

北京交通大学海滨学院数学教研室　编

主　编　王其元

参　编　修　春　李永艳　安玉冉　王宝丽

北京交通大学出版社

·北京·

内容简介

本书主要特色是简单明了，循序渐进，易读易学，且能够启发和培养学生的自学能力。全书由随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理、统计量及抽样分布、参数估计、假设检验共8章内容组成。书中每章末配有本章小结，以及章、节两组习题和参考答案。

本书适合作为应用型本科院校工科类、经济管理类专业教材，也可以作为一般高等院校的教学参考书，并可供考研学生参考。

图书在版编目（CIP）数据

简明概率论与数理统计/北京交通大学海滨学院数学教研室编. —北京：北京交通大学出版社，2012

（应用型本科“十二五”重点规划教材）

ISBN 978-7-5121-1133-2

Ⅰ. ① 简… Ⅱ. ① 北… Ⅲ. ① 概率论-高等学校-教材 ② 数理统计-高等学校-教材 Ⅳ. ① O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 194089 号

责任编辑：郝建芳　郭海云　　特邀编辑：吕　宏
出版发行：北京交通大学出版社　　电话：010-51686414
地　　址：北京市海淀区高梁桥斜街44号　　邮编：100044
印 刷 者：北京瑞达方舟印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185×230　印张：11　字数：246千字
版　　次：2012年8月第1版　2012年8月第1次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5121-1133-2/O·110
印　　数：1～1 500 册　定价：26.00 元

本书如有质量问题，请向北京交通大学出版社质监组反映。对您的意见和批评，我们表示欢迎和感谢。
投诉电话：010-51686043，51686008；传真：010-62225406；E-mail：press@bjtu.edu.cn。

前　　言

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律的一门数学学科，是工科院校诸多专业的一门重要基础课。为了适应应用型本科学生的水平和教学要求，按国家对工科类本科数学教学的基本要求及研究生入学考试大纲编写了《简明概率论与数理统计》这本书。在选材和叙述上力求简明、扼要、够用。

全书主要由概率论基础知识（第1章至第5章）和数理统计初步（第6章至第8章）两部分组成。每节后的习题供基本练习用，每章后的习题中有少部分题目可供选做提高，以备考研使用。

参加本书编写工作的有修春（第1、5章），李永艳（第2、3章），安玉冉（第4章），王宝丽（第6、7章），王其元（第8章），最后由王其元统稿。

北京交通大学海滨学院的领导，对本书的编写始终给予关心和帮助，谨此致谢。

最后，我们特别感谢北京交通大学出版社的领导和编辑，由于他们的支持和出色工作，本书才能顺利出版。

由于编者水平有限，书中可能存在不当和错误之处，恳请读者批评指正。

编者

2012年6月于北京交通大学海滨学院

目　　录

第 1 章　随机事件及其概率 …… (1)
1.1　随机事件及其运算 …… (1)
1.2　随机事件的频率与概率 …… (5)
1.3　古典概型与几何概型 …… (8)
1.4　条件概率 …… (12)
1.5　事件的独立性 …… (16)
第 2 章　随机变量及其分布 …… (23)
2.1　随机变量及其分布函数 …… (23)
2.2　离散型随机变量的概率分布 …… (25)
2.3　连续型随机变量及其概率分布 …… (30)
2.4　随机变量函数的分布 …… (36)
第 3 章　多维随机变量及其分布 …… (43)
3.1　二维随机变量及其分布函数 …… (43)
3.2　二维离散型随机变量 …… (44)
3.3　二维连续型随机变量的分布 …… (49)
3.4　随机变量的独立性 …… (54)
3.5　两个随机变量的函数的分布 …… (56)
第 4 章　随机变量的数字特征 …… (62)
4.1　随机变量的数学期望及其性质 …… (62)
4.2　随机变量的方差及其性质 …… (69)
4.3　协方差、相关系数、矩及其性质 …… (74)
第 5 章　大数定律及中心极限定理 …… (84)
5.1　大数定律 …… (84)
5.2　中心极限定理 …… (86)
第 6 章　统计量及抽样分布 …… (92)
6.1　基本概念 …… (92)
6.2　常见统计量的分布 …… (96)
6.3　正态总体的抽样分布 …… (100)
第 7 章　参数估计 …… (106)
7.1　点估计 …… (106)

7.2　估计量的评价标准 …… (112)
7.3　区间估计 …… (114)
第 8 章　假设检验 …… (125)
8.1　假设检验的基本思想和步骤 …… (125)
8.2　正态总体参数的检验 …… (127)
附录 A　习题参考答案 …… (135)
附录 B　标准正态分布表 …… (156)
附录 C　泊松分布表 …… (157)
附录 D　t 分布表 …… (159)
附录 E　χ^2分布表 …… (161)
附录 F　F 分布表 …… (164)
参考文献 …… (168)

第 1 章　随机事件及其概率

在自然界和人类社会生活中普遍存在着以下两类现象. 一类是确定性现象，即在一定条件下必然发生或必然不发生的现象，例如，向上抛一块石子必然下落、同性电荷相互排斥，等等. 另一类是随机现象，即在同样条件下进行一系列重复试验或观测，每次出现的结果并不完全一样，并且在每次试验或观察前无法预料确切的结果，其结果呈现出不确定性. 例如，在相同的条件下抛同一枚硬币，其结果可能是正面朝上，也可能是反面朝上，并且在每次抛掷之前无法肯定抛掷的结果是什么；用同一门炮向同一目标射击，各次弹着点不尽相同，在一次射击之前不能预测弹着点的确切位置，等等.

人们经过长期实践及深入研究之后，发现随机现象虽然就每次试验或观察结果来说，具有不确定性，但在大量重复试验或观察下，它的结果却呈现出某种规律性. 例如，多次重复抛一枚硬币得到正面朝上的次数大致有一半；同一门炮射击同一目标的弹着点按照一定规律分布，等等. 这种在大量重复试验或观察中所呈现出的固有规律性，一般称之为随机现象的统计规律性.

概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科，其理论与方法广泛应用于各个学科分支和各个生产部门. 在探索和研究中，可以进行预测与决策，寻找并发现大千世界中各种偶然现象中的必然性.

1.1　随机事件及其运算

1.1.1　随机试验

为了研究随机现象的统计规律性而进行的各种试验或观察统称为随机试验，简称试验，通常用字母 E 表示.

E_1：抛一枚硬币，观察正面 H 及反面 T 出现的情况；

E_2：记录某市 120 急救电话一昼夜接到的呼叫次数；

E_3：在一批灯泡中任意取一只，测试它的寿命.

概括起来，上述试验具有下列特点.

(1) 可重复性. 试验可以在相同的条件下重复地进行.

(2) 可观察性. 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果.

(3) 不确定性. 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

1.1.2 样本空间

对于随机试验，尽管每次试验之前不能预知试验的结果，但试验的所有可能结果是明确的. 通常把随机试验的每一种可能的结果称为一个样本点，它们的全体称为样本空间，记为 Ω（或 S）. 例如：

试验 E_1 的样本空间由两个样本点组成，样本空间为

$$\Omega_1=\{H, T\}$$

试验 E_2 的样本空间有可列个样本点组成，样本空间为

$$\Omega_2=\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

试验 E_3 的样本空间为

$$\Omega_3=\{t \mid t\geqslant 0\}$$

注意 样本空间的元素是由试验的目的确定的，试验的目的不一样，其样本空间也不一样.

例如，E_4：将一枚硬币抛掷 3 次，观察正面 H 及反面 T 出现的情况.

$$\Omega_4=\{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

E_5：将一枚硬币抛掷 3 次，观察正面出现的次数.

$$\Omega_5=\{0, 1, 2, 3\}$$

1.1.3 随机事件

在随机试验中，通常关心的是那些可能发生也可能不发生的事情，称为随机事件，它实际上是样本空间的子集. 随机事件常用大写字母 A，B，C 等表示. 在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件发生.

特别地，由一个样本点组成的单点集，称为基本事件. 例如，

试验 E_1 有两个基本事件：$\{H\}$，$\{T\}$.

样本空间 Ω 包含所有的样本点，它是 Ω 自身的子集，在每次试验中它总是发生的，称为必然事件. 空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，它也作为样本空间的子集，它在每次试验中都不发生，称为不可能事件.

例如，在抛掷骰子的试验中，样本空间为 $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. 于是

事件 A：“点数为偶数”可表示为 $A=\{2, 4, 6\}$；

事件 B：“点数小于 7”$=\Omega$；

事件 C：“点数为 8”$=\varnothing$.

显然必然事件和不可能事件都是确定性事件，为讨论方便，今后将它们看做是两个特殊的随机事件，并将随机事件简称为事件.

1.1.4 事件的关系和运算

因为事件是样本空间的某一个子集合，故事件间的关系和运算可按集合之间的关系与运算来处理，下面给出这些关系和运算在概率论中的提法和含义.

(1) $A\subset B$，则称事件 B 包含事件 A，或事件 A 包含于事件 B，或 A 是 B 的子事件. 其含义：若事件 A 发生必然导致事件 B 发生. 显然，$\varnothing\subset A\subset\Omega$.

(2) $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$.

(3) 事件 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的和（或并）. 其含义是：当且仅当事件 A，B 至少有一个发生时事件 $A\cup B$ 发生. $A\cup B$ 有时也记为 $A+B$.

类似地，称 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 为 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的和事件，称 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 为可列个事件 A_1，A_2，…，A_n，…的和事件.

(4) 事件 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的积（或交）. 其含义是：当且仅当事件 A，B 同时发生时事件 $A\cap B$ 发生. $A\cap B$ 有时也记为 AB.

类似地，称 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 为 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的积事件，称 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 为可列个事件 A_1，A_2，…，A_n，…的积事件.

(5) 事件 $A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的差. 其含义是：当且仅当事件 A 发生且事件 B 不发生时事件 $A-B$ 发生.

例如，在投掷骰子的试验中，记事件

A：“点数为奇数”，B：“点数小于 5”.

则

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5\};\quad A\cap B=\{1,3\};\quad A-B=\{5\}$$

(6) 若 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 是互不相容的，或称是互斥的. 其含义是事件 A 与事件 B 不能同时发生.

例如，基本事件是两两互不相容的.

(7) 若 $A\cup B=\Omega$ 且 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互为对立事件，或称事件 A 与事件 B 互为逆事件. 其含义是：对每次试验而言，事件 A，B 中必有一个发生且仅有一个发生. 事件 A 的对立事件记为 $\overline{A}$. 于是 $\overline{A}=\Omega-A$.

事件的关系和运算可用文氏图形象地表示如下（见图 1-1）.

易见，事件的运算满足如下基本关系.

(1) $A\overline{A}=\varnothing$；$A\cup\overline{A}=\Omega$；$\overline{A}=\Omega-A$.

(2) 若 $A\subset B$，则 $A\cup B=B$，$AB=A$.

(3) $A-B=A\overline{B}=A-AB$；$A\cup B=A\cup(B-A)$.

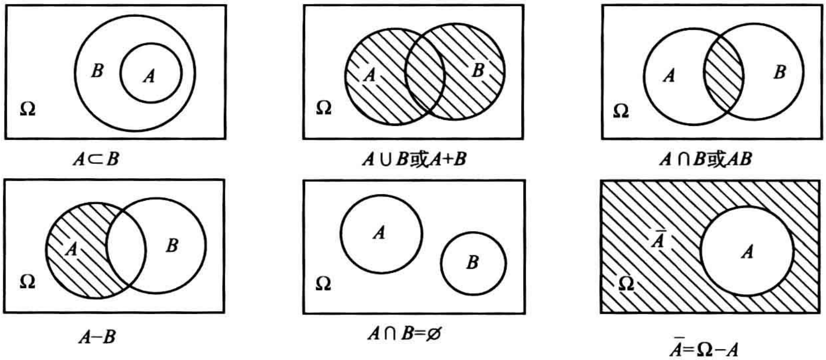

图 1-1

1.1.5 事件的运算规律

由集合的运算律，易给出事件间的运算律. 设 A，B，C 为同一随机试验 E 中的事件，则有

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

(2) 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(3) 分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

(4) 自反律 $\overline{\overline{A}}=A$；

(5) 对偶律 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

注意 上述各运算可推广到有限个或可列个事件的情形.

例 1-1 甲、乙、丙三人各射一次靶，记 $A=\{$甲中靶$\}$，$B=\{$乙中靶$\}$，$C=\{$丙中靶$\}$，则可用上述三个事件的运算来分别表示下列各事件.

(1) “甲未中靶”：$\overline{A}$；

(2) “甲中靶而乙未中靶”：$A\overline{B}$ 或 $A-B$；

(3) “三人中恰有一人中靶”：$A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$；

(4) “三人中至少有一人中靶”：$A\cup B\cup C$；

(5) “三人中至少有一人未中靶”：$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$ 或 $\overline{ABC}$；

(6) “三人中恰有两人中靶”：$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$；

(7) “三人中至少有两人中靶”：$AB\cup AC\cup BC$；

(8)“三人均未中靶”：$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$或$\overline{A\cup B\cup C}$；

(9)“三人中至多有一人中靶”：$\overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{A}\,\overline{C}\cup\overline{B}\,\overline{C}$.

习题 1-1

1. 写出下列随机试验的样本空间.

(1) 同时抛两枚硬币，观察正面朝上的次数；

(2) 同时掷两枚骰子，观察两枚骰子出现的点数之和；

(3) 生产产品直到得到 10 件正品为止，记录生产产品的总件数；

(4) 在某十字路口上，1 h 内通过的机动车辆数.

2. 设 A，B，C 为 3 个随机事件，试用 A，B，C 的运算表示下列事件.

(1) A，B 都发生而 C 不发生；

(2) A，B 至少有一个发生而 C 不发生；

(3) A，B，C 都发生或都不发生；

(4) A，B，C 不多于一个发生；

(5) A，B，C 不多于两个发生；

(6) A，B，C 恰有两个发生；

(7) A，B，C 至少有两个发生.

3. 下列各式哪个成立哪个不成立.

(1) 若 $A\subset B$，则$\overline{B}\subset\overline{A}$；　(2) $(A\cup B)-B=A$；　(3) $A(B-C)=AB-AC$.

4. 设 A，B 为两个事件，若 $AB=\overline{A}\cap\overline{B}$，问 A 和 B 有什么关系.

5. 设 Ω 为随机试验的样本空间，A，B 为随机事件，且 $\Omega=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 5\}$，$A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$. 试求：$A\cup B$，$AB$，$B-A$，$\overline{A}$.

6. 已知随机事件 A 和事件 B 是对立事件，求证：$\overline{A}$和 $\overline{B}$也是对立事件.

1.2　随机事件的频率与概率

对于一个随机事件来说，它在一次试验中可能发生，也可能不发生. 常常希望知道某些事件在一次试验中发生的机会有多大. 例如，为了确保保险费，保险公司希望知道某些意外事故发生的可能性大小. 希望找到一个合适的数来描述事件在一次试验中发生的可能性大小. 为此，本节首先引入频率的概念，它描述了事件发生的频繁程度，进而引出表示事件在一次试验中发生的可能性大小的数——概率.

1.2.1　频率

定义 1-1　若在相同的条件下进行 n 次试验，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的

频数，则称 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 发生的**频率**.

由频率的定义可得到它有以下基本性质.

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$.

(2) $f_n(\Omega)=1$.

(3) 若 A_1，A_2，…，A_k 是两两互不相容的事件，则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k)$$

大量试验证实，当重复试验的次数 n 逐渐增大时，频率 $f_n(A)$ 呈现出稳定性，逐渐稳定于某个常数. 这种“频率稳定性”即通常所说的统计规律性. 因此，让试验重复大量次数，计算频率 $f_n(A)$，以它来表示事件 A 发生的可能性大小是合适的.

例 1－2 考虑“投硬币”这个试验，历史上曾有人做过大量的重复试验，结果如表 1－1 所示.

表 1－1

试验者	试验次数 n	出现正面次 n_A	频率 $f_n(A)$
德・摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
K・皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
K・皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

从表 1－1 中的数据可以看出，随着抛硬币次数 n 的增大，频率 $f_n(A)$ 呈现出稳定性，总是在 0.5 附近摆动，且摆动的幅度越来越小，逐渐稳定于 0.5. 一般把 0.5 称为事件 A 发生的概率.

但是，在实际中，不可能对每一个事件都做大量的试验，然后求得事件的频率，用以表示事件发生可能性的大小. 同时，为了理论研究的需要，从频率的稳定性和频率的性质得到启发，给出如下表示事件发生可能性大小的概率的定义.

1.2.2 概率的公理化定义

任何一个数学概念都是对现实世界的抽象，这种抽象使得其具有广泛的适用性. 概率的频率解释为概率提供了经验基础，但是不能作为一个严格的数学定义，从概率论有关问题的研究算起，经过近 3 个世纪的漫长探索历程，人们才真正完整地解决了概率的严格数学定义. 1933 年，苏联著名数学家柯尔莫哥洛夫，在他的《概率论的基本概念》一书中给出了现在已被广泛接受的概率公理化体系，第一次将概率论建立在严密的逻辑基础上.

定义 1－2 设 E 是随机试验，Ω 是它的样本空间，对于 E 中的每一个事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，若 $P(A)$ 满足下列 3 个基本性质：

(1) 非负性：对于每个事件 A，有 $P(A) \geqslant 0$；

(2) 完备性：$P(\Omega)=1$；

(3) 可列可加性：设 A_1，A_2，…，A_n 是两两互不相容的事件，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

概率 $P(A)$ 除了具有以上 3 个基本性质，还有如下的性质 (4)～性质(7).

(4) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$，$P(\varnothing)=0$.

注意　不可能事件的概率为 0，反之不然.

(5) 加法公式：对任意事件 A，B，如图 1-2 所示，有

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

特别地，当 A，B 互不相容时，$P(A \cup B)=P(A)+P(B)$.

当 $B \subset A$ 时，$P(A \cup B)=P(A)$.

性质 (5) 可推广：对于任意事件 A，B，C，有

$$P(A \cup B \cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

当 A_1，A_2，…，A_n互不相容时，有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

其中，n 为正整数.

(6) 减法公式：$P(B-A)=P(B)-P(AB)$.

如图 1-3 所示.

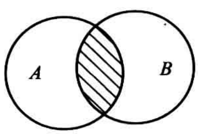

图 1-2

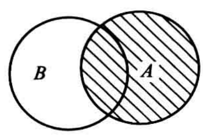

图 1-3

特别地，当 $A \subset B$ 时，$P(B-A)=P(B)-P(A)$，且 $P(A) \leqslant P(B)$.

(7) $P(\bar{A})=1-P(A)$.

例 1-3　设事件 A，B 发生的概率分别为$\frac{1}{3}$和$\frac{1}{2}$，试求下列 3 种情况下 $P(B-A)$的值.

(1) A 与 B 互斥；(2) $A \subset B$；(3) $P(AB)=\frac{1}{8}$.

解　(1) A 与 B 互斥，则 $P(B-A)=P(B)-P(AB)=P(B)=\frac{1}{2}$；

(2) $A \subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$；

(3) $P(AB)=\frac{1}{8}$，则 $P(B-A)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$.

例 1-4 设 A，B 为两个基本事件，$P(A)=0.5$，$P(A\cup B)=0.8$，$P(AB)=0.3$，求 $P(B)$.

解 由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，得

$$P(B)=P(A\cup B)-P(A)+P(AB)=0.8-0.5+0.3=0.6$$

例 1-5 设 A 与 B 互不相容，$P(A)=0.5$，$P(B)=0.3$，求 $P(\overline{A}\,\overline{B})$.

解 $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)]=1-0.8=0.2$

习题 1-2

1. 设 $P(A)=0.1$，$P(A\cup B)=0.3$，且 A 与 B 互不相容，求 $P(B)$.
2. 设 $P(A)=0.7$，$P(B)=0.6$，$P(A-B)=0.3$，求 $P(\overline{AB})$，$P(A\cup B)$，$P(\overline{A}\,\overline{B})$.
3. 设事件 A，B，C 两两互不相容，$P(A)=0.2$，$P(B)=0.3$，$P(C)=0.4$，求 $P[(A\cup B)-C]$.
4. 设 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$，且 $P(A)=p$，求 $P(B)$.
5. 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{16}$，$P(AB)=0$，求：(1) A，B，C 至少有一个发生的概率；(2) A，B，C 全不发生的概率.
6. 设 A，B 是任意两个事件，证明：$P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

1.3 古典概型与几何概型

本节讨论两类比较简单的随机试验，随机试验的每个样本点的出现是等可能的情形.

引例 1-1 一个纸筒装有 10 个大小、形状完全相同的球. 将球编号 1～10，把球搅匀，蒙上眼睛从中任取一球. 因为抽取时这些球被抽到的可能性是完全平等的，所以没有理由认为这 10 个球中的某一个会比另一个更容易抽得，也就是说这 10 个球中任一个球被抽到的可能性均为 $\frac{1}{10}$.

设 i 表示取到 i 号球，$i=1, 2, \cdots, 10$，则该试验的样本空间为 $\Omega=\{1, 2, \cdots, 10\}$，且每个样本点（基本事件）$\{i\}$ $(i=1, 2, \cdots, 10)$ 出现的可能性相同.

这样一类随机试验是一类最简单的概率模型，它曾经是概率论发展初期的主要研究对象.

1.3.1 古典概型的定义

一般称具有下列两个特征的随机试验模型为**古典概型**.

（1）随机试验只有有限个可能的结果.

（2）每一个结果发生的可能性大小相同.

因而，古典概型又称为等可能概型. 下面介绍古典概型事件概率的计算公式.

设 Ω 为随机试验 E 的样本空间，其中所含样本点总数为 n，A 为一随机事件，其中所含样本点总数为 r，则有

$$P(A)=\frac{r}{n}=\frac{A\text{ 中样本点数}}{\Omega\text{ 中样本点总数}} \tag{1-1}$$

也即

$$P(A)=\frac{r}{n}=\frac{A\text{ 所包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$$

1.3.2　排列组合的有关知识

排列与组合都是计数问题，计算古典概型的概率时，经常要用到它们，下面对有关的知识作一下简单的介绍.

1. 加法法则

如果完成一件事共有 m 类办法，其中任何一类办法均可以完成这件事情. 假设第 i 类办法中有 n_i 种不同的方法（$i=1, 2, \cdots, m$），那么完成这件事情共有 $n=n_1+n_2+\cdots+n_m$ 种不同的方法.

2. 乘法法则

如果完成一件事要经过 m 个不同的步骤，其中第 i 步有 n_i 种方法（$i=1, 2, \cdots, m$），那么完成这件事情共有 $n=n_1\times n_2\times\cdots\times n_m$ 种方法.

3. 排列

从 n 个不同的元素中无放回地任取 m（$1\leqslant m\leqslant n$）个，排成有顺序的一列，称为 n 取 m 的不可重复排列，各种排列的总数记作 A_n^m 或 P_n^m. 不同的排列方法一共有 $n\times(n-1)\times\cdots\times(n-m+1)$ 种，因此，$\mathrm{A}_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$.

n 个元素的全排列的种数有 $\mathrm{A}_n^n=n!$ 种.

从 n 个不同的元素中有放回地任取 m 个，排成有顺序的一列（即取出的这 m 个元素可以相同）. 这种允许元素重复出现的排列称为**可重复排列**. 所有的不同的排列方式一共有 $n\times n\times\cdots\times n=n^m$ 种.

4. 组合

从 n 个不同元素中任取 m（$m\leqslant n$）个元素并成一组（不考虑元素间的次序），称此为一个

组合，此种组合的总数记为 C_n^m，则有

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

在此规定 $0!=1$，$C_n^0=1$.

排列与组合都是计算“从 n 个元素中任取 m 个元素”的取法的总数公式，其主要区别在于：如果不考虑取出元素间的次序，则用组合公式，否则用排列公式，而是否考虑元素间的次序，可以从实际问题中得到辨别.

例 1-6　掷一枚质地均匀的骰子，求出现奇数点的概率.

解　显然样本空间 $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，样本总数 $n=6$，而事件“出现奇数点”用 A 表示，则 $A=\{1, 3, 5\}$，所含样本点数 $r=3$，从而

$$P(A)=\frac{r}{n}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

例 1-7　从 0，1，2，…，8 这 9 个数字中任意选出 3 个数字，试求这 3 个数字中不含 0 和 5 的概率.

解　设 A 表示“3 个数字中不含 0 和 5”. 从 0，1，2，…，8 中任意选 3 个不同的数字，共有 C_9^3 种选法，即基本事件总数 $n=C_9^3$，3 个数字中不含 0 和 5，即从 1，2，3，4，6，7，8 共 7 个数字中取得，选法有 C_7^3 种，即 A 包含的基本事件数 $r=C_7^3$，则

$$P(A)=\frac{r}{n}=\frac{C_7^3}{C_9^3}=\frac{5}{12}$$

例 1-8　袋中有 5 个白球和 3 个黑球，现从中任取 2 个，试求取到的两个球颜色相同的概率.

解　从 8 个球中任取两个，共有 C_8^2 种取法，即基本事件总数 $n=C_8^2$，记 A 表示“取到的两个球颜色相同”，A 包含两种情况：全是白球或全是黑球. 全是白球有 C_5^2 种取法，全是黑球有 C_3^2 种取法，由加法原理知，A 的取法共有 $C_5^2+C_3^2$ 种，即 A 包含的基本事件数 $r=C_5^2+C_3^2$，故

$$P(A)=\frac{r}{n}=\frac{C_5^2+C_3^2}{C_8^2}=\frac{13}{28}$$

例 1-9　一批产品共有 100 件，其中 3 件次品，先从这批产品中接连抽取两次，每次抽取一件，考虑以下两种情况.

(1) 不放回抽样：第一次取一件不放回，第二次再抽取一件.

(2) 放回抽样：第一次取一件检查后放回，第二次再抽取一件.

试分别针对上述两种情况，求事件“第一次抽到正品，第二次抽到次品的概率”.

解　(1) 采取不放回抽样：由于要考虑两件产品取出的顺序，接连两次抽取共有 A_{100}^2 种取法，即基本事件总数 $n=A_{100}^2$. 第一次取到正品共有 97 种取法，第二次取到次品共有 3 种

取法，则 A 包含的基本事件数 $r=97\times3$，故

$$P(A)=\frac{r}{n}=\frac{97\times3}{A_{100}^{2}}\approx0.0294$$

(2) 采取放回抽样：第一次抽取共有 100 种取法，然后放回，第二次抽取仍有 100 种取法，即基本事件总数 $n=100^2$. 在这种情况下，A 包含的基本事件数 r 仍为 97×3，故

$$P(A)=\frac{r}{n}=\frac{97\times3}{100^{2}}\approx0.0291$$

1.3.3　几何概型

古典概型只考虑了有限等可能结果的随机试验的概率模型. 这里进一步研究样本空间为一线段、平面区域或空间立体等的等可能随机试验的概率模型——几何概型.

(1) 设样本空间 Ω 是平面上某个区域，它的面积记为 $\mu(\Omega)$.

(2) 向区域 Ω 上随机投掷一点，这里“随机投掷一点”的含义是指该点落入 Ω 内任何部分区域内的可能性只与区域 A 的面积 $\mu(A)$ 成比例，而与区域 A 的位置和形状无关，如图 1-4 所示.

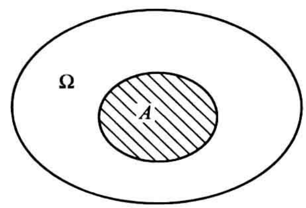

图 1-4

向区域 Ω 上随机投掷一点，该点落在区域 A 的事件仍记为 A，则 A 的概率为 $P(A)=\lambda\mu(A)$，其中 λ 为常数，而 $1=P(\Omega)=\lambda\mu(\Omega)$，于是，$\lambda=\dfrac{1}{\mu(\Omega)}$，从而事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} \tag{1-2}$$

注意　若样本空间 Ω 为一线段或一空间立体，则向 Ω“投点”的相应概率仍可用公式 (1-2) 确定，但 $\mu(\cdot)$ 应理解为长度或体积.

例 1-10　某人午觉醒来，发觉表停了，他打开收音机，想听电台报时，设电台每小时报时一次，求他等待时间短于 10 min 的概率.

解　以 min 为单位，记上一次报时时刻为 0，则下一次报时时刻为 60，于是，这个人打开收音机的时间必在（0，60）内，记“等待时间短于 10 min”为事件 A，则有 $\Omega=(0,60)$，$A=(50,60)\subset\Omega$，于是 $P(A)=\dfrac{10}{60}=\dfrac{1}{6}$.

例 1-11　（会面问题）甲、乙两人相约 7 点到 8 点之间在某地会面，先到者等候另一个人 20 min，过时就离开. 如果每个人可在指定的一小时内任意时刻到达，试计算二人能够会面的概率.