高等学校教材

高等数学

（上册）

周荣星　祝向荣　王金金　编

GAO DENG SHU XUE

西安电子科技大学出版社

高等学校教材

高等数学

（上册）

周荣星　祝向荣　王金金　编

西安电子科技大学出版社
1993

(陕)新登字 010 号

内 容 简 介

本套教材由《高等数学》(上、下册)、《高等数学学习指导》和《高等数学基本训练》组成。内容包括函数与极限、一元函数微积分、常微分方程、空间解析几何与向量代数、多元函数微积分和无穷级数，并介绍数学模型方法初步。本教材结构合理、叙述详尽、例题丰富，并附有自测题和习题答案。

本教材可供大专、夜大、函授、职工大学和本科低学时的各专业使用，也可作为有关人员的自学参考书。

高等学校教材

高 等 数 学

(上册)

周荣星 祝向荣 王金金 编

责任编辑 云立实

西安电子科技大学出版社出版发行

西安电子科技大学印刷厂印刷

新华书店经销

开本 787×1092 1/32 印张 9 20/32 字数 200 千字

1993 年 5 月第 1 版 1993 年 8 月第 2 次印刷 印数 5 101－15 100

ISBN 7－5606－0236－3/O・0021 (课) 定价：5.00 元

前　言

为了满足各种类型大专班的需要，根据教学大纲要求，在多年教学实践的基础上，我们编写出高等数学课程配套教材，它包括《高等数学》、《高等数学学习指导》和《高等数学基本训练》。它可作为大专、夜大、函授、职工大学及培训班的高等数学课程教材，也可作为本科教学时数较少的高等数学课程教材。本书预计约需 180 学时，为了适应低学时及各专业的不同需求，我们将一些内容打“*”号，供他们选择，因此使用本教材时可根据学时数及各专业需要适当选讲。本套教材叙述比较详细且文字流畅，也可作为自学参考书。

本书编写过程中，在取材和教学方法等方面吸取了编者和部分教师在高等数学课程教学中所积累的一些有益经验。在基本概念和定理的叙述上力求做到深入浅出和清晰准确；定理的证明简明易懂又不失严密性；例题类型多且典型；增加一些必要的附注，以增强学生理解和掌握有关内容和方法的能力。同时，为了适应现代科技发展的需要和培养学生的能力，我们增加了有关数学模型的内容，并在可接受性的前提下，将其有机地贯穿全书，作为一点改革的尝试。

本书内容包括函数和极限、一元函数微积分、常微分方程、空间解析几何与矢量代数、多元函数微积分和级数等。全书共十一章，其中第一、二、三章由祝向荣同志执笔，第四、五、七章由王金金同志执笔，第六、八、九、十、十一章由

周荣星同志执笔，经过反复讨论并多次修改，最后由周荣星同志汇总定稿。由于时间匆促，加之受学术水平和教学经验的限制，一定存在不少缺点，甚至还有错误，恳切希望使用本教材的教师和读者提出批评和指正。

本书由西安电子科技大学王公宇教授主审，他自始至终参加我们的讨论，将其积40余年教学实践的丰富经验毫无保留地贡献出来，并提出很多非常中肯的意见和有益的建议，特此向他表示衷心的感谢！

我们还得到西安电子科技大学成人教育学院等有关单位的大力支持与帮助，其中王和平、付长进和李东润等同志作了大量的工作，使本套教材得以顺利出版。刘桂珍同志也作了不少的工作，云立实同志为编辑本书付出辛勤的劳动。编者向上面提到的单位和个人表示衷心的感谢！

编者

1992年11月

数 学 符 号

$+$	加，正号
$-$	减，负号
$\times$ 或 $\cdot$	乘（在字母或括号前可略）
$a \div b$ 或 $\frac{a}{b}$ 或 a/b	b 除 a、或 a 除以 b
$=$	等于
$\neq$	不等于
$\equiv$	恒等于
$<$	小于
$>$	大于
$\leqslant$	小于或等于，不大于
$\geqslant$	大于或等于，不小于
$\ll$	远小于
$\approx$	约等于，近似于
$a : b$	a 比 b
$\|a\|$	a 的绝对值
$n!$	n 的阶乘，即 $n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$
$(2n)!!$	$2n$ 的双阶乘，即 $(2n) \cdots 6 \cdot 4 \cdot 2$
$(2n+1)!!$	$(2n+1)$ 的双阶乘，即 $(2n+1) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1$
$\sum$	总和

$\prod$	连乘
∞	无穷大
$+\infty$	正无穷大
$-\infty$	负无穷大
(a, b)	开区间
$[a, b]$	闭区间
$(a, b]$	左开右闭区间
$[a, b)$	左闭右开区间
D	平面区域
Ω	空间体域
Σ	空间曲面
π	平面
L 或 l	直线
$f(x)$	一元函数
$\frac{df(x)}{dx}$, $f'(x)$	一元函数的一阶导数
$\frac{d^2f(x)}{dx^2}$, $f''(x)$	$f(x)$ 的二阶导数
$\frac{d^nf(x)}{dx^n}$, $f^{(n)}(x)$	$f(x)$ 的 n 阶导数
$f(x,y)$	二元函数
$f'_x(x,y)$、$\frac{\partial f}{\partial x}$	f 对 x 的一阶偏导数
$f''_{xx}(x,y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	f 对 x 的二阶偏导数

$f''_{xy}(x,y)$，$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$	f 对 x、y 的二阶混合偏导数
$\to$	收敛于，趋于
lim	极限
max	最大
min	最小
dy	y 的微分
Δy	y 的差分
$\boldsymbol{a}$	矢量（或称向量）
$\|\boldsymbol{a}\|$	矢量的模（或长度）
$\{x, y\}$	矢量的坐标
$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$	数量积（或点乘）
$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$	矢量积（或叉乘）
$\perp$	垂直
$//$	平行
$\backsim$	相似
$\cong$	全同
$\because$	因为
$\therefore$	所以
$\int_a^b f(x)dx$	$f(x)$ 对 x 自 a 到 b 的定积分
$F(x)\|_a^b$	等于 $F(b)-F(a)$
$\iint\limits_D f(x, y)d\sigma$	$f(x, y)$ 在 D 上的二重积分

$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dv$	$f(x, y, z)$在 Ω 上的三重积分
$\int_L f(x,y)dl$	$f(x,y)$在 L 上的对弧长的曲线积分
$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS$	$f(x,y,z)$在 Σ 上对面积的曲面积分
$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$	对坐标的曲线积分
$\iint\limits_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$	对坐标的曲面积分
$\forall j$	对一切 j，对任意 j
$\exists j$	存在 j
$\in$	属于
$\subset$	包含于
$\supset$	包含
$\cap$	通集(交)
$\cup$	和集(并)
R	实数集，实数
R^n	n 维实数空间

目　录

第一章　函数与极限

本章将介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念，以及它们的一些性质. 函数是高等数学研究的主要对象，而极限方法则是研究函数或变量的基本方法. 它是人们从有限去认识无限、从近似去认识精确、从量变去认识质变的一种数学方法. 高等数学中几乎所有的基本概念（如函数的连续性、导数等）都是用极限来定义的. 因此，认真地学好极限概念，力求掌握它的实质，结于学好高等数学是十分重要的.

§1　函数的概念

一、函数的概念

我们在观察某一个自然现象，或是研究某一个技术过程时，常常会遇到许多**变量**（在过程中起着变化的量，称为变量；在过程中保持不变的量，称为常量），这些变量之间，往往又是相互联系、相互依赖着的.

例 1　自由落体的路程 s 与时间 t 由公式

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \qquad (1.1.1)$$

联系着，t 的值确定了，s 的值就随之确定. 设落体着地的时

刻为 T、则当 t 取 0 到 T 之间任何值时，由式 (1.1.1) 就计算得 s 为 0 到 $\frac{1}{2}gT^2$ 之间的某一个值.

例 2　圆的面积 A 与它的半径 r 之间的相依关系由公式

$$A = \pi r^2 \tag{1.1.2}$$

给出. 当半径 r 在区间 $(0, +\infty)$ 内任意取定一个数值时，由式 (1.1.2) 就可以确定圆面积 A 的相应数值.

上面两个例子都反映了在同一过程中有着两个互有联系的起着变化的量，当第一个量在某个数集内取值时，按一定的规则，第二个量在另一数集内有唯一的一个值与之对应. 根据这样一些事实，在数学上概括出了函数的概念.

定义 1.1　设 x 与 y 是两个变量. 如果当变量 x 在某一实数集 E 中任意取定一个数值时，变量 y 按照一定的规律 f，总有唯一确定的数值和它对应，则变量 y 叫做变量 x 的**函数**，记为

$$y = f(x) \qquad x \in \mathrm{E} \tag{1.1.3}$$

其中变量 x 叫做**自变量**，而变量 y 叫做**因变量**.

如果自变量取某一数值 x_0 时，函数具有确定的对应值，那么就称函数在 x_0 处**有定义**. 使函数有定义的一切实数的全体、即上述定义中的 E，叫做函数的**定义域**. 和 x 的值对应的 y 的值叫做**函数值**，函数值的全体称为**值域**.

如上述例 1 中，关系式 (1.1.1) 确定了一个定义在区间 $[0,T]$ 上以 t 为自变量的函数. 例 2 则由式 (1.1.2) 确定了一个以 r 为自变量的函数，这个函数的定义域和值域均为区间 $(0, +\infty)$.

由上述定义可知，函数包括两个要素：定义域 E 及对应

规则 f. 一旦这两者都确定了，则函数就完全确定了.

在实际问题中，函数的定义域是根据所考察的问题的实际意义来确定的. 如例 1 中，假定物体开始下落时刻为 0，着地时刻为 T，则路程 s 只有当 $0\leqslant t\leqslant T$ 时才有确定的对应值，所以 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 的定义域就是闭区间 $[0, T]$. 当我们只是在数学上一般地研究某一由具体算式表达的函数时，我们约定函数的定义域就是使算式有意义的自变量的一切实数值. 也就是说，是这样的一些实数的全体，当用这种数代替算式中的自变量时，能够求出确定的因变量的实数值. 例如函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是闭区间 $[-1,1]$. 这样一来，式 (1.1.3) 中的 $x\in E$ 也可省略不写.

关于函数概念，我们再作几点说明：

注 1 在我们的函数定义中，对于每一个 x，只能有唯一的一个 y 与它对应（不同的 x 所对应的 y 可以不同，也可以相同），这种函数称为**单值函数**. 如果在函数定义中，允许同一个 x 值可以和多个确定的 y 值相对应，则称它为**多值函数**. 今后，凡没有特别声明时，我们总是假定所研究的函数都是单值函数.

注 2 在定义中，函数关系（对应规则）用 f 表示，当然也可以用别的文字，如 g，h，F，φ，……，所以 y 是 x 的函数也可以记为 $y=g(x)$，$y=h(x)$，$y=F(x)$，$y=\varphi(x)$，$y=y(x)$，……. **但应注意，在同一场合，为了避免混淆，不同的函数应该用不同的记号**. 所谓两个函数相同，是指它们的定义域和对应规则分别相同（两个函数的对应规则相同，是指在相同定义域中，每个 x 所对应的函数值总相同）. 例如

$f(x) \equiv 1$，$x \in (-\infty, +\infty)$ 和 $\varphi(x) = \dfrac{x}{x}$，$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 是两个不同的函数，因为它们的定义域不同. 但 $f(x) \equiv 1$，$x \in (-\infty, +\infty)$ 和 $g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$，$x \in (-\infty, +\infty)$ 却是两个相同的函数，因为它们只是对应规则的表达形式不同而已.

注 3 对于函数 $y = f(x)$，当自变量 x 取某个确定值 $x_0 \in E$ 时，对应的函数值 y_0 用记号

$$y_0 = f(x_0) \quad 或 \quad y\big|_{x=x_0} = y_0$$

来表示. 在这里，函数符号 f 就好像是一个变换器，当输入一个 x_0 时，通过"变换器"f，就得到一个输出为 $y_0 = f(x_0)$ 的值（图 1.1）. 例如，当 $y = f(x) = x^2$ 时，对应规则 f 相当于一个"平方器"，它把来自于自变量的任何值都进行平方运算，从而得到相应的函数值. 例如，

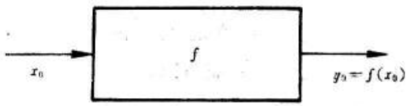

图 1.1

$$f(x_0) = x_0^2,$$
$$f(x_0 + 1) = (x_0 + 1)^2,$$
$$f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2$$

等等. 一般地，如果 $f(x)$ 是由解析式所规定的函数，则只要将 x_0 代替 $f(x)$ 中的 x，就得到 $f(x)$ 在 x_0 处的函数值 $f(x_0)$.

例 3 求函数 $f(x) = 2x^2 - 3$ 在 $x=0$，$x=2$，$x=-3$，$x=x_0$，$x=x_0+h$ 各点处的函数值.

解 $f(0) = 2 \cdot 0^2 - 3 = -3$；

$f(2) = 2 \cdot 2^2 - 3 = 5$；