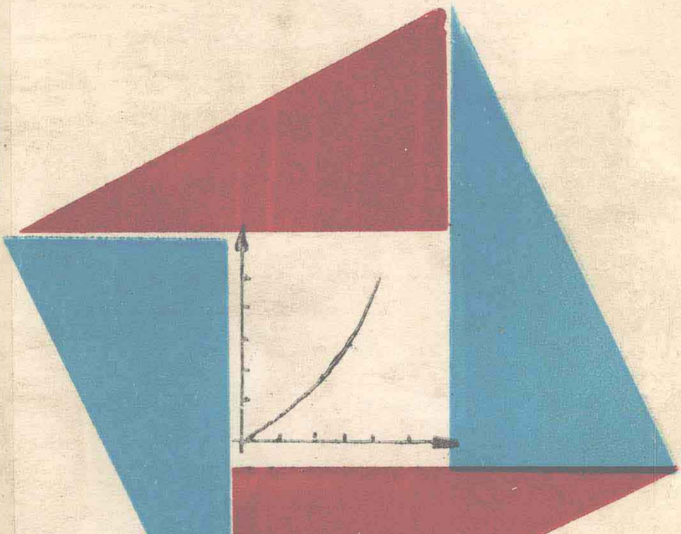
初中数学目标教学

第三册



光明日报出版社

初中数学目标教学

第三册

主 编 翟连林 张守义
侯吉生 曹清钧

光 明 日 报 出 版 社

（京）新登字101号

初中数学目标教学
第三册
翟连林　张守义　俟吉生　曹清钧　主编
光明日报出版社出版发行
（北京永安路106号）
新华书店北京发行所经销
北京顺义小店印刷厂印刷

787×1092毫米　1/32开本　10印张　220千字
1991年8月第1版　　1991年8月第1次印刷
印数1—10000册　**定价：3.60元**
统一书号：ISBN 7-80091-179-9/G·477

前　言

为了配合目标教学的广泛推广，特组织编写此书。本书立足于现行初中数学教学大纲，以章节(单元)目标教学的形式出现。内容包括："目标要求与学法指导"、"典型例题分析"、"典型错误分析"和"目标测试题"四个部分。取材丰富，有代表性，阐述翔实，富于启迪。

本书包括初三代数、几何的全部内容，并配备了六套综合测试题。例题数量较多，难度适中，具有一定的典型性和概括性，便于学生自学。目标测试题以标准化题型为主，且梯度性与教材顺序同步，便于教师在教学过程中依次选用。

本书编者都是长期工作在教学第一线的骨干教师，具有丰富的教学经验，故本书具有一定的实际指导价值。

诚然，由于编者水平有限，书中难免有不妥甚至错误之处，恳望广大读者批评指正。

一九九一年三月

目　录

代数部分

几何部分

代 数 部 分

第十三章 常用对数

一、目标要求与学法指导

（一）目标要求

1.应正确理解和记忆的概念

（1）对数定义.

（2）推导积、商、幂、方根的对数运算性质的依据和过程.

（3）常用对数的意义，常用对数的首数和尾数的意义.

（4）只有小数点位置不同的数的对数的尾数都相同.

2.应熟练掌握的概念

（1）指数式和对数式的互化.

（2）对数式$\log_a N = b$中各字母的取值范围.

（3）对数恒等式$a^{\log_a N} = N$.

（4）对数的两个基本性质：

$$\log_a 1 = 0,\ \log_a a = 1\ (a>0,\ a\neq 1).$$

（5）积、商、幂、方根的对数的运算法则及表达式.

（6）10的整数次幂和非10的整数次幂的对数的性质.

（7）只有小数点位置不同的数的对数的尾数都相同.

（8）对数表和反对数表的构造及使用方法.

3.能熟练地应用的知识

（1）指数式和对数式的互化.

（2）对数恒等式及两个基本性质.

（3）对数的定义、性质和运算法则.

（4）求一个正数的对数的首数.

（5）查表解题.

（6）利用对数进行乘、除、乘方、开方的综合运算.

（7）利用常用对数解决某些实际应用问题.

（二）学法指导

本章主要内容是对数、常用对数的概念和运算性质以及利用对数进行计算.

1.应首先明确学习对数的目的要求，认识学习对数的重要性.

2.复习旧知识（指数的概念及运算），为学习对数打下坚实的基础.

3.深刻理解对数概念中的每一个词、句的真正含义，准确掌握对数概念.

4.应突破难点“对数概念”，掌握重点“利用对数进行计算”.

5.对数的运算法则是利用对数进行计算的基础，因此，必须正确掌握对数运算法则.

6.在理解的基础上，掌握常用对数的首数和尾数.

7.通过利用对数计算，系统复习，达到熟练掌握对数知识之目的.

二、典型例题解析

（一）概念的应用

例1 把下列指数式化为对数式：

（1）$3^2=9$；（2）$2^{-3}=\frac{1}{8}$；（3）$8^{\frac{2}{3}}=4$；

（4）$\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}=16$。

解：（1）$\log_3 9=2$；（2）$\log_2\frac{1}{8}=-3$；

（3）$\log_8 4=\frac{2}{3}$；（4）$\log_{\frac{1}{2}}16=-4$。

例2 把下列对数式化为指数式：

（1）$\log_2\frac{1}{4}=-2$；（2）$\log_x 3=a$；

（3）$\log_{10}0.001=-3$；（4）$\log_a x=-3$。

解：（1） $2^{-2}=\frac{1}{4}$；（2） $x^a=3$；

（3） $10^{-3}=0.001$；（4）$a^{-3}=x$。

例3 求下列各式的值：

（1）$\log_2\sqrt{8}$；（2）$\log_{10}0.01$；（3）$\log_4 8\sqrt{2}$；

（4）$\log_{\frac{1}{2}}4$。

解：（1）$\because$ $2^{\frac{3}{2}}=\sqrt{8}$，$\therefore$ $\log_2\sqrt{8}=\frac{3}{2}$。

(2) $\because\ 10^{-2}=0.01$，$\therefore\ \log_{10}0.01=-2$。

(3) $\because\ 4^{\frac{7}{4}}=8\sqrt{2}$，$\therefore\ \log_4 8\sqrt{2}=\frac{7}{4}$。

(4) $\because\ (\frac{1}{2})^{-2}=4$，$\therefore\ \log_{\frac{1}{2}}4=-2$。

例4 求下列各式中的x：

(1) $\log_3 x=4$；(2) $\log_{3\sqrt[3]{3}}x=-\frac{3}{2}$；

(3) $\log_4 x=\frac{1}{2}$；(4) $\log_4 x=-\frac{3}{2}$。

解：(1) $\because\ \log_3 x=4$，$\therefore\ 3^4=x$，即$x=81$；

(2) $\because\ \log_{3\sqrt[3]{3}}x=-\frac{3}{2}$，$\therefore\ (3\sqrt[3]{3})^{-\frac{3}{2}}=x$，

即$x=(3\sqrt[3]{3})^{-\frac{3}{2}}=3^{-2}=\frac{1}{9}$；

(3) $\because\ \log_4 x=\frac{1}{2}$，$\therefore\ 4^{\frac{1}{2}}=x$，即$x=2$；

(4) $\because\ \log_4 x=-\frac{3}{2}$，$\therefore\ 4^{-\frac{3}{2}}=x$，即$x=\frac{1}{8}$。

例5 求下列各式的值：

(1) $5^{\log_5 10}$；(2) $0.2^{\log_{0.2}5}$。

解：(1) $5^{\log_5 10}=10$，(2) $0.2^{\log_{0.2}5}=5$。

例6 用$\log_a x$，$\log_a y$，$\log_a(x+y)$，$\log_a(x-y)$表示下列各式（其中x，y，$x+y$，$x-y$均大于零）。

(1)$\log_a\left(\frac{x+y}{x-y}\cdot y\right)$; (2)$\log_a\left[\frac{\sqrt{y}}{x(x-y)}\right]^3$.

分析：由积、商、幂、方根的对数运算法则展开即可，但要注意和、差的对数不能展开，即$\log_a(M\pm N)\neq\log_a M\pm\log_a N$.积、商的对数展开时应注意$\log_a(MN)\neq\log_a M\cdot\log_a N$，$\log_a\frac{M}{N}\neq\frac{\log_a M}{\log_a N}$.

解：(1)$\log_a\left(\frac{x+y}{x-y}\cdot y\right)=\log_a\frac{x+y}{x-y}+\log_a y$

$=\log_a(x+y)-\log_a(x-y)+\log_a y$.

(2)$\log_a\left[\frac{\sqrt{y}}{x(x-y)}\right]^3=3\log_a\frac{\sqrt{y}}{x(x-y)}$

$=3\left[\log_a\sqrt{y}-\log_a x(x-y)\right]$

$=3\left[\frac{1}{2}\log_a y-(\log_a x+\log_a(x-y))\right]$

$=\frac{3}{2}\log_a y-3\log_a x-3\log_a(x-y)$.

例7 判断下列等式是否成立（其中$M>N>0$，$a>0$，$a\neq1$）.

(1)$\log_a(M-N)=\log_a M-\log_a N$. (　　)

(2)$\log_a(M+N)=\log_a(M\cdot N)$. (　　)

(3) $\log_a M - \log_a N = \dfrac{\log_a M}{\log_a N}$.　　(　　)

(4) $\log_a M^x = (\log_a M)^x$.　　　(　　)

答：(1)、(2)、(3)、(4)都不成立，它们都不符合运算法则。

例8 选择题（注）

下列等式成立的是（　　）

(A) $\log_a x^2 + \log_a y^2 = 2\log_a(x+y)$；

(B) $\log_a x^2 + \log_a y^2 = \log_a(x+y)^2$；

(C) $\log_a x^2 + \log_a y^2 = 2\log(xy)$ $(x>0,\ y>0)$；

(D) $\log_a x^2 + \log_a y^2 = 4\log_a(x+y)$.

解：由对数运算法则，得

$$\log_a x^2 + \log_a y^2 = \log_a(x^2y^2) = \log_a(xy)^2$$
$$= 2\log_a(xy).$$

(A)、(B)、(D)都不正确．故应选(C).

例9 写出下列各对数的首数：

(1) lg234.5；(2) lg40；(3) lg0.2；(4) lg0.00283.

分析：理解记忆常用对数的首数的意义及其求法，就能准确、迅速地写出对数首数．下面从两个方面说明确定首数的方法，这两种方法的实质一样.

解：法一　（用科学记数法）

(1) ∵　$234.5 = 2.345 \times 10^2$,

∴　lg234.5的首数是2；

(2) ∵　$40 = 4.0 \times 10^1$，∴　lg40的首数是1；

注：本书的选择题除特别说明外，都是单项选择题。即给出的A、B、C、……几个答案中只有一个是正确的。

(3) $\because$ $0.2=2\times10^{-1}$, $\therefore$ lg0.2的首数是 -1;

(4) $\because$ $0.00283=2.83\times10^{-3}$,

$\therefore$ lg0.00283的首数是-3.

法二 （由小数点的位置而定：首数=真数的整数位数-1）

(1) $\because$ $234.5>1$有3位整数,

$\therefore$ lg234.5的首数是$3-1=2$;

(2) $\because$ $40>1$有两位整数,

$\therefore$ lg40的首数是$2-1=1$;

(3) $\because$ 0.2是一个正的纯小数，且第一个不等于零的数字前面有一个零，我们规定它的整数位数是零位，$\therefore$log0.2的首数是$0-1=-1$;

(4) $\because$ 0.00283是一个正的纯小数，且第一个不是零的数字前面有3个零，我们规定它的整数位数是-2位，$\therefore$ lg0.00283的首数是$-2-1=-3$.

例10 写出下列各对数的首数和尾数：

(1) $\lg a=3.0208$; (2) $\lg b=0.3145$;

(3) $\lg c=\overline{3}.2075$; (4) $\lg d=-2.4567$.

分析：一个正数的对数是由首数和尾数两部分组成，首数是一个整数，尾数是一个正的纯小数或零. 若已知对数的小数部分是负数，则需化为正小数后，再求首数和尾数.

解：(1) $\lg a=3.0208$的首数是3，尾数是0.0208.

(2) $\lg b=0.3145$的首数是0，尾数是0.3145.

(3) $\lg c=\overline{3}.2075$的首数是-3，尾数是0.2075.

(4) $\lg d=-2.4567=(-2)+(-0.4567)$

$$=-2-1+1-0.4567=\overline{3}.5433,$$

$\therefore\ \lg d = -2.4567 = \bar{3}.5433$ 的首数是-3，尾数是0.5433.

例11 已知$\lg 5.263 = 0.7212$，求下列各式的值：

(1)$\lg 52.63$；(2)$\lg 5263$；(3)$\lg 526300$；

(4)$\lg 0.5263$；(5)$\lg 0.005263$.

分析：本例所求各式中的真数和已知对数中的真数只有小数点的位置不同，故它们的尾数都应相同，各式中对数的尾数都能从已知对数中得到，而首数则可根据真数中小数点的位置得出.

解：$\because\ \lg 5.263 = 0.7212$，则

(1)$\lg 52.63 = 1.7212$；(2)$\lg 5263 = 3.7212$；

(3)$\lg 526300 = 5.7212$；(4)$\lg 0.5263 = \bar{1}.7212$；

(5)$\lg 0.005263 = \bar{3}.7212$.

例12 已知$\lg 5.16 = 0.7126$，$\lg 2.78 = 0.4440$，

$\lg 6.37 = 0.8041$，$\lg 619 = 2.7917$；利用对数计算

$$\frac{5.16^3}{2.78\times\sqrt{0.637}}.$$

分析：先设所求式子等于x，两边取常用对数，利用积、商、幂、方根的对数的运算法则展开并计算，求出$\lg x$的值，再利用反对数表，求出x值.

解：设 $x = \dfrac{5.16^3}{2.78\times\sqrt{0.637}}$，则

$$\lg x = 3\lg 5.16 - \left(\lg 2.78 + \frac{1}{2}\lg 0.637\right)$$

$$=3\times0.7126-0.4440-\frac{1}{2}\times\overline{1}.8041$$

$$=1.7917.$$

已知　$\lg619=2.7917$，　$\therefore$　$x=61.90$。

说明：因为我们所用的对数表中只有四个有效数字，所以计算结果没有特别说明一般保留四个有效数字。

（二）综合运用

在记忆理解对数的有关概念，掌握其性质和运算法则以后，应能灵活运用以上知识解决一些有关问题。

例1 已知$\log_{(x+6)}(x^2+6x)=1$，试求x的值。

分析：本例给出的是含有所求未知数的对数式，应先化成指数式，再解关于x的方程。

解：$\because\ \log_{(x+6)}(x^2+6x)=1$，$\therefore\ (x+6)^1=x^2+6x$，即$x^2+5x-6=0$，解得$x_1=1$，$x_2=-6$（舍）。

故所求的x的值为1。

说明：解此类方程时，要特别注意验根。

例2 求下列各式中字母x的取值范围（其中$a>0$，$a\neq1$）：

(1)$\sqrt{\log_3 x}$；(2)$\log_{(4x-3)}(3x-2)$；

(3)$a^{\log_a\left(-\frac{1}{2}x\right)}$；(4)$\log_2[\log_3(\log_4 x)]$

分析，(1) 由对数定义得$x>0$，由偶次方根得$\log_3 x\geqslant0$，联立解之即可。

(2) 考虑底$4x-3>0$，且$4x-3\neq1$，真数$3x-2>0$，联立解之即可。

(3)本题形如对数恒等式：$a^{\log_a N}=N$，由 $-\frac{1}{2}x>0$ 即可解。

(4)应正确理解本题的书写形式：$\log_2[\log_3(\log_4 x)]$ 表示的是以2为底数 $\log_3\log_4 x$ 的对数；$\log_3(\log_4 x)$ 表示的是以3为底数 $\log_4 x$ 的对数。

解：(1)由 $\begin{cases} x>0, \\ \log_3 x\geqslant 0. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x>0, \\ x\geqslant 1. \end{cases}$

∴ 字母 x 的取值范围是 $x\geqslant 1$。

(2)由 $\begin{cases} 4x-3>0, \\ 4x-3\neq 1, \\ 3x-2>0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x>\frac{3}{4}, \\ x\neq 1, \\ x>\frac{2}{3}. \end{cases}$

∴ 字母的 x 的取值范围是 $x>\frac{3}{4}$，且 $x\neq 1$。

(3) 依照对数恒等式成立的条件得 $-\frac{1}{2}x>0$，

∴ x 的取值范围是 $x<0$。

(4)∵ $\log_3(\log_4 x)>0$，$\log_3 1=0$， ∴ $\log_3(\log_4 x)>\log_3 1$。

当底数大于1时，真数较大的时候，它的对数也较大。

∴ $\log_4 x>1$。同理可得 $\log_4 x>\log_4 4$，∴ $x>4$。

说明：本小题中的括号可省去，写成形如 $\log_2\log_3\log_4 x$。

例3 已知 $\lg 3=0.4771$，求 $10^{3.4771}$ 的值。

解：∵ $\lg 3=0.4771$，则 $10^{0.4771}=3$。

而 $10^{3.4771}=10^{3+0.4771}=10^{3}\times 10^{0.4771}=10^{3}\times 3$，

$\therefore$ $10^{3.4771}=3000$。

说明：本题也可把$10^{3.4771}$化为对数式利用已知条件求解。

例4 求下列各式的值：

(1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 4}$；　　(2) $\sqrt{3}^{\log_3 7}$；

(3) $(\lg 2)^{\log_{\lg 2}\sqrt{8}}$；　　(4) $25^{2-\log_5 3}$。

解：(1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 4}=(3^{-1})^{\log_3 4}=3^{\log_3 4^{-1}}=4^{-1}=\frac{1}{4}$。

(2) $\sqrt{3}^{\log_3 7}=\left[(\sqrt{3})^2\right]^{\frac{1}{2}\log_3 7}=3^{\log_3 7^{\frac{1}{2}}}=\sqrt{7}$。

(3) $(\lg 2)^{\log_{\lg 2}\sqrt{8}}=\sqrt{8}$。

(4) 法一 $25^{2-\log_5 3}=25^2\div 25^{\log_5 3}=25^2\div 5^{2\log_5 3}$

$=25^2\div 5^{\log_5 3^2}=625\div 3^2=\frac{625}{9}$。

法二 $25^{2-\log_5 3}=25^{\log_5 5^2-\log_5 3}=25^{\log_5\frac{25}{3}}$

$=5^{2\log_5\frac{25}{3}}=5^{\log_5\left(\frac{25}{3}\right)^2}=\left(\frac{25}{3}\right)^2$

$=\frac{625}{9}$。

例5 计算：$\left(2\frac{7}{9}\right)^{\log_2\sqrt{2}}-\left(2^{\log_2 3}\right)^{-2}-\sqrt{(2+\log_{\frac{1}{2}}8)^2}$。