北京四中高中数学讲义

三 角

北京四中教学处 编

教育科学出版社

SANJIAO

北京四中高中数学讲义

三　　角

北京四中教学处

教育科学出版社

(京)新登字第111号

北京四中高中数学讲义

三　角

北京四中教学处

责任编辑：刘　进

教育科学出版社出版、发行

(北京·北太平庄·北三环中路46号)

各地新华书店经销

河北省阜城县印刷厂印装

开本：787毫米×1092毫米　1/32　印张：10.375　字数：233千

1995年4月第1版　1995年4月第1次印刷

印数：00,001—11,000册

ISBN 7-5041-1514-2/G·1491　定价：6.30元

编写组成员

领导小组：田佣（副校长）、赵康（教学处主任）

主　　编：刘　坤

成　　员：刘　坤　常相舜　王汉华

傅以伟　田　佣　赵　康

凌文伟

出版说明

当前，中学教学改革已经深入到课程设置和教材改革领域．我校数学教材的改革，以发展学生的数学思维为目标，以不改变现行教学大纲规定的教学内容为前提，试图通过对知识结构及其展开方式的统盘考虑，实现整体优化．经多年反复探索、实验，编成了这套尝试融教材与教法、学法于一体的《北京四中高中数学讲义》．

这套讲义的产生可以上溯到1982年．从那时起，为了发展学生智能，提高学生数学素养，我校部分同志就开始对高中数学教学进行以教材改革为龙头，以学法教育为重点的“整体优化实验研究”．正是在这项研究的基础上，逐步形成了这套讲义编写的特色和风格．这就是：

1．为形成学生良好的认知结构，讲义的知识结构力求脉络分明，使学生能从整体上理解教材．

2．为了提高学生的数学素养，本讲义把数学思想的阐述放到了重要位置．数学思想既包含对数学知识点（概念、定理、公式、法则和方法）的本质认识，也包含对问题解决的数学基本观点．它是数学中的精华，对形成和发展学生的数学能力具有特别重要的意义．为此，讲义注重展现思维过程（概念、法则被概括的过程，数学关系被抽象的过程，解题思路探索形成的过程）．在过程中认识知识点的本质，在过程中总结思维规律，在过程中揭示数学思想的指导作用．力图

使学生能深刻领悟教材。

3。"再创造，再发现"在数学学习中对培养创造思维能力至关重要。为引导学生积极"参与发现"，讲义在设计上做了某些尝试。

4. 例习题的选配，力求典型、适量、成龙配套。习题分为A组（基本题）、B组（提高题）、和C组（研究题）。教师可根据学生不同的学习水平适当选用。

5. 教材是学生学习的依据。应有利于培养自学能力。本书注重启迪学法，并在书末附有全部习题的答案或提示，以供学习时参考。

这套讲义在研究、试教和成书的过程中，始终得到了北京市和西城区教育部门有关领导的关怀和帮助，得到了北京师范大学数学系钟善基教授、曹才翰教授的热情指导，清华附中的瞿宁远老师也积极参与了我们的实验研究，并对这套教材做出了贡献，在此一并致以诚挚的谢意。

在编写过程中，北京四中数学组的教师们积极参加研讨，对他们的热情支持表示感谢。

这套讲义包括六册：高中代数第一、二、三册，三角、立体几何、解析几何各一册。

编写适应素质教育的教材，对我们来说是个尝试。由于水平所限，书中不当之处在所难免。诚恳希望专家、同行和同学们提出宝贵意见。

北京四中教学处

1994年11月

目　录

第一章　三角函数

在初中，我们学习过三角函数的初步知识，重点研究的是用三角函数的定义解三角形（包括解直角三角形和解斜三角形）．

本书将主要研究三角函数的性质、图象、运算（又称三角变换）及其应用．这些知识对高中和大学的数学、物理的学习都是必备的基础．为了使同学们从整体上对上述内容的展开先有个粗略的了解，在下页我们画出了全书的理论结构框图．在学习过程中，经常翻阅它有助于了解所学知识点在整个知识体系中的地位、作用以及知识点之间的联系．

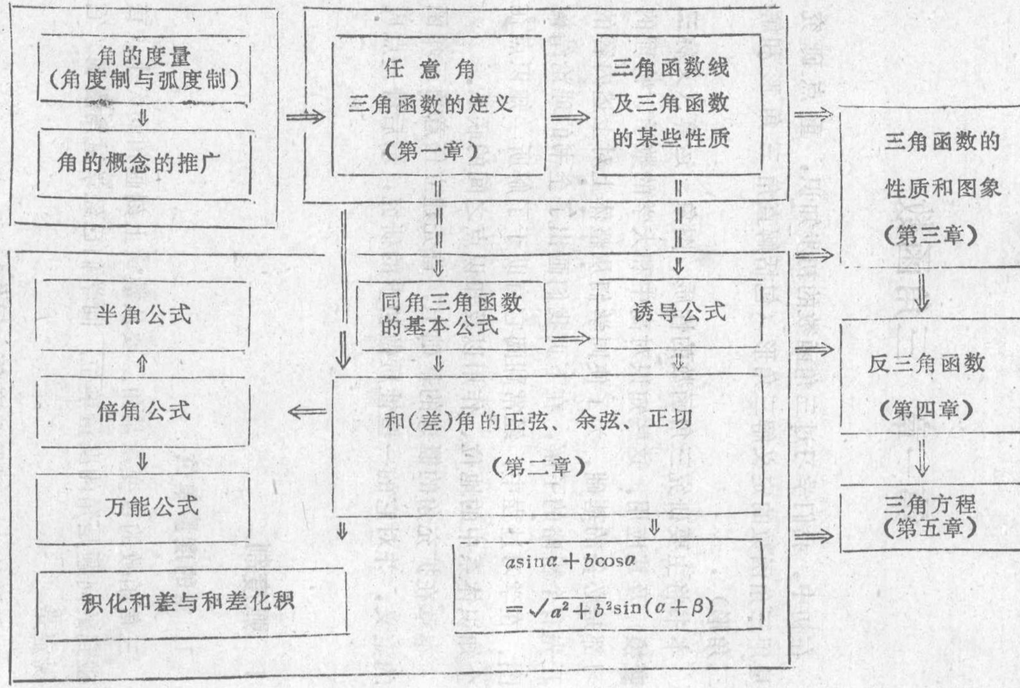
本章在扩充角的概念的基础上，首先建立任意角三角函数的定义，并对它的一些性质做初步的研究，最后讲一点应用．

1.1　弧度制

1．角的度量单位

三角函数的自变量是角．要从数量上刻画角的大小，首先碰到的问题是角的度量单位．同学们已经学过**角度制**．它的规定是

周角的$\frac{1}{360}$叫做1度角，记作1°．


角的度量
（角度制与弧度制）
角的概念的推广
任意角
三角函数的定义
（第一章）
三角函数线
及三角函数
的某些性质
三角函数的
性质和图象
（第三章）
同角三角函数
的基本公式
诱导公式
和(差)角的正弦、余弦、正切
（第二章）
反三角函数
（第四章）
三角方程
（第五章）
半角公式
倍角公式
万能公式
积化和差与和差化积
$a\sin\alpha+b\cos\alpha$
$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\beta)$

于是，

$$周角\xlongequal{\text{度量}}360°，平角\xlongequal{\text{度量}}180°。 \qquad ①$$

现在，学习科学技术使用更加广泛的是“弧度制”，它规定：等于半径长的圆弧所对的圆心角叫做1**弧度角**．如图1-1，$\overset{\frown}{AB}$的长等于半径r，$\overset{\frown}{AB}$所对的圆心角$\angle AOB$就是1弧度角．在图1-2中，$\overset{\frown}{AC}$的长$l=2r$，$\overset{\frown}{AC}$所对的圆心角$\angle AOC$就是2弧度角．

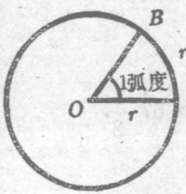


图 1-1

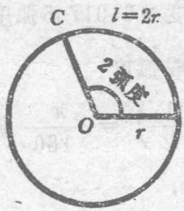


图 1-2

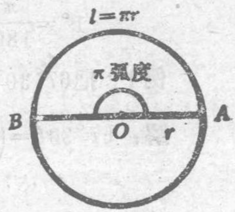


图 1-3

一般地，若圆心角α所对的弧长为l，那么角α的弧度数就是$\frac{l}{r}$，即

$$\alpha=\frac{l}{r}\text{弧度}。 \qquad ②$$

特别地，当$l=2\pi r$时（即弧长是一个整圆），此时的圆心角为周角，它的弧度数就是

$$\frac{l}{r}=\frac{2\pi r}{r}=2\pi\text{弧度}。$$

这就是说，

$$周角\xlongequal{\text{度量}}2\pi弧度，平角\xlongequal{\text{度量}}\pi弧度（图1-3）。 \qquad ③$$

至此，一个明显的问题产生了：对于同一个角，当分别用“弧度”和“度”为单位度量时，所得的量数一般是不同的。

那么，怎样进行换算呢？比较①、③可以看出：

$$\boxed{\pi\text{弧度}=180^\circ}$$

这就是两种单位制之间的换算关系式。

由此，

$$1\text{弧度}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ\approx57^\circ18',$$

$$1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{弧度}\approx0.01745\text{弧度}。$$

例1 把$67^\circ30'$化成弧度。

解： $67^\circ30'=\left(67\frac{1}{2}\right)^\circ=\frac{\pi}{180}\text{弧度}\times67\frac{1}{2}$

$$=\frac{3}{8}\pi\text{弧度}。$$

例2 把$\frac{3}{5}\pi$弧度化成度。

解： $\frac{3}{5}\pi$ 弧度$=\frac{3}{5}(\pi\text{弧度})=\frac{3}{5}\times180^\circ=108^\circ$。

说明 今后用弧度表示角的时候，"弧度"二字通常略去不写，而只写这个角的弧度数。例如，角$\alpha=2$就表示α是 2 弧度的角，$\frac{\pi}{4}$弧度的角α就写成 $\alpha=\frac{\pi}{4}$。在这种约定下，

$\sin\frac{\pi}{3}$与 $\cos\frac{\pi}{2}$ 分别表示 $\frac{\pi}{3}$ 弧度的正弦与 $\frac{\pi}{2}$ 弧度的余弦。

练习：

请填出下列特殊角的弧度数。

度	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
弧度					π		

习 题 一

A

1．（口答）下列弧度各是多少度？

（1）π；（2）2π；（3）$\frac{\pi}{2}$；（4）$\frac{\pi}{3}$；

（5）$\frac{2\pi}{3}$；（6）$\frac{\pi}{4}$；（7）$\frac{3\pi}{4}$；（8）$\frac{7\pi}{4}$；

（9）$\frac{\pi}{6}$；（10）$\frac{5\pi}{6}$；（11）$\frac{7\pi}{6}$；（12）$\frac{11\pi}{6}$。

2．把下列各度化成弧度（写成多少π的形式）：

（1）$12°$；（2）$75°$；（3）$210°$；

（4）$135°$；（5）$300°$；（6）$22°30'$。

3．把下列各弧度化成度：

（1）$\frac{\pi}{12}$；（2）$\frac{3\pi}{10}$；（3）$\frac{\pi}{5}$；

（4）$\frac{4\pi}{3}$；（5）$\frac{\pi}{8}$；（6）3。

4．求下列各三角函数的值：

（1）$\sin\frac{2\pi}{3}$；（2）$\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}$；（3）$\cos\frac{3}{4}\pi$；

（4）$\sin 1$。

5. 填写下表中各个三角函数的值：

角 \ 函数	正弦	余弦	正切	余切
$\frac{\pi}{6}$				
$\frac{\pi}{4}$				
$\frac{\pi}{3}$				

6. 填写下表中各个三角函数的值：

角 \ 函数	正弦	余弦	正切	余切
$\frac{\pi}{2}$				
$\frac{2\pi}{3}$				
$\frac{3\pi}{4}$				
$\frac{5\pi}{6}$				

1.2 角的概念的推广

在初中，我们所学过的角都是限制在[0°,360°]之中。本节将把角的概念加以推广。

角可看作是由一条射线绕它的端点旋转而成的。如图

1-4，平面上射线OA绕它的端点O旋转到OB处便形成了角α。射线OA叫做角α的**始边**，射线OB叫做角α的**终边**，射线的端点O叫做角的**顶点**。在始边逆时针旋转第一圈的过程中便形成了$0^\circ \sim 360^\circ$（即$0 \sim 2\pi$）的所有角，继续旋转第二圈的过程中又形成了$360^\circ \sim 720^\circ$的所有角（图1-5）；继续旋转下去可以形成任意大的角。

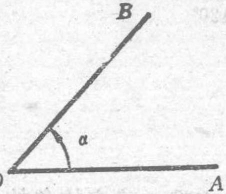


图 1-4

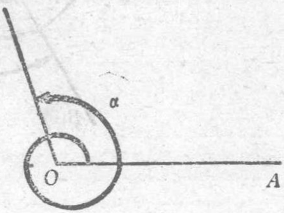


图 1-5

在实际生活中，角的形成有两种相反的旋转方向。除了上述逆时针方向外，按顺时针方向旋转也可以形成角。为了区别这两种旋转方向，我们把按逆时针旋转形成的角叫做**正角**。把按顺时针方向旋转形成的角叫做**负角**。如图 1-6 中，以OA为始边的角$\alpha = 240^\circ$，$\beta = -120^\circ$，$\gamma = -585^\circ$。特别地，当射线OA没有做任何旋转时，我们也认为这时形成了一个角，并把这个角叫做**零角**。当射线逆时针旋转不足一圈时所形成的角叫做**周内角**。显然周内角的取值范围是$[0, 2\pi)$。角的概念经这样推广后，它包括任意大小的正角、负角和零角。

在用弧度制度量角时，正角的弧度数为正数，负角的弧度数是负数，零角的弧度数是零。即角的弧度数集合与实数集合R可以建立一一对应的关系：每一个角的弧度数对应唯

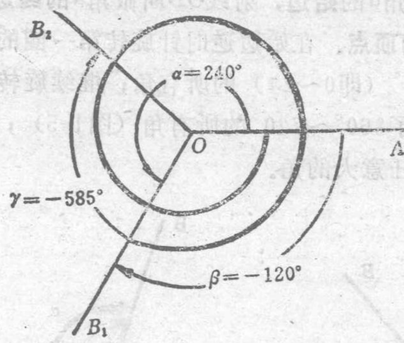


图 1-6

一确定的实数，反之，每一个实数对应唯一确定的角的弧度数。

今后，我们经常在直角坐标系中研究角。使角的顶点与坐标原点重合，始边OA与x轴正半轴重合（图1-7），让OA逆时针或顺时针旋转就可以得到任意大小的角。如果角的终边落在第几象限，就说这个角是第几象限的角（或说这个角属于第几象限）。如图1-7(1)中的角30°，390°，-330°都是第一象限的角；图1-7(2)中的300°，-60°的角都是第四象限的角；585°的角是第三象限的角。如果角的终边落在坐标轴上，就认为这个角不属于任何象限（称这类角为轴上角）。

在图1-7(1)中我们发现：390°的角与-330°的角都与30°的角终边相同。

问1　试把与30°的角终边相同的一切角的值表示出来。

很明显，当且仅当30°加上“周角”的整数倍时，所得到的角

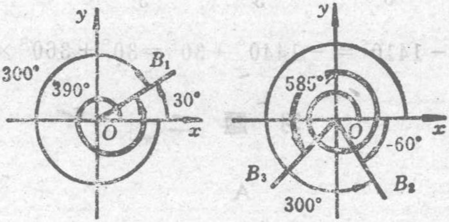


图 1-7

$$30^\circ + 360^\circ \cdot k \ (k \in Z) \quad ①$$

的终边必定与30°的角的终边相同。

当$k=0$时，它表示30°的角；当$k=1$时，它表示390°的角；当$k=-1$时，它表示-330°的角，等等。把这一结果写成一般形式有

定理 角β与角α终边相同的充要条件是

$$\boldsymbol{\beta = \alpha + 2\pi k} \ (k \in Z),$$

特别地，当α是一个周内角时，上述结论仍然成立。

例1 把下列各角写成周内角加上周角的整数倍的形式。

（1）855°；　（2）$\frac{19\pi}{2}$，（3）$-\frac{16\pi}{3}$，

（4）-1410°。

解：（1）$855^\circ = 135^\circ + 360^\circ \times 2$；

（2）$\frac{19\pi}{2} = \frac{16\pi + 3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + 2\pi \times 4$；