SHIJIJINBANG
世纪金榜

2004
最新版

世纪金榜

丛书主编　张　泉

高中全程复习方略

数　学

SHU XUE

延边大学出版社

2004 最新版

根据统编版教材编写

世纪金榜

丛书主编　张　泉

高中全程复习方略

[illegible]

函 数列 不等. 三角变换

线与线. 线面. 面面、圆. 二次曲线

数　学

SHU XUE

圆您梦想

SHIJIJINBANG

243

延边大学出版社

丛书主编 / 张　泉
本册主编 / 王兆田　唐祖雄
副 主 编 / 赵连军　林淑军　李长河　付振凯
编　　委 / 韩　青　赵庆水　李玉铮　王学玲
王成举　王春亮　齐彦泓　解金华

<书名>世纪金榜高中全程复习方略

作者：张　泉
责任编辑：殷继海
装帧设计：张　乾
出版发行：延边大学出版社
社址：吉林省延吉市公园路105号　邮编：133002
网址：http://www.eabook.com（东亚书城）
电话：0433-2965690
印刷：山东省邹平县教育印刷厂
开本：887 × 1092毫米　1/16
印张：171印张　　字数：3600千字
印数：5001—15000册
版次：2003年4月第2版
印次：2003年4月第2次印刷
ISBN 7-5634-1512-2/G·278

总定价：168.00元

世纪金榜 圆您梦想

名师推介

高中数学全程复习方略

2003—2004 学年度，教考改革将在更深层次、更大范围内展开，高考提前作为一大新举措而备受世人关注。世纪金榜顺应高考改革趋势，打破陈旧复习套路，创造全新备考模式，全力打造高品质迎考利器。为此，我们特邀数名国家命题研究中心权威人士、教改专家和大批多年从事一线教学工作的特、高级教师，组成强大的策划、编辑队伍，根据 2003 年《考纲》最新变化及高考改革的最新精神，洞察和借鉴了 2003 年春季高考等最新的高考信息，以先进的教学理念为指导，精心编撰了《高中数学全程复习方略》一书。

本书力求以新颖别致的栏目设置凸显内容的实用、详备与前沿性，以教材为序，共分十一章，每章具体栏目设置如下：

【高考热点综述】纵观近几年高考试题，分析研究命题趋势，权威预测 2004 年高考命题趋向，使读者思路清晰，方向明确，获得最新的高考信息和最有裨益的复习启迪。同时，便于学生采用最新的教学观点和理念，把握章节重点及数学思想方法，给复习与学习以正确的导向。

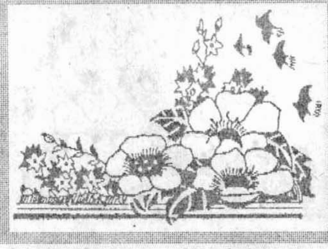
【知识网络构建】围绕知识重点，构建知识框架，梳理知识体系，把零散的知识点编成网络状，便于学生把握整体知识脉络，在更高层次上掌握数学的知识系统。

【要点知识扫描】展示每节主要内容，从知识和能力两个方面提出要求，扫描基本概念及定理、公式，夯实理论基础，体现基本思想和方法，完成基础知识构建。并以挖空的形式出现，给学生提供了主动思考、动手操作的机会，又可回归课本，在温故知新中加深对理论知识的理解。

【重点难点警示】“成功的教学教育，应当是使教学的精神、思想方法深深地永远铭刻在学生头脑里……”，“求真”“求实”是“数学的精神品质”。本栏目设置“重、难点”提示、“警示”点拨，目的是帮助学生突破重点、攻克难点、走出误区；警示与提醒仍是为夯实基础，同时也使重要的数学思想和方法能够铭刻在学生脑海中。

【基础快速过关】让学生在自主学习中去独立思考，积极参与，快速反应，感受掌握知识、运用知识的愉悦，在“用中学”，在“学中用”，从而实现基础知识、基本技能的快速过关。

【典型例题导悟】选取典型新题，抓重点，克难点，用[就题论题]对所选典型例题中每个

世纪金榜  圆您梦想

名师推介

问题从思维方法、解题步骤、答辩技巧等方面进行全方位深层次解析，充分发掘其代表性和辐射功能，达到以一当十之功效。[拓展提升]立足对个案的透彻分析，精心提炼其典型意义和普遍指导意义并予以发散和总结，指出解题与应试规律方法之所在，促进学生由知识积累到能力提高的升华。

【素能层级训练】精心选编一组覆盖本节知识点和训练基本技能的题目，保证有适量的“难、新、活、宽”题目，同时力求做到“难而不怪，新而不奇，活而不峭，宽而不偏”；背景新颖的层级训练，让学生充分巩固本节知识要点，更好掌握数学思想方法，提高综合能力。

【研究性学习与创新】创新是人类进步的灵魂，研究是“再创造”的过程。本栏目通过选材新颖的问题背景，提高学生的创新意识，培养学生的创新能力，充分认识创新的必要性与紧迫性，让学生在学习中体会探究、创新的快乐，在快乐中尝试成功。

【高考试题集锦】此栏目全面刊登全国、北京、上海、广东、河南等省市高考试卷中与本章考点对应的数学考题，使学生了解本章往年高考的地位及命题方式、难度要求，提前熟知高考、了解高考。

【综合质量检测】选题新颖、灵活、典型，强调基础知识，突出基本技能，重视各知识点之间的横向联系和综合运用，模拟高考，实战演练，让学生提前感受高考的实战氛围，适时检测、调整、完善自我。

“方略全程导航，学子荣登金榜”，这是编者的目标，也是广大学子的企盼，我们衷心希望《高中数学全程复习方略》能助您学海弄潮，激流勇进，梦想成真。

编者

2003年初夏

目　录

目

录

圆您梦想

SHIJIJINBANG

目录

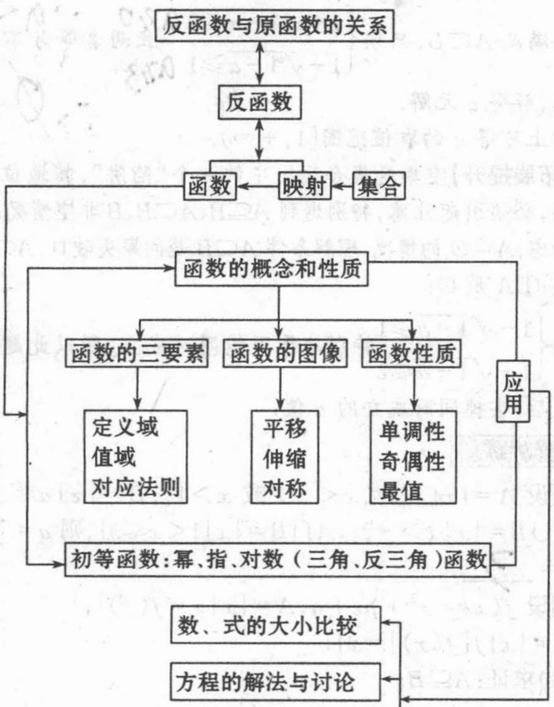
第一章　幂函数、指数函数、对数函数

高考热点综述

函数是高中数学中最重要、最基础的内容.

本章涉及到了中学数学中所有的数学思想方法,它们相互渗透、相互融合,构成了函数应用的广泛性、解法的多样性和思维的创造性.函数的性质、图像及函数与方程、不等式、数列、解析几何知识的联系和综合应用是命题热点.探索性题型在函数中考查较多,其主要特点是要求学生能够建立数学模型,函数应用题型在近几年中考查明显增加,综合题型在函数中从1997年开始几乎每年都有,预测2004年有关函数的试题仍是探索开放、综合应用型的,但很可能有新颖的应用题,活而不难.

知识网络构建



§1—1 集合与集合的运算

要点知识扫描

描述某特征

一、集合

1.集合:一组对象的全体.“对象”可以指数(式)、人、物等.

2.集合中元素的三个特征:确定性、互异性、无序性.

3.元素与集合之间的关系是“________”或“________”关系,用________表示.

二、子集、全集、补集

1.集合与集合之间的关系是:________等关系.符号________表示包含于,________表示不包含于,“=”表示相等,________表示真包含于.

2.子集:A是B的子集,记作 $A\subseteq B$.

A不是B的子集,即A不包含于B,或B不包含A,记作 $A\nsubseteq B$

集合A与B相等,记作$A=B$.即$A\subseteq B$,且$B\subseteq A$.

真子集:若集合A与B,有$A\subseteq B$并且$A\neq B$,则称A是B的真子集,记作 $A\subset B$.

空集:不含任何元素的集合叫做________,记作________.空集是任何非空集合的真子集,即$\varnothing\subset A$,A为非空集合.

3.补集(或余集):若S是一个集合,A是S的一个子集(即$A\subseteq S$),由S中所有不属于A的元素组成的集合,叫做集合S中子集A的________(或余集),记作$\overline{A}$,即$\overline{A}=$________.

4.全集:如果集合S含有我们研究的各个集合的全部元素,这个集合就可以看作一个全集,全集通常用U表示.

三、交集、并集

交集:一般地,由所有属于集合A且属于集合B的元素所组成的集合叫做A与B的________,记作________.

注意:“所有”、“且”两个关键词语.

并集:由所有属于集合A或属于集合B的元素组成的集合叫做集合A与B的________,记作________.

注意:“所有”、“或”两个关键词语.

本单元要掌握集合间的运算与性质.

对于集合A、B、C:

(1)$A\subseteq A$.

(2)$\varnothing\subseteq A$.

(3)若$A\subseteq B$,$B\subseteq C$,则$A\subseteq C$;若$A\subset B$,$B\subset C$,则$A\subset C$.

(4)若 A 是非空集合,则 $\varnothing \subsetneq A$.

(5)$A\cap A=A$;$A\cap\varnothing=\varnothing$;$A\cap B=B\cap A$.

(6)$A\cup A=A$;$A\cup\varnothing=A$;$A\cup B=B\cup A$.

(7)$A\cap\overline{A}=\varnothing$;$A\cup\overline{A}=U$(全集);$\overline{\overline{A}}=A$.

(8)$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$;$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

(9)若 $A\subseteq B$,则 $A\cap B=A$;$A\cup B=B$;

$(A\cap B)\subseteq A\subseteq(A\cup B)$.

四、数论简介

$A=\{n\mid n=2m+1,m\in\mathbf{Z}\}=\{n\mid n=$ ________ $,m\in\mathbf{Z}\}$;

$B=\{n\mid n=4m+2,m\in\mathbf{Z}\}\cup\{n\mid n=4m,m\in\mathbf{Z}\}=$ ________________.

容斥定理

设 $|A|$ 表示有限集 A 中元素的个数,则有:

$|A\cup B|=$ ____________.

$|A\cup B\cup C|=$ ________________________.

重点难点警示

1.考纲要求

理解集合:子集、补集、交集、并集的概念;了解空集和全集的意义;了解属于、包含、相等关系的意义,掌握有关数语和符号,并会用它正确的表示一些简单的集合.

2.警示

注意集合元素的性质,特别是互异性,进行解题后的检验,空集在解题时的特殊地位,防止漏掉,注意数形结合,即数轴和韦恩图的运用,注意对含字母的问题进行分类讨论.对集合语言的理解是本节教学的难点,在解题中要注意将集合语言和文字语言进行合理转化.

基础快速过关

1.同时满足 $\{1\}\subseteq A\subseteq\{1,2,3,4,5\}$,且 A 中所有元素之和为奇数的集合 A 的个数是 ( )

(A)5 (B)6 (C)7 (D)8

2.已知 $A=\{a,a+d,a+2d\}$,$B=\{a,aq,aq^2\}$,若 $A=B$,求 q 的值.

① $\begin{cases}a+d=aq & ①\\ a+2d=aq^2 & ②\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}q=\dfrac{a+2d}{a+d}\end{cases}$

②-①×2 得 $q=1$ 舍

② $\begin{cases}a+d=aq^2 & ①\\ a+2d=aq & ②\end{cases}$ $q=\dfrac{a+d}{a+2d}$

①×2-② 得 $q=-\frac{1}{2}$

典型例题导悟

【例1】设 $A=\{-4,2a-1,a^2\}$,$B=\{9,a-5,1-a\}$,已知 $A\cap B=\{9\}$,求实数 a 的值.

【就题论题】$\because A\cap B=\{9\}$,$\therefore 9\in A$,

若 $2a-1=9$,则 $a=5$,

此时 $A=\{-4,9,25\}$,$B=\{9,0,-4\}$,

$A\cap B=\{9,-4\}$,与已知矛盾,舍去.

若 $a^2=9$,则 $a=\pm3$,

当 $a=3$ 时,$A=\{-4,5,9\}$,$B=\{-2,-2,9\}$.

B 中有2个元素均为 -2,与集合中元素的互异性矛盾,应舍去.

当 $a=-3$ 时,$A=\{-4,-7,9\}$,$B=\{9,-8,4\}$,符合题意.

综上所述,$a=-3$.

【拓展提升】本题考查集合关系的基本特征——确定性、互异性、无序性,切入点是分类讨论思想,由于集合中元素用字母表示,检验结果必不可少.

【例2】已知 $A=\{x\mid x^2-2x+a\leqslant0\}$,$B=\{x\mid x^2-3x+2\leqslant0\}$,且 $A\subsetneq B$,求实数 a 的取值范围.

$1\le x\le 2$

【就题论题】由题意可得 $B=\{x\mid1\leqslant x\leqslant2\}$,

对于 A,分以下三种情况:

(1)$\Delta<0\Rightarrow a>1$,此时 $A=\varnothing$,满足 $A\subsetneq B$;

(2)$\Delta=0\Rightarrow a=1$,此时 $A=\{1\}$,满足 $A\subsetneq B$;

(3)$\Delta>0\Rightarrow a<1$,

此时 $A=\{x\mid1-\sqrt{1-a}\leqslant x\leqslant1+\sqrt{1-a}\}$,

要满足 $A\subsetneq B$,只须 $\begin{cases}1+\sqrt{1-a}\leqslant2 & a\geq0\\1-\sqrt{1-a}\geqslant1 & a\geq1\end{cases}$ 且两者等号不同时成立,解得 a 无解.

$\therefore a<1$ $\therefore\varnothing$

综上可得 a 的取值范围 $[1,+\infty)$.

【拓展提升】空集是集合运用中的一个"陷阱",其地位非常重要,必须引起注意,特别遇到 $A\subseteq B$、$A\subsetneq B$、B 非空情况,首先要考虑,$A=\varnothing$ 的情况.理解条件 $A\subsetneq B$ 是问题突破口,$A\subsetneq B$ 分两类:①A 是 $\varnothing$;

② $\begin{cases}1-\sqrt{1-a}\geqslant1\\1+\sqrt{1-a}\leqslant2\end{cases}$ 特别等号不能同时成立,所以此题在解题最后,去掉同时成立的 a 值.

随堂讲练

【例3】设 $A=\{x\mid-2<x<-1$ 或 $x>1\}$,$B=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$,$A\cup B=\{x\mid x>-2\}$,$A\cap B=\{x\mid1<x\leqslant3\}$,则 $a=$ -1,$b=$ 3.

【例4】设 $f(x)=x^2+px+q$,$A=\{x\mid x=f(x)\}$,$B=\{x\mid f[f(x)]=x\}$.

(1)求证:$A\subseteq B$;

设有元素 $x_0\in A$

$x_0=f(x_0)$.

B: $f[f(x_0)]=f(x_0)=x_0$

(2)如果 $A=\{-1,3\}$，求 B.

$\because A: x=-1.\ x=3$

$\therefore f(x)=-1.\ f(x)=3$

$\therefore B\ f[f(x)]=f(x)$

$B\{-1,3\}$

$B\{-1,3,\sqrt{3},-\sqrt{3}\}$

素能层级训练

一、选择题

1. 下列集合中不是空集的是 ( )

(A) $\{x\mid x^2+3x+2=0, x\in\mathbf{N}\}$

(B) $\{x\mid x$ 是边长为1,2,3的三角形$\}$

(C) $\{x\mid |x|=-1\}$

(D) $\{\varnothing\}$

2. 设 $M=\{m\mid m\geqslant\sqrt{15}\}$，$a=\sqrt{3}+\sqrt{5}$，那么 ( )

(A) $a\subset M$　(B) $a\notin M$　(C) $\{a\}\in M$　(D) $\{a\}\subset M$

3. $A=\{x\mid x=4n\}$，$B=\{x\mid x=2n\}$，$C=\{x\mid x=2n-2\}$ $(n\in\mathbf{N}_+)$，则 ( )

(A) $A\supset B\supset C$　(B) $A\supset B=C$

(C) $A=B=C$　(D) $C\supset B\supset A$

4. 集合 $S=\{y\mid y=3^x, x\in\mathbf{R}\}$，$T=\{y\mid y=x^2-1, x\in\mathbf{R}\}$，则 $S\cap T$ 等于 ( )

(A) S　(B) T

(C) $\varnothing$　(D)以上答案都不对

5. 非空集合 P、Q、R 满足 $P\cup Q=Q$、$Q\cap R=Q$，则 P、R 的关系是 ( )

$P\subseteq Q$　$Q\subseteq R$

(A) $P=R$　(B) $P\subseteq R$

(C) $P\supseteq R$　(D) $P\cap R=\varnothing$

6. 下列各式中正确的是 ( )

(A) $2\subset\{x\mid x\leqslant 2\}$　$2\in\{x\mid x\leq 2\}$

(B) $\{x\mid x>2$ 且 $x<0\}\in\varnothing$

(C) $\{x\mid x=4k\pm1, k\in\mathbf{Z}\}=\{x\mid x=2k-1, k\in\mathbf{Z}\}$

(D) $\{x\mid x=3k-1, k\in\mathbf{Z}\}\neq\{x\mid x=3k+2, k\in\mathbf{Z}\}$

二、填空题

7. 若集合 $A=\{y\mid y=3-x^2, x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y\mid y=2x^2-3, x\in\mathbf{R}\}$，则 $A\cap B=$ $\{y\mid -3\leq x\leq 3\}$.

8. 设全集 $I=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\}$，集合 $M=\{(x,y)\mid \frac{y-3}{x-2}=1\}$，$N=\{(x,y)\mid y\neq x+1\}$，那么 $\overline{M}\cap\overline{N}$ 等于 $(2,3)$.

9. 若集合 $M=\{x\mid 2x^2-5x-3=0\}$，$N=\{x\mid 2mx+1=0\}$，并且 $N\subset M$，则实数 m 的取值集合 ______.

10. 设集合 $M=\{x\mid 0\leqslant x<2\}$，集合 $N=\{x\mid x^2-2x-3<0\}$，则集合 $\overline{M}\cap N=$ $2\leq x<3$

三、解答题

11. 已知集合 $A=\{x\mid 2x^2-px+q=0\}$，$B=\{x\mid 6x^2+(p+2)x+5+q=0\}$，且 $A\cap B=\{\frac{1}{2}\}$，求实数 p,q 和 $A\cup B$.

$A\{\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\}$　$B\{\frac{1}{2}\}$

12. 已知 $\mathbf{R}$ 为全集，$A=\{x\mid \log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqslant -2\}$，$B=\{x\mid \frac{5}{x+2}\geqslant 1\}$，求 $\overline{A}\cap B$.

$A\{x\mid -1\leq x<3\}$　$B\ \frac{x-3}{x+2}\leq 0 \Rightarrow -2<x\leq 3$

$\overline{A}\{x\mid x<-1.\ x\geq 3\}$

$\overline{A}\cap B\{x\mid -2<x<-1.\ x=3\}$

13. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x\mid \log_2(x^2-5x+8)=1\}$，$C=\{x\mid x^2+2x-8=0\}$，求当 a 取什么实数时，$A\cap B\supsetneqq\varnothing$ 和 $A\cap C=\varnothing$ 同时成立.

$B.\ x=2.\ x=3.$　$C: x=2\ x=-4$

$A\cap B\supset\varnothing.$　$A\cap C=\varnothing.$

$x=2\ a\neq 5.\ a\neq -3$

$\therefore a=-2.$

研究性学习与创新

1. 已知函数 $f(x)=x^2+ax+b$，$A=\{x\mid f(x)=2x\}=\{2\}$，试求 a,b 的值及 $f(x)$.

$\therefore A=\{x\mid x^2+(a-2)x+b=0\}$

当 $x=2$ 时.

$\Delta\ (a-2)^2-4b=0.\ a=-2\ b=4.$

$\therefore f(x)=x^2-2x+4$

2. 设集合 $A=\{(x,y)\mid y=2x-1, x\in\mathbf{N}\}$，$B=\{(x,y)\mid y=ax^2-ax+a, x\in\mathbf{N}\}$，问是否存在非零整数 a，使 $A\cap B\neq\varnothing$？若存在，请求出 a 的值及 $A\cap B$.

$\begin{cases} y=2x-1 \\ y=ax^2-ax+a \end{cases}$

$\therefore -\frac{2\sqrt{3}}{3}\leq a\leq\frac{2\sqrt{3}}{3}$　$\therefore a=-1.$

圆您梦想

SHIJIJINBANG

§1—2 函数的有关概念

要点知识扫描

1.映射的概念

映射是特殊的对应——在映射 $f:A\to B$ 中,A 中任何一个元素在 B 中,________象.

映射中的集合 A、B 中的元素可以是实数,也可以是________.

2.函数定义

函数是特殊的映射:——是由________到________的映射.

两个函数相同的充要条件是它们的________在实质上完全相同.

3.函数的三种表示方法

________、________和________,若函数在其定义域的不同子集上,因为对应法则分别不同或用几个不同的式子来表示,这种表示形式的函数叫分段函数.

重点难点警示

1.考纲要求

了解映射的概念,在此基础上加深对函数概念的理解.了解反函数的概念及互为反函数图像间的关系,会求一些简单函数的反函数.

2.警示

映射与函数定义是考查重点,近三年都有考查:以选择题出现,属容易题,分段函数、抽象函数、复合函数是难点.

但要注意深刻理解函数的概念,区别映射与函数的异与同.

基础快速过关

1.已知函数 $f(x)=2x-1$,$g(x)=\begin{cases}x^2 & x\geqslant 0\\ -1 & x<0\end{cases}$

求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$ 的解析式.

2.判断下列各组函数是否表示同一个函数.

(1)$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$;

(2)$y=\lg x$ 与 $y=\dfrac{1}{2}\lg x^2$;

(3)$y=\sqrt{x^2}-1$ 与 $y=x-1$;

(4)$y=x$ 与 $y=\log_a a^x$($a>0$ 且 $a\neq 1$).

典型例题导悟

【例1】集合 $A=\{2,3,4\}$,$B=\{5,6,7,8\}$,那么可建立从 A 到 B 的映射个数是________.

【就题论题】从 A 到 B 分三步进行,第一步 A 中的元素 2 可有 4 种对应方法;

第二步 A 中的元素 3 也有 4 种对应方法;

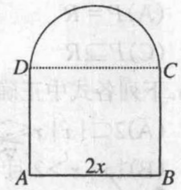
第三步 A 中的元素 4 也有 4 种对应方法.

由乘法原理不同的映射种数 $N_1=4\times4\times4=64$;

答案:64

【拓展提升】建立映射,就是给 A 中的元素找象,本题没有给出具体的对应法则,因此每一个元素在 B 中找象有 4 种可能.如果给出具体的对应法则,也是分步解答,据对应法则,确定每一个元素象的可能.故映射就是一个给集合 A 中的每个元素找到唯一象的过程.

【例2】用长为 l 的铁丝弯成下部为矩形,上部为半圆形的框架(如图所示),若矩形底边长为 $2x$,求此框架围成的面积 y 与 x 的函数解析式,并写出它的定义域.



【就题论题】$\because CD=AB=2x$,

$\therefore \overset{\frown}{CD}=\pi x$,

$\therefore AD=\dfrac{l-AB-\overset{\frown}{CD}}{2}=\dfrac{l-2x-\pi x}{2}$,

故 $y=2x\cdot\dfrac{l-2x-\pi x}{2}+\dfrac{\pi x^2}{2}=-(2+\dfrac{\pi}{2})x^2+lx$,

由 $\begin{cases}2x>0\\ \dfrac{l-2x-\pi x}{2}>0\end{cases}$ 得函数的定义域为 $(0,\dfrac{l}{\pi+2})$.

【拓展提升】本题函数解析式易求,关键是确定定义域.实际问题确定函数定义域时,除考虑函数解析式有意义外,还应考虑使实际问题有意义,即 $AB>0$,$AD>0$.函数定义域是确定函数的关键,切勿忽视.

随堂讲练

【例3】是否存在实数 a、b、c，使函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图像过点 $M(-1,0)$，且满足条件：对一切 $x\in\mathbf{R}$，都有 $x\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2}(1+x^2)$，并证明你的结论.

$b=a+c$　$ax^2+(b-1)x+c\geqslant0$ ①

$(\frac{1}{2}-a)x^2-bx+\frac{1}{2}-c\geqslant0$ ②

当 $x=1$ 时 $1\leqslant a+b+c\leqslant1$

$\therefore a+b+c=1$

$\therefore b=\frac{1}{2}$

当 $x=0$ 时 $0\leqslant c\leqslant\frac{1}{2}$

Δ 都 $\leqslant0$：$c=\frac{1}{2}-a$

由①得 $a=\frac{1}{4}$，由②得 $a=\frac{1}{4}$

$\therefore c=\frac{1}{4}$

【例4】设二次函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=f(2-x)$ 且 $f(x)=0$ 的两实根平方和为10，图像过点 $(0,3)$，求 $f(x)$ 的解析式.

二是对称轴 $-\frac{b}{2a}=2$. $b=-4a$.

$x_1^2+x_2^2=10=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}=16-\frac{6}{a}=10$

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$

$x_1x_2=\frac{c}{a}$

$a=1$，$b=-4$，$c=3$

图像过 $(0,3)$ $\therefore c=3$

$\therefore f(x)=x^2-4x+3$

素能层级训练

一、选择题

1. 已知映射 $f:A\to B$，其中集合 $A=\{-3,-2,-1,1,2,3,4\}$，集合 B 中的元素都是 A 中元素在映射 f 下的象，且对于任意的 $a\in A$，在 B 中和它对应的元素是 $|a|$，则集合 B 中元素的个数是（　）

(A)4　(B)5　(C)6　(D)7

2. 与函数 $y=x$ 有相同图像的一个函数是（　）

(A)$y=\sqrt{x^2}$　(B)$y=\frac{x^2}{x}$

(C)$y=a^{\log_a x}(a>0,a\neq1)$　(D)$y=\log_a a^x(a>0,a\neq1)$

3. 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2 & (x\geqslant0)\\ x & (x<0)\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}x & (x\geqslant0)\\ -x^2 & (x<0)\end{cases}$

则当 $x<0$ 时，$f[g(x)]$ 为（　）

(A)$-x$　(B)$-x^2$　(C)x　(D)x^2

4. 函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 与直线 $x=2$ 交点个数为（　）

(A)1个　(B)2个　(C)0个　(D)0个或1个

5. 已知 $f(x-\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$，则 $f(x+1)$ 等于（　）

(A)$(x+1)^2+\frac{1}{(x+1)^2}$　(B)$(x-\frac{1}{x})^2+\frac{1}{(x-\frac{1}{x})^2}$

(C)$(x+1)^2+2$　(D)$(x+1)^2+1$

$u=x-\frac{1}{x}$

$u^2=\frac{1}{x^2}+x^2-2$

$\therefore u+2=\frac{1}{x^2}+x^2$

$f(u)=u^2+2$

6. 设集合 A 和 B 都是正整数集合，映射 $f:A\to B$ 把集合 A 中的元素 n 映射到集合 B 中的元素 2^n+n，则在映射 f 下，象20的原象是

(A)2　(B)3　(C)4　(D)5

$A\to B$

$n\to 2^n+n$

$x\leftarrow 20$

二、填空题

7. 已知集合 $A=\{1,2,3,\cdots,10\}$，$B=\{1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\cdots,\frac{1}{100}\}$，设 $x\in A$，$y\notin B$，试给出一个对应法则 f，使 $f:A\to B$ 是从集合 A 到 B 的一个映射，$f:x\to y=$ $\underline{x^2}$.

8. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(ab)=f(a)+f(b)$ 且 $f(2)=p$，$f(3)=q$，则 $f(36)=$ $\underline{2(p+q)}$

9. 已知 $f(x)=\begin{cases}0 & (x>0)\\ -\mathrm{e} & (x=0)\\ x^2+1 & (x<0)\end{cases}$ 则 $f\{f[f(\pi)]\}$ 的值为 $\underline{e^2+1}$

$f(\pi)=0$

$f(0)=-e$

$f(-e)=e^2+1$

10. 下列各组两个函数中：

①$f(x)=1$，$g(x)=\mathrm{tg}x\cdot\mathrm{ctg}x$；

②$f(x)=\log_2|x|$，$g(x)=\log_4x^2$；

③$f(x)=a^{\log_a x}$，$g(x)=\log_a a^x(a>0,且a\neq1)$；

④$f(x)=\sqrt{x^2}$，$g(x)=\begin{cases}x & (x\geqslant0)\\ -x & (x<0)\end{cases}$；

⑤$f(x)=f[f^{-1}(x)]$，$g(x)=f^{-1}[f(x)]$

其中表示同一个函数的是 $\underline{②④}$（填出序号）.

三、解答题

11. (1)已知 $f(1-\cos x)=\sin^2x$，求 $f(x)$；

(2)已知 $f(x)=3x-1$，$f[h(x)]=g(x)=2x+3$，$h(x)$ 为 x 的一次函数，求 $h(x)$.

(1) 令 $u=1-\cos x$

$\cos x=(1-u)^2$

$\sin^2x=f(u)=1-(1-u)^2=2u-u^2$

设 $h(x)=ax+b$. $\because f(x)=3x-1$

$f[h(x)]=g(x)=2x+3$

即 $f[(ax+b)]=3(ax+b)-1$

12. 已知某人某年1至6月份的月经济收入如下：1月份为1 000元，从2月份起每月的月收入是其上一个月的2倍，用表格、图像、解析式三种形式表示该人1至6月份的月经济收入 y（元）与月份序号 x 的函数关系，并指出函数的定义域、值域、对应法则.

13. 设二次函数 $f(x)$ 满足 $f(x-2)=f(-x-2)$,且图像在 y 轴上的截距为 1,被 x 轴截得的线段长为 $2\sqrt{2}$,求 $f(x)$ 的解析式.

对称轴 $x=-2$

设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ ∴ $-\frac{b}{2a}=-2$

$\begin{cases} x=0 & y=1 \\ \cancel{x=-2\pm\sqrt{2}\ \ y=0} \\ |x_1-x_2|=2\sqrt{2} \\ -\frac{b}{2a}=-2 \end{cases}$ ∴ $\begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=2 \\ c=1 \end{cases}$

∴ $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+1$

14. 已知 $f(x)=x^2-4ax+2a+30>0$ 对一切实数 x 恒成立. 试求关于 x 的方程 $\frac{x}{a+3}=|a-1|+1$ 的根的取值范围.

$\Delta<0$

$16a^2-8a-120<0$

$2a^2-a-15<0$

$a=-\frac{5}{2}$ $a=3$ → $-\frac{5}{2}<a<3$

$|a-1|$ 取 $1-a$ 且 $a\neq-3$

方程 $\cancel{\frac{x}{a+3}-|1-a|-1=0}$

$\cancel{\frac{x-(a+3)(1-a)-(a+3)}{a+3}=0}$

$x=(1-a)(a+3)+a+3$

$=-(a+\frac{1}{2})^2+\frac{25}{4}$

当 $-\frac{5}{2}<a<3$ 时 $\frac{9}{4}<x<18$

研究性学习与创新

1234

建立映射问题:要想建立映射,首先理解映射的概念,映射是特殊的对应,特殊在 A 中元素在对应法则 f 下,在 B 中有唯一确定的元素与之对应. 建立映射的过程也就是给 A 中元素找象的过程(注意 A 中多个元素可对应 B 中同一个元素). 在这个过程中须分步解决,A 中有多少个元素,就分多少步.

设集合 $M=\{-1,0,1\}$,$N=\{2,3,4,5,6\}$,映射 $f:M\to N$,对任意 $x\in M$ 都有 $x+f(x)+xf(x)$ 是奇数,这样的映射 f 的个数为 ( )

(A)24 (B)27 (C)50 (D)125

$x=0$、$\{3,5\}$

$x=1$ $2f(x)+1$=奇

$x=-1$

名人名言

不知道他自己的人的尊严,他就完全不能尊重别人的尊严。

——席勒

§1—3 函数定义域值域

要点知识扫描

1. 函数定义域:____

2. 函数值域:________________,而值域取决于 定义域和对应法则 ,故不论采取什么方法求值域,都要考虑其定义域.

重点难点警示

1. 考纲要求

理解函数概念,要求对定义域、值域灵活掌握.

2. 警示

(1)求定义域的主要依据是:由解析式求定义域时,分母不为零;偶次方根的被开方数不小于零;真数大于零;指数函数和对数函数的底数必须大于零且不等于 1;三角函数中,$y=\operatorname{tg}x$ $(x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z})$,$y=\operatorname{ctg}x(x\in\mathbf{R},x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z})$ 等.

复合函数的定义域:已知 $f(x)$ 的定义域是 $x\in[a,b]$,求 $f[g(x)]$ 的定义域,是指满足 $a\leqslant g(x)\leqslant b$ 的 x 的取值范围.

(2)求值域的主要方法有 一般复合函数定义域和内层函数

①分析观察法求值域

有的函数的结构并不复杂,可以通过基本函数的值域及不等式的性质观察出函数的值域.

②配方法求值域

二次函数或能转化为形如:$F(x)=a[f(x)]^2+bf(x)+c$ 型的函数的值域,均可用配方法,但要注意 $f(x)$ 的取值范围.

③不等式法求值域

利用基本不等式 $a+b\geqslant2\sqrt{ab}$,$a+b+c\geqslant3\sqrt[3]{abc}$ 可求某些函数的值域,但要注意"全正、定值、取等号"的条件.

④判别式法求值域

把函数转化为关于 x 的二次方程 $F(x,y)=0$,通过方程有实根,判别式 $\Delta\geqslant0$,从而求得原函数的值域. 形如 $y=\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}$($a_1,a_2$ 不同时为零)的函数的值域常用此法求得.

⑤反函数法求值域

利用函数与它的反函数的定义域和值域的关系,通过求反函数的定义域而得到原函数的值域. 形如 $y=\frac{cx+d}{ax+b}(a\neq0)$ 的函数值域可用此法.

⑥利用函数的单调性求值域

如能确定函数在定义域的单调性,则可利用单调性求出其

值域，形如 $y=ax+b+\sqrt{cx+d}$（a、b、c、d 均为常数，$ac\neq0$），在 a、c 同号时，其单调性可确定，故可用单调性求其值域.

⑦换元法求值域

运用代数或三角换元，将所给函数转化成函数值容易确定的另一函数，从而求得原函数的值域.形如：$y=ax+b\pm\sqrt{cx+d}$（a、b、c、d 均为常数，且 $ac\neq0$）的函数常用此法求值域.

⑧数形结合法求值域

利用函数所表示的几何意义，借助几何方法或图像来求函数的值域.

基础快速过关

1.已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[a,b]$，且 $b>-a$，求 $f(x^2)$ 的定义域.

$a\le x^2\le b$

2.求函数 $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$ 的值域.

$f(x)^{-1}=\frac{x}{2-y}$　$y\neq2$

$\therefore f(x)$ 值域 $\{y\mid y\in R 且 y\neq2\}$

3.已知 $x^2+y^2=4$，求 $4x+3y$ 的最值.

$\frac{x^2+y^2}{4}=1$

$\frac{x}{2}=\sin x$，$\frac{y}{2}=\cos x$

$\therefore 4x+3y=10\sin(x+\varphi)$

当 $\sin(x+\varphi)=1$　max $=10$

当 $\sin(x+\varphi)=-1$　最小值 $=-10$

法二：判别式法

设 $T=4x+3y$　$y=\frac{T-4x}{3}$ 代入方程

$x^2+(\frac{T-4x}{3})^2=4$

$9x^2+T^2-8Tx+16x^2-36=0$

$\Delta\geq0$

$36T^2\le3600$

$-10\le T\le10$

典型例题导悟

【例1】求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\frac{\lg(|x|-x)}{\sqrt{1-x^2}}$；

(2) $y=\sqrt{25-x^2}+\lg\cos x$.

【就题论题】(1)由 $\begin{cases}1-x^2>0\\|x|-x>0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-1<x<1\\x<0\end{cases}$

∴函数的定义域为 $(-1,0)$.

(2)由 $\begin{cases}25-x^2\geq0\\\cos x>0\end{cases}$

得 $\begin{cases}-5\le x\le5\\2k\pi-\frac{\pi}{2}<x<2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})\end{cases}$

借助于数轴，解这个不等式组，得函数的定义域为

$[-5,-\frac{3\pi}{2})\cup(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\cup(\frac{3\pi}{2},5]$.

【拓展提升】求定义域有时需解多个不等式构成的不等式组，需借助数轴来解，特别是求三角函数定义域时，需灵活应用单位圆来解决.

【例2】已知函数 $y=\frac{ax+b}{x^2+1}(x\in\mathbf{R})$ 的值域为 $[-1,4]$，求常数 a,b.

【就题论题】∵函数 $y=\frac{ax+b}{x^2+1}(x\in\mathbf{R})$ 的值域为 $[-1,4]$.

根据函数的定义，对于任意 $y\in[-1,4]$ 必有 $x\in\mathbf{R}$，

使 $y=\frac{ax+b}{x^2+1}$ 成立，

即关于 x 的方程 $y(x^2+1)=ax+b$ 有实根.

亦即，方程 $yx^2-ax+(y-b)=0$ 有实根，

若 $y=0$，则 $x=-\frac{b}{a}\in\mathbf{R}$；

若 $y\neq0$，则 $\Delta=a^2-4y(y-b)\geq0$，

即 $4y^2-4by-a^2\le0$，而 $-1\le y\le4$，

∴方程 $4y^2-4by-a^2=0$ 的两根为 $-1,4$.

由根与系数的关系，得 $b=3,a^2=16$，

$\therefore a=\pm4,b=3$.

【拓展提升】选择方法的关键是抓题目的特点，能化成关于 x 的一元二次方程的式子均可用判别式法，注意在解题过程中分类讨论求函数值域.这类问题的关键是转化思想的运用.

随堂讲练

【例3】求下列函数的值域：

(1) $y=2x^2-4x+1(0\le x\le3)$；

(2) $y=\frac{4x+3}{x^2+1}$；　(3) $y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$；

(4) $y=x+\sqrt{2x-1}$；(5) $y=\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$.

(1) $y=2(x^2-2x+1)-1$

$=2(x-1)^2-1$

$-1\le y\le7$

(2) $yx^2+y-4x-3=0$

$\Delta\geq0$

$\therefore -1\le y\le4$

(3) $y=1-\frac{2}{e^x+1}$

(4) $x\geq\frac{1}{2}$　$\therefore y\geq\frac{1}{2}$　$[\frac{1}{2},+\infty)$

或设 $\sqrt{2x-1}=T$

【例4】求函数 $y=2\sqrt{x+1}+\sqrt{6-x}$ 的值域.

$(\sqrt{x+1})^2+(\sqrt{6-x})^2=7$

设 $\sqrt{x+1}=\sqrt{7}\cos\alpha$

$\sqrt{6-x}=\sqrt{7}\sin\alpha$

$\therefore 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

$y=2\sqrt{x+1}+\sqrt{6-x}$

$=2\sqrt{7}\cos\alpha+\sqrt{7}\sin\alpha$

$=\sqrt{35}\cdot\frac{2\sqrt{7}\cos\alpha+\sqrt{7}\sin\alpha}{\sqrt{35}}=\sqrt{35}\sin(\alpha+\varphi)$

素能层级训练

一、选择题

1. 函数 $y=\sqrt{1-x^2}-\sqrt{x^2-1}$的定义域是 ( )

(A) $-1\leqslant x\leqslant 1$ (B) $x\leqslant -1$,或 $x\geqslant 1$

(C) $0\leqslant x\leqslant 1$ (D) $\{-1,1\}$

2. 设 $f(u)$的定义域为$(0,1)$,则函数 $f(\ln x)$的定义域为 ( )

$0<\ln x<1$

(A) $(0,1)$ (B) $(1,e)$ (C) $[0,1]$ (D) $[1,e]$

3. 函数 $y=2-\sqrt{4x-x^2}\,(x\in[0,4])$的值域是 ≤ 2 ( )

(A) $[-2,2]$ (B) $[1,2]$

(C) $[0,2]$ (D) $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

4. 已知函数 $y=x^2-2x+3$ 在区间$[0,m]$上有最大值3,最小值2,则 m 的取值范围是 ( )

(A) $[1,+\infty)$ (B) $[0,2]$ (C) $(-\infty,2]$ (D) $[1,2]$

5. 值域是$(0,+\infty)$的函数是 ( )

(A) $y=x^2-x+1$ (B) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}$

(C) $y=3^{\frac{1}{2-x}}$ (D) $y=|\log_2 x^2|$

6. 已知函数 $f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$,且满足 $f(x+2)=-f(x)$,当$0\leqslant x\leqslant 1$时,$f(x)=x$,则 $f(8.5)$等于

(A) -0.5 (B) 0.5 (C) -1.5 (D) 1.5

4个周期 8 8.5 $f(0.5)=0.5$

二、填空题

7. 函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(2-x)}}$的定义域是 $0<2-x<1$, $1<x<2$.

8. 设函数 $f(x)=\log_2(x^2+ax-a)$,若 $f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$,则 a 的取值范围是 $-4,0$;若 $f(x)$的值域为$\mathbf{R}$,则 a 的取值范围是 $(-\infty,-4]\cup[0,+\infty)$.

9. 函数 $y=f(x)\,(x\geqslant 0)$的反函数是 $f^{-1}(x)=\sqrt{x}-1\,(x\geqslant 0)$,那么函数 $y=f(x)$的定义域是 $[-1,+\infty)$.

10. 实数 x,y 满足 $x^2+y^2-2x-4y+1=0$,那么$\dfrac{y}{x+2}$取值范围是______.

三、解答题

11. 已知二次函数 $f(x)=(\lg a)x^2+2x+4\lg a$ 的最大值为3,求 a 的值.

$\dfrac{16\lg^2 a-4}{4\lg a}=3$

$16T^2-12T-4=0$

$4T^2-3T-1=0$

$T_1=-\frac{1}{4}$, $T_2=1$

∵有最大值 ∴$\lg a<0$ 即 $0<a<1$

∴$\lg a=-\frac{1}{4}$

$a=10^{-\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{10^{\frac{1}{4}}}=\dfrac{10^{\frac{3}{4}}}{10^{\frac{1}{4}}\cdot 10^{\frac{3}{4}}}=\dfrac{\sqrt[4]{1000}}{10}$

12. 已知 $f(x)=2+\log_3 x$, $x\in[1,3]$,求函数 $y=[f(x)]^2+f(x^2)$的值域.

$f(x)\in[2,3]$

$f(x^2)=2+\log_3 x^2$

$f(x^2)\in[2,4]$

$\therefore [f(x)]^2+f(x^2)$

$[f(x)]^2\in[4,9]$

$[f(x)]^2=(2+\log_3 x)^2+2+\log_3 x^2$

$=\log_3^2 x+6\log_3 x+6$

$(\log_3 x+3)^2-3$

$[6,13]$

13. 设 $y=(\log_2 x)^2+(t-2)\log_2 x-t+1$,若 t 在$[-2,2]$上变化时,y 恒取正值,求 x 的取值范围.

$f(t)=(\log_2 x-1)t+\ldots=y$

$f(t)=f(-2)$时 $\log_2^2 x-4\log_2 x+3>0$

$0<x<\frac{1}{2}$ 或 $x>8$

$f(t)=f(2)$时 $\log_2^2 x>1$

$0<x<\frac{1}{2}$ 或 $x>2$

$0<x<\frac{1}{2}$ 或 $x>8$

14. 已知函数 $f(x)=\log_3\dfrac{mx^2+8x+n}{x^2+1}$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[0,2]$,求 m,n 的值.

设 $\dfrac{mx^2+8x+n}{x^2+1}=u$ $u\in[1,9]$

$ux^2+u-mx^2-8x-n=0$

$(u-m)x^2-8x+u-n=0$

$\Delta\geq 0$

$4u^2-(m+n)u+4mn-16\leq 0$

$m+n=10$

$mn-16=9$ $m=n=5$

研究性学习与创新

已知函数 $f(x)=2^x-\dfrac{a}{2^x}$,$h(x)=2-2^{x-2}+\dfrac{a}{2^{x-2}}$,$F(x)=\dfrac{1}{a}f(x)+h(x)$,若 $F(x)$的最小值是 m 且 $m>2+\sqrt{7}$,求实数 a 的取值范围.

$=2+\dfrac{2^x}{a}-2^{x-2}-\dfrac{1}{2^x}+\dfrac{a}{2^{x-2}}$

$=2+\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{4}\right)2^x+(4a-1)\dfrac{1}{2^x}$

讨论 ①如果 $a<0$ $\frac{1}{a}-\frac{1}{4}<0$ $4a-1<0$

$\therefore F(x)<2$

②如果 $0<a<\frac{1}{4}$ $\frac{1}{a}-\frac{1}{4}>0$ $4a-1<0$

$\therefore F(x)$是增函数无最小值

③如果 $a>4$ $\frac{1}{a}-\frac{1}{4}<0$ $4a-1>0$ 当且仅当 $\frac{4-a}{4a}\cdot 2^x=$

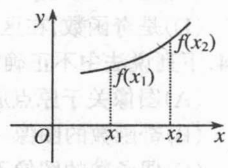
$F(x)=2+2\sqrt{\ldots}=2+\sqrt{7}$

§1—4 函数的单调性与奇偶性

要点知识扫描

一、函数的单调性

一般地，对于给定区间上的函数 $f(x)$.



1.如果＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿，那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是增函数.

2.如果＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是减函数.

要注意定义中 x_1、x_2 的任意性，而不能取定义域中某两个确定的值，初用定义证明单调性，有的同学常会错误地选取区间 $[a,b]$ 中的端点值.

二、函数的奇偶性

1.偶函数：如果＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿，那么函数 $f(x)$ 就叫做偶函数.偶函数图像关于＿＿＿＿对称.

2.奇函数：如果＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿那么函数 $f(x)$ 叫做奇函数.奇函数图像关于＿＿＿＿＿对称.

重点难点警示

1.考纲要求

了解函数的单调性、奇偶性的概念，掌握判断单调性奇偶性的方法.

2.警示

函数具有奇偶性的必要条件是定义域关于原点对称.

偶函数的图像关于 y 轴对称.

奇函数的图像关于原点对称.

奇函数在原点有定义：必有 $f(0)=0$.

$f(x)$ 是偶函数，则 $f(-x)=f(x)=f(|x|)$.

基础快速过关

1.(1)已知 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x^2-2x$，则在 $\mathbf{R}$ 上 $f(x)$ 的表达式为　(　　)

(A) $-x(x-2)$　　(B) $x(|x|-2)$

(C) $|x|(x-2)$　　(D) $|x|(|x|-2)$

(2)定义在 $(-1,1)$ 上的奇函数 $f(x)=\dfrac{x+m}{x^2+nx+1}$，试确定常数 m、n 的值.

2.设 $a>0$，且 $a\neq 1$，试求函数 $y=\log_a(4+3x-x^2)$ 的单调区间.

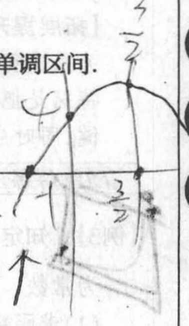
$4+3x-x^2>0$

$-1<x<4$

对称轴 $x=\frac{3}{2}$

$0<a<1$　$(-1,\frac{3}{2})\downarrow$　$(\frac{3}{2},4)\uparrow$

$a>1$　$(-1,\frac{3}{2})\uparrow$　$(\frac{3}{2},4)\downarrow$



方法：研究复合函数的单调性……

同增为增　同减为减

典型例题导悟

【例1】设定义在 $[-2,2]$ 上的偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上单调递减，若 $f(1-m)<f(m)$，求实数 m 的取值范围.

【就题论题】根据函数的定义域，$1-m,m\in[-2,2]$，但是，$1-m$ 和 m 在 $[-2,0]$、$[0,2]$ 的哪个区间内？如果就此讨论，将十分复杂，如果注意到性质："如果 $f(x)$ 是偶函数，那么 $f(-x)=f(x)=f(|x|)$."将有如下解法：

$\because f(x)$ 是偶函数，$\therefore f(-x)=f(x)=f(|x|)$，

$\therefore$ 不等式 $f(1-m)<f(m)$

$\Leftrightarrow f(|1-m|)<f(|m|)$

偶函数可以绝对值

又当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)$ 是减函数，

$\therefore\begin{cases}|1-m|>|m|\\ -2\leqslant 1-m\leqslant 2\\ -2\leqslant m\leqslant 2\end{cases}$　解得 $-1\leqslant m<\dfrac{1}{2}$.

【拓展提升】深刻理解条件内涵是简化解题的关键，$f(x)$ 是偶函数可得 $f(x)=f(-x)=f(|x|)$.此法可避免繁琐的分类讨论.

【例2】设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，其图像关于直线 $x=1$ 对称，对任意 $x_1,x_2\in[0,\frac{1}{2}]$ 都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$.

(1)设 $f(1)=2$，求 $f(\frac{1}{2})$，$f(\frac{1}{4})$；

偶函数一定周期函数

周期T=对称轴……

(2)证明：$f(x)$ 是周期函数.

【就题论题】(1)由 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$，

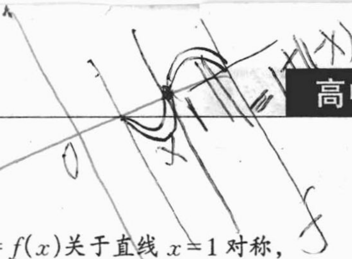
$x_1,x_2\in[0,\frac{1}{2}]$ 知 $f(x)=f(\frac{x}{2})\cdot f(\frac{x}{2})\geqslant 0$，$x\in[0,1]$.

$\because f(1)=f(\frac{1}{2})\cdot f(\frac{1}{2})=[f(\frac{1}{2})]^2$，$f(1)=2$，

$\therefore f(\frac{1}{2})=2^{\frac{1}{2}}$，

$\because f(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{4})\cdot f(\frac{1}{4})=[f(\frac{1}{4})]^2$，$f(\frac{1}{2})=2^{\frac{1}{2}}$，

$=(4a-1)\cdot\frac{1}{2^x}$　即 $2^x=\sqrt{\frac{a(4a-1)}{4-a}}$　$2+2\sqrt{\frac{(4-a)(4a-1)}{4a}}>2+\sqrt{5}$　整理 $2a^2-5a+2<0$　$\frac{1}{2}<a<2$



$\therefore f(\frac{1}{4})=2^{\frac{1}{4}}$.

(2)依题意 $y=f(x)$关于直线 $x=1$ 对称,

故 $f(x)=f(1+1-x)$,即 $f(x)=f(2-x),x\in\mathbf{R}$.

又由 $f(x)$是偶函数知:$f(-x)=f(x),x\in\mathbf{R}$,

$\therefore f(-x)=f(2-x),x\in\mathbf{R}$,

将上式中 $-x$ 以 x 代换,得 $f(x)=f(x+2),x\in\mathbf{R}$,这表明 $f(x)$是 $\mathbf{R}$ 上的周期函数,且2是它的一个周期.

【拓展提升】抽象函数的问题主要是依据题设给出的条件和关系进行合理转化和构造.问题解决过程中,正确应用条件,特别是把条件的深刻内涵充分挖掘出来,是解决问题的关键,同时应充分积累条件的多种角度应用的经验.

随堂讲练

【例3】已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(\log_2 x)=x+\frac{a}{x}$,$a$ 为常数.

(1)求函数 $f(x)$的解析式及定义域;

(2)如果 $f(x)$为偶函数,求 a 的值;

(3)当 $f(x)$为偶函数时,用单调性定义讨论 $f(x)$的单调性.

偶函数只需讨论半边

(1)令 $u=\log_2 x\,(u\in R)$ $x=2^u$

$f(u)=2^u+a\cdot2^{-u}$

$f(x)=2^x+a\cdot2^{-x}$

(2) $f(x)=f(-x)$ 代入

即 $a=1$

(3)设 $0<x_1<x_2$

$f(x_1)-f(x_2)$

$=(2^{x_1}+a\cdot2^{-x_1})-(2^{x_2}+a\cdot2^{-x_2})$

$=(2^{x_1}-2^{x_2})(1-\frac{1}{2^{x_1+x_2}})$

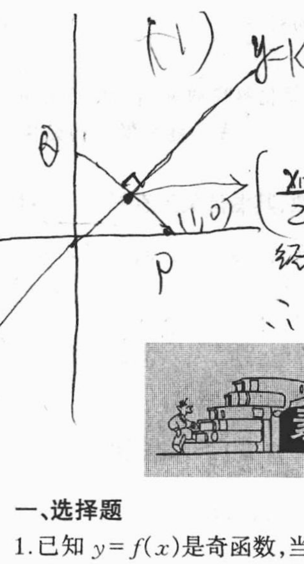
在$(0,+\infty)$↑ 在$(-\infty,0)$↓

【例4】设点 $P(1,0)$关于直线 $y=kx$ 的对称点为 Q,记直线 OQ 的斜率为 $f(k)$,(O 为坐标原点).

(1)写出以 k 为自变量的函数 $f(k)$的表达式,并求其定义域;

(2)判断函数 $f(k)$的奇偶性;

(3)判断函数 $f(k)$在区间$(1,+\infty)$上的单调性.



(1) ∵Q关于y=kx对称

$\therefore \frac{y_1-0}{x_1-1}=-\frac{1}{k}$ ①

$(\frac{x_1+1}{2},\frac{y_1+0}{2})$在 $y=kx$ 上 ②

经整理 ②·k−① 解得 $x_1=\frac{1-k^2}{1+k^2}$

$\therefore y_1=\frac{2k}{k^2+1}$ $\therefore f(k)=\frac{y_1}{x_1}=\frac{\frac{2k}{k^2+1}}{\frac{1-k^2}{k^2+1}}$

$=\frac{2k}{1-k^2}(k\neq\pm1)$

(2) $f(-k)=-f(k)$

∴为奇函数

素能层级训练

一、选择题

1.已知 $y=f(x)$是奇函数,当 $x>0$ 时,$f(x)=x(1+x)$,当 $x<0$ 时,$f(x)$应该等于 ( )

(A)$-x(1-x)$ (B)$x(1-x)$

(C)$-x(1+x)$ (D)$x(1+x)$

$-f(x)=-x-x^2$

2.若函数 $f(x)$的图像与 $y=(\frac{1}{2})^x$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称,则函数 $f(2x-x^2)$的单调减区间是 ( )

(A)$[1,+\infty)$ (B)$(-\infty,1]$

(C)$(0,1]$ (D)$[1,2)$

3.函数 $y=\lg|x|$ ( )

(A)是偶函数,在区间$(-\infty,0)$上单调递增

(B)是偶函数,在区间$(-\infty,0)$上单调递减

(C)是奇函数,在区间$(0,+\infty)$上单调递增

(D)是奇函数,在区间$(0,+\infty)$上单调递减

4.下列说法中不正确的是 ( )

(A)图像关于原点成中心对称的函数一定是奇函数

(B)奇函数的图像一定经过原点

(C)偶函数的图像不经过原点,则它与 x 轴交点的个数一定是偶数

(D)图像关于 y 轴对称的函数一定是偶函数

5.已知 $f(x)$与 $g(x)$都不是常数且定义域均为 $\mathbf{R}$,条件"$f(x)$、$g(x)$同是奇函数或同是偶函数"是条件"$f(x)$与 $g(x)$的积是偶函数"的 ( )

(A)必要不充分条件 (B)充分不必要条件

(C)充分且必要条件 (D)既不充分也不必要条件

6.函数 $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的反函数 ( )

(A)是奇函数,在$(0,+\infty)$上是减函数

(B)是偶函数,在$(0,+\infty)$上是减函数

(C)是奇函数,在$(0,+\infty)$上是增函数

(D)是偶函数,在$(0,+\infty)$上是增函数

二、填空题

7.已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c(-2a-3\leqslant x\leqslant1)$是偶函数,则 $a=$______,$b=$______.

8.设 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,它的图像关于 $x=2$ 对称,已知 $x\in[-2,2]$时,函数 $f(x)=-x^2+1$,则 $x\in[-6,-2]$时,$f(x)=$__________.

9.若 $f(x)$是偶函数,$g(x)$是奇函数,且 $f(x)+g(x)=\frac{1}{x-1}$,则 $f(x)=$________,$g(x)=$________.

10.$f(2x+1)$是偶函数,则 $f(2x)$的对称轴为________,$f(x)$的对称轴为________.

三、解答题

1.讨论函数 $f(x)=\log_a(3x^2+5x-2)$的单调性.