Mathematical Modeling In Daily Life

桌子一定能放平吗

《红楼梦》前80回和后40回的作者之谜

莎士比亚新诗真伪之鉴定

哥尼斯堡七桥问题与欧拉图

RSA密码体制

股票和股票交易

生活中的数学模型

管宇 主编

浙江工商大學出版社
ZHEJIANG GONGSHANG UNIVERSITY PRESS

Mathematical Modeling In Daily Life

生活中的数学模型

主 编 管 宇
副主编 王胜奎 方惠兰 胡海龙

浙江工商大学出版社
ZHEJIANG GONGSHANG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

生活中的数学模型 / 管宇主编. —杭州：浙江工商大学出版社，2013.5

ISBN 978-7-81140-770-9

Ⅰ.①生… Ⅱ.①管… Ⅲ.①数学模型 Ⅳ.①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 088745 号

生活中的数学模型

管　宇 主编

王胜奎　方惠兰　胡海龙 副主编

责任编辑　王黎明
责任校对　何小玲
封面设计　王好驰
责任印制　汪　俊
出版发行　浙江工商大学出版社
（杭州市教工路 198 号　邮政编码 310012）
（E-mail：zjgsupress@163.com）
（网址：http://www.zjgsupress.com）
电话：0571－88904980,88831806(传真)
排　　版　杭州朝曦图文设计有限公司
印　　刷　杭州杭新印务有限公司
开　　本　710mm×1000mm　1/16
印　　张　14.5
字　　数　260 千
版 印 次　2013 年 5 月第 1 版　2013 年 5 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-81140-770-9
定　　价　29.00 元

前言

模，法式、规范、标准。本义：铸造器物的模子。按《说文》：水曰法、木曰模、土曰型、金曰镕、竹曰范。模型有实物模型和理论模型之分，对描述的对象用数学语言作出的描述和处理都称为数学模型。数学是研究数量、结构、变化以及空间模型等概念的一门科学，它是通过抽象化和逻辑推理，在计数、计算、量度和对物体形状及运动的观察中产生的。数学是现代科学技术的基础，广义地说，任何领域中涉及数量化处理的模型都可以称为数学模型。“万物皆数量”，大至宇宙航天，小到日常生活，数与量无处不在。随着电子计算机科学技术的发展和普及，大规模计算和海量数据的处理已不再是难事。几乎所有领域都会谈及“模型”或“模式”，数学正受到前所未有的重视。但是数学的灵魂是抽象和逻辑，这也使太多太多的人们从小时候喜欢数学，到大学后害怕数学，再到后来逃离数学。

介绍数学的书籍很多，基本上可分为两类，一类是令人生畏的充满定理公式的正宗数学书，一类是科普性读物。后者通常是以智力游戏形式出现，结果是许多人以为数学就是做数字游戏或帮助智力开发。撰写本书的初衷是给人们提供一本介绍数学和数学模型的科普性读物，既不是纯数学，也不是数字游戏。每一章一个主题，从实际背景出发，由浅入深引入数学的思想和方法，试图以不多的篇幅展示量化分析的作用。数学就在我们的身边，数学并不神秘。今天的人们绝对离不开数字产品，如电脑、手机，可是其中又有多少人精通相关软件，又有几人清楚 Windows 或 Word 的运行机制和源代码？即使这样，大家还不都是使用得不亦乐乎！数学完全类似，如果你只关注数学思想、数学方法，而忽视数学公式、数学推导、烦琐计算，会发现数学与你越来越亲近，

你越来越需要它。大多数人就是因为一大堆数学公式、绝对精确推导和一不小心就可能出错的烦琐计算，而敬畏数学、害怕数学、远离数学。如果读者能耐着心浏览本书，并因此而感觉“数学其实很普通，只是因为我太忙没有时间进一步钻研它，否则说不定我也能编出一个某氏定理来”，那我们就非常欣慰了。

本书共 11 章，第 1 章从生活中爬山说起，抛石头测量崖高，先按自由落体运动估算，然后分别增加考虑空气阻力和声音传播，进一步考虑海拔高度、温度、风速等因素影响，尽可能全面完整地回答问题。本章最后给出思考题，并给出相关数据让读者自己完成，这其中介绍了大量的背景知识。如果将正文与思考题内容连起来，就能扩充为 1 个完整的数学模型。第 2 章介绍桌子放平、雨中行走、双层玻璃和连锁经营模型。第 3 章介绍铅球投掷、运动生物力学、体育项目、身体形态特征和赛程安排。第 4 章介绍文学作品和油画辨伪、文物鉴定。第 5 章介绍人口模型和社会历史演变规律。第 6 章介绍饮酒、吃药、打针、传染病的动力学模型。第 7 章介绍战争与博弈。第 8 章介绍图论与网络分析。第 9 章介绍密码学。第 10 章介绍股市分析方法。第 11 章介绍数学建模竞赛和竞赛题目。

本书编写过程中参考了大量的国内外相关文献及网络资料，书后只是列出了其中主要的参考文献。衷心地感谢为数学作出贡献的所有前辈、同仁和数学爱好者们！本书由管宇等人编写，第 6 章由方惠兰执笔，第 8 章由王胜奎执笔，第 9 章由胡海龙执笔，其余各章由管宇执笔，最后由管宇统稿。编者们非常努力地想完成一本令读者满意的科普性读物，因时间和水平限制，难免有这样或那样的错误和欠缺，恳请读者提出宝贵意见，以便进一步修改与完善。特别是有些观点或说法可能早有智者提出，因我们能力所限，书中未提及他们的大名，恳请谅解！

本书的编写得到浙江农林大学教材建设项目经费的资助，本书的出版得到了浙江工商大学出版社的大力支持，在此表示感谢！

管　宇

2012 年 11 月

目录

CONTENTS

第9章 密码学及其应用

第10章 股市实战——预测与决策

第11章 数学建模竞赛

第1章
从山崖测量说起——什么是数学模型

1.1 山崖测量

1.1.1 爬山

爬山是一项极佳的有氧运动，能使肌肉获得高出平常10倍的氧气，从而使血液中的蛋白质增多，免疫细胞数量增加，帮助体内的有害物排出；在促进新陈代谢的同时，还可以加快脂肪的消耗，因此爬山也有塑形的功效。爬山是最全面的健身运动，在一步步向上攀爬、跨越时，上下肢反复屈伸，能量消耗极大，使心跳加速，可有效地预防心脑血管病和呼吸系统病，它要比徒步行走和慢跑的运动量大，是一项有效减肥的运动。

山中的空气异常新鲜，对于改善肺通气量、增加肺活量、提高肺的功能很有益处，同时还能增强心脏的收缩能力。山间道路坎坷不平，有益于改善人体的平衡功能，增强四肢的协调能力，尤其是行走在没有经过人为修饰的非台阶路段，可使人体肌纤维增粗、肌肉发达，增强肢体灵活度。保持肌肉和运动器官的协调，增加骨中矿物质的含量，减少骨质疏松的发生，有利于刺激骨细胞的生长，增强韧带和肌腱的力量，防止僵化和早衰。当然，这也可能让膝盖受损。运动学专家建议，上山时身体要前倾，当向上迈的脚踏在台阶上时，后腿应随之用力蹬，而不是简单地起到支撑作用；下山时，为了防止膝关节承受压力增大，前脚向下伸，接触到下一个台阶时，膝盖处应有一定弯曲，前脚掌先着地，再过渡到全脚掌着地，以缓冲膝关节的压力。

另一方面，在山巅之上极目远眺，可以解除眼部肌肉的疲劳，还可使紧张的大脑得到放松和休息，更主要的是此时此刻登山者会获得心情上的愉悦。我们站在山顶，念诵诗神杜甫千古名句《望岳》："岱宗夫如何，齐鲁青未了。造化钟神秀，阴阳割昏晓。荡胸生层云，决眦入归鸟。会当凌绝顶，一览众山小。"此情此景实难用语言表述。身心两相宜，这正是许多人（不管他是达官贵人还是凡夫俗子）只要有时间都愿意去爬山的原因所在吧。

关于登山的著名诗句再摘几首，与读者共享。诗仙李白《独坐敬亭山》：

"众鸟高飞尽，孤云独去闲。相看两不厌，只有敬亭山。"杜牧《山行》："远上寒山石径斜，白云深处有人家。停车坐爱枫林晚，霜叶红于二月花。"王安石《登飞来峰》："飞来山上千寻塔，闻说鸡鸣见日升。不畏浮云遮望眼，只缘身在最高层。"毛泽东《为李进同志题所摄庐山仙人洞照》："暮色苍茫看劲松，乱云飞渡仍从容。天生一个仙人洞，无限风光在险峰。"还有北宋大文豪欧阳修《醉翁亭记》中的千古绝唱："醉翁之意不在酒，在乎山水之间也。"

爬山时经常会遇到悬崖峭壁，驻足在悬崖绝壁边缘，兴奋、紧张、感叹，给人极大的感官刺激。在享受大自然给人带来的惊奇的同时，你也许出于好奇心，抑或为了展现一下聪明智慧，建议大家测算一下山崖的高度。

1.1.2 山崖测量

例 1.1 假设你站在崖顶，望下万丈深渊，到底有多深呢？大家都会容易想到一种测算方法，那就是在身旁捡一块大些的石头，扔下去听回声返回时间的长短来估算山崖的高度。

显然，首先我们要有计算时间的东西，除了专门的秒表外，平时人们身上带有其他的时间计量工具吗？有，手表、手机。手表可近似到秒，许多非智能手机都有秒表工具。但智能手机却大多没有内置，我们只需上网下载一款手机用秒表小软件即可，这样时间测量问题就解决了。为了后面讨论方便，假定人们用秒表或类似工具能比较准确地测定时间。

接下来，我们自然会想起在中学的物理课中学习过的自由落体运动，在真空环境下任何物体自由下落的重力加速度都是一样的，$g\approx 9.8\ \mathrm{m/s^2}$。假定空气阻力不计，可以直接利用自由落体运动的公式 $h=\frac{1}{2}gt^2$ 来计算高度。我们查阅相关资料，重力加速度主要与纬度和海拔高度有关，数据如下表 1-1。

表 1-1　地球上不同纬度和海拔下的重力加速度($\mathrm{m/s^2}$)

纬度(°)	海拔 (km)			纬度(°)	海拔 (km)		
	0	4	8		0	4	8
0	9.780	9.768	9.756	50	9.811	9.798	9.786
10	9.782	9.770	9.757	60	9.819	9.807	9.794
20	9.786	9.774	9.762	70	9.826	9.814	9.801
30	9.793	9.781	9.768	80	9.831	9.818	9.806
40	9.802	9.789	9.777	90	9.832	9.820	9.807

中国地处北半球，最北端在黑龙江省漠河乌苏里浅滩黑龙江主航道中心

线上(53.56°N),最南端在南海的南沙群岛中的立地暗沙(3.85°N)。北京、上海、广州三大城市市中心纬度分别是39.92°N、34.50°N、23.17°N,海拔高度分别只有31.2、4.5、6.6 m,重力加速度分别是9.80151、9.79460、9.78833 m/s^2。海拔千米以上的省会城市有拉萨(3658 m)、西宁(2261.2 m)、昆明(1891.4 m)、银川(1111.5 m)、贵阳(1071.2 m)、呼和浩特(1063 m)。著名的五岳泰山、华山、衡山、恒山、嵩山主峰海拔分别为1532.7、2154.9、1300.2、2016.1、1491.7 m。除青藏高原外,我国一般山峰海拔多数在一两千米左右,它们的重力加速度约9.78～9.81 m/s^2。因此,我们不妨就用9.8 m/s^2 作为我国多数地区的重力加速度的数值。

假如在山顶放下1块石头让它自由落体,设 $t=4$ s后听到回声,则可求得 $h\approx\frac{1}{2}\times9.8\times4^2=78.4(\mathrm{m})$,即脚下悬崖大概有78.5 m深。如果你是名中学生,能得到这样的结果应该说不错了。也许你会想到应该考虑空气阻力的影响,但不知道怎么算。如果你是名大学生,学过微积分,就能做了。当然,如果你是中学生或者是没学过微积分的人,到此为止不想继续探究。那么我们先来看下面通过相对比较精确的微积分计算得出的结果:62.8 m。78.4与62.8相差15.6,感觉差别有点大,这说明微积分有用,这也从一个侧面告诉大家为什么现在要求绝大多数专业(除艺术、语言之类的少数专业)高校学生一定要学一点高等数学。

现在继续讨论,考虑到除去地球吸引力外,对石块下落影响最大的当属空气阻力。根据流体力学知识,此时可设空气阻力正比于石块下落的速度,阻力系数 K 为常数。牛顿运动学第二定律说,力是产生加速度的原因,物体的加速度跟物体所受的合外力 F 成正比,跟物体的质量成反比,加速度的方向跟合外力的方向相同。因此可得:

$$F=ma=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg-Kv,\text{且 } v(0)=0。$$

这是一个速度 v 关于时间 t 的一阶线性微分方程。令 $k=K/m$,方程简化成

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=g-kv,\text{且 } v(0)=0。$$

这是变量可分离微分方程,解得:

$$v=gk^{-1}-gk^{-1}\mathrm{e}^{-kt}。$$

由于速度是距离高度的变化率,即距离高度对时间的导数,对上式等号右边求一次积分得山崖高度的计算公式:

$$h=gk^{-1}(t+k^{-1}\mathrm{e}^{-kt})-gk^{-2}。$$

在互联网上的百度网页中输入“空气阻力系数”一词,会得到相关的风阻系数

资料。垂直平面体风阻系数大约 1.0，球体风阻系数大约 0.5，一般轿车风阻系数 0.28～0.4，好些的跑车在 0.25 左右，赛车可以达到 0.15，飞禽在 0.1～0.2，飞机达到 0.08，目前雨滴的风阻系数最小在 0.05 左右。我们就取 $k=0.05$，$t=4$ s，则可求得 $h\approx 73.4$ m，即脚下悬崖大概有 73.4 m 深。这个结果自然比不考虑空气阻力更接近实际山崖高度。

这里需要说明的是，考虑空气阻力时不必考虑更一般的情形，那么后者的高度计算公式应该包含在前者中，即 $k=0$ 时前者就变成后者。事实上，利用微积分中的泰勒展开式可以验证得：

$$\lim_{k\to 0} gk^{-1}(t+k^{-1}e^{-kt})-gk^{-2}=\frac{1}{2}gt^2。$$

细心的读者可能进一步想到，听到回声再按跑表，计算得到的时间中包含的反应时间应该扣除掉；还有石块落地产生的声音从崖底传到崖顶需要的时间，这个时间也应该扣除。

反应时间是指人从机器或外界获得信息、经过大脑加工分析发出指令到运动器官开始执行动作所需的时间，包括从感觉反应时间（从信息开始刺激到感觉器官有感觉所用时间）到开始动作所用时间（信息加工、决策、发令开始执行所用时间）的总和。由于人的生理、心理因素的限制，人对刺激的反应速度是有限的。一般条件下，人的反应时间约为 0.1～0.5 s，平均 0.2 s；专业运动员通常小于 0.2 s。人的最短反应时间是 0.1 s，因此国际田联规定，反应时间低于 0.1 s 算抢跑，会将运动员罚下场，因为这是压枪。对于复杂现象的选择，人的反应时间达 1～3 s，要进行复杂判断和认识的反应时间平均则达 3～5 s。

由于听到回声再按跑表，是预先设定的事件，反应时间取下限为 0.1 s，假如仍设 $t=4$ s，扣除反应时间后应为 3.9 s，代入求得山崖高度 $h\approx 69.9$ m。

我们都知道声音在空气中传播速度是 340 m/s，当考虑声音传播时间时，令石块下落的真正时间为 t_1，声音传回来的时间记为 t_2，原山崖高度的计算公式修改为：

$$\begin{cases} h=gk^{-1}(t_1+k^{-1}e^{-kt_1})-gk^{-2}, \\ h=340t_2, \\ t_1+t_2=3.9。\end{cases}$$

这是一个非线性方程组，不太容易求得精确解，可用近似计算。

考虑到相对于石块速度，声音速度要快得多，而真实高度与前面计算结果 $h\approx 69.9$ m 的相对误差应该不会太大，完全可用刚才求得的 h 来估算声音传播的时间 $t_2=h/340$，再求石块下落时间 $t_1\approx 3.9-t_2$，然后将 t_1 代入，算出崖高。例如，若 $h=69.9$ m，则 $t_2\approx 69.9/340=0.21$ s，故 $t_1\approx 3.9-t_2=3.69$

s,将 t_1 代入,算出崖高 $h \approx 62.8$ m。

能够想象,62.8 m 虽然不一定就是真实山崖高度,但真实高度与其应该相差无几。当然可以进一步考虑山崖所在的海拔高度,因为不同的海拔高度的加速度是有非常细微区别的;考虑每个人的反应时间,有人反应迅速,有人反应迟钝;考虑山崖处的空气密度,空气密度越大对运动物体的阻力也就越大,风速系数变大,声音传播变慢。但这些影响造成的数值误差显然都不大,而所花的时间却不少,相对于我们仅仅估计山崖的大概高度来说已无此必要。这些进一步的讨论见本章思考题。

山崖测量问题浅显易懂,开始时只需要高中生普通物理运动学知识就能作出初步解答;但要想得到尽可能精确的答案,则要考虑更多影响因素,运用的数学工具也在原来初等数学的基础上增加了一些简单微积分方法。假如你刚才耐心地阅读这一小节,就初步认识了所谓定量地解决实际问题的过程。如果将这一过程进一步抽象,就是所谓的数学建模,其中的主要数学公式就叫数学模型。

1.2 数学模型和数学建模

1.2.1 什么是数学模型和数学建模

数学模型(Mathematical Model)是近年发展起来的新学科,是数学理论与实际问题相结合的一门科学。现在数学模型还没有一个统一的、准确的定义,因为站在不同的角度可以有不同的定义。但基本的内涵是这样的,数学模型是关于部分现实世界和为一种特殊目的而做的一个抽象的、简化的结构。具体来说,数学模型就是为了某种目的,用字母、数学符号建立起来的等式或不等式以及图表、图像、框图、程序等描述客观事物的特征及其内在联系的数学结构表达式,是对实际课题本质属性的抽象而又简洁的刻画。它或能解释某些客观现象,或能预测未来的发展规律,或能为控制某一现象的发展提供某种意义下的最优策略或较好策略。数学建模(Mathematical Modeling)是应用知识从实际课题中抽象、提炼出数学模型的过程。

根据对研究对象观察到的现象及实践经验,它将现实问题归结为相应的数学问题,并在此基础上利用数学的概念、方法和理论进行深入的分析和研究,从而从定性或定量(尤其是定量)的角度来刻画实际问题,并为解决现实问题提供精确的数据或可靠的指导。

数学模型的历史可以追溯到人类开始使用数字的时代,随着人类使用数字,就开始不断地建立各种数学模型,以解决各种各样的实际问题。对大学

生的综合素质测评、对教师工作业绩的评定以及诸如访友、采购等日常活动，都可以建立一个数学模型，确定一个最佳方案。建立数学模型是联系实际问题与数学工具的一座必不可少的桥梁。

1.2.2 建立数学模型的要求

(1)真实完整

真实的、系统的、完整的、形象的客观现象；必须具有代表性；具有外推性，即能得到原型客体的信息，在模型的研究实验中，能得到关于原型客体的原因；必须反映完成基本任务所达到的各种业绩，而且要与实际情况相符合。

(2)简明实用

在建模过程中，要把本质的东西及其关系反映进去，把非本质的、对反映客观真实程度影响不大的东西去掉，使模型在保证一定精确度的条件下，尽可能简单和可操作，数据易于采集。

(3)适应变化

随着有关条件的变化和人们认识的发展，通过相关变量及参数的调整，能很好地适应新情况。

根据研究目的，对所研究的过程和现象(称为现实原型或原型)的主要特征、主要关系采用形式化的数学语言，概括地、近似地表达出来的一种结构。所谓“数学化”，指的就是构造数学模型。通过研究事物的数学模型来认识事物的方法，称为数学模型方法。

1.2.3 数学模型的基本原则

(1)简化原则

现实世界的原型都是具有多因素、多变量、多层次的比较复杂的系统，对原型进行一定的简化即抓住主要矛盾，数学模型应比原型简化，数学模型自身也应是“最简单”的。

(2)可推导原则

由数学模型的研究可以推导出一些确定的结果，如果建立的数学模型在数学上是不可推导的，得不到确定的、可以应用于原型的结果，这个数学模型就是无意义的。

(3)反映性原则

数学模型实际上是人对现实世界的一种反映形式，因此数学模型和现实世界的原型就应有一定的“相似性”，抓住与原型相似的数学表达式或数学理论就是建立数学模型的关键性技巧。

1.3 数学模型分类和数学建模过程

数学模型是数学抽象和概括后的产物,其原型可以是具体对象及其性质、关系,也可以是数学对象及其性质、关系。数学模型有广义和狭义两种解释。广义地说,数学概念如数、集合、向量、方程都可称为数学模型;狭义地说,只有反映特定问题和特定具体事物系统的数学关系结构方可称为数学模型。

1.3.1 数学模型分类

数学模型的种类很多,而且有多种不同的分类方法。

(1)确定性模型和随机模型

描述客体必然现象的模型叫做确定性模型,其数学工具一般是代数方程、微分方程、积分方程和差分方程等。描述客体或然现象的称为随机性模型,随机性模型中变量之间的关系是以统计值或概率分布的形式给出的。在体育实践中常常提到优秀运动员身体体型的数学模型:现代的世界级短跑运动健将模型为身高一米八几、体重 80 公斤左右、100 米成绩 10 秒左右或更好等,但北京和伦敦奥运会冠军牙买加的博尔特则是另类,他身高达 1.96 米。

(2)静态模型和动态模型

静态模型是指要描述的系统各量之间的关系是不随时间的变化而变化的,一般都用代数方程来表达。动态模型是指描述系统各量之间随时间变化而变化的规律的数学表达式,一般用微分方程或差分方程来表示。经典控制理论中常用的系统的传递函数也是动态模型,因为它是从描述系统的微分方程变换而来的。

(3)连续时间模型和离散时间模型

模型中的时间变量是在一定区间内变化的模型称为连续时间模型,各类用微分方程描述的模型都是连续时间模型。在处理集中参数模型时,也可以将时间变量离散化,所获得的模型称为离散时间模型。离散时间模型是用差分方程描述的。

(4)参数模型与非参数模型

用代数方程、微分方程、微分方程组以及传递函数等描述的模型都是参数模型。建立参数模型就在于确定已知模型结构中的各个参数。通过理论分析总是得出参数模型。非参数模型是直接或间接地从实际系统的实验分析中得到的响应,例如通过实验记录到的系统脉冲响应或阶跃响应就是非参

数模型。运用各种系统辨识的方法，可由非参数模型得到参数模型。如果实验前可以决定系统的结构，则通过实验辨识可以直接得到参数模型。

(5)线性模型和非线性模型

线性模型中各量之间的关系是线性的，可以应用叠加原理，即几个不同的输入量同时作用于系统的响应，等于几个输入量单独作用的响应之和。线性模型简单，应用广泛。非线性模型中各量之间的关系不是线性的，不满足叠加原理。在允许的情况下，非线性模型往往可以线性化为线性模型，方法是把非线性模型在工作点邻域内展成泰勒级数，保留一阶项，略去高阶项，即可得到近似的线性模型。

(6)白箱模型、灰箱模型和黑箱模型

根据对某个实际问题了解的深入程度，分为白箱模型、灰箱模型和黑箱模型。白箱模型是指所有过程都建立在因果关系基础上的模型。灰箱模型或概念模型是指那些内部规律尚不十分清楚、在建立和改善模型方面都还不同程度地有许多工作要做的问题。黑箱模型(或称经验模型)是指其内部规律还很少为人们所知的现象。

还可根据建模中所用的数学方法，分为初等模型、微分方程模型、差分方程模型、优化模型等。根据研究课题的实际范畴，分为人口模型、生态系统模型、交通流模型、经济模型、基因模型等。

1.3.2 数学建模过程

建立数学模型需要哪些步骤并没有固定的模式，下面只是按照一般情况，提出一个建立模型的大体过程。

(1)模型的准备

要了解问题的实际背景，明确建立模型的目的，掌握对象的各种信息如统计数据等，弄清实际对象的特征。总之，就是要做好建立模型的准备工作。这一步往往要查阅大量资料，请教专家，以便对问题有透彻的了解。

(2)模型的假设

根据实际对象的特性和建模的目的，对问题进行必要的简化，并且用精确的语言作出假设，是建立模型的第二步，也可以说是关键的一步。有时，假设做得过于详细，试图把复杂的实际现象的各个因素都考虑进去，可能使你很难继续下一步的工作，所以要善于辨别问题的主要和次要方面，抓住主要因素，抛弃次要因素，尽量使问题均匀化、线性化。

(3) 建立模型

根据所做的假设，利用适当的数学工具，建立多个量之间的等式或不等

式关系，列出表格，画出图形，或确定其他数学结构，是建立数学模型的第三步。为了完成这项数学建模的主体工作，人们常常需要具有比较广阔的数学知识，除了微积分、微分方程、线性代数及概率统计等基础知识外，还会用到诸如规划论、排队论、图论、网络及对策论等。推而广之，可以说任何一个数学分支都可能应用于建模过程中。当然，这并不是要求我们对数学的各个分支都精通。事实上，建模时还有一个原则，即尽可能采用简单的数学工具，以便使更多的人能够了解和使用。

(4)模型的求解

对以上建立的模型进行数学上的求解，包括解方程、画图形、证明定理以及逻辑运算等，不仅会用到传统的和近代的数学方法，而且会用到计算机相关的知识。

(5)模型的分析

对上面求得的模型结果进行数学上的分析。有时是根据问题的性质，分析各变量之间的关系和特定性态；有时是根据所得的结果给出数学上的预测；有时则是给出数学上的最优决策或控制。

(6)模型的检验

这一步是把模型分析的结果“翻译”回到实际对象中，如果检验的结果不符合或部分符合实际情况，那么我们必须回到建模之初，修改、补充假设，重新建模，即再按上述步骤操作直到模型检验这一步；如果检验结果与实际情况相符，则进行最后的工作——模型的应用。

整个模型的建立过程可用图 1-1 表示：

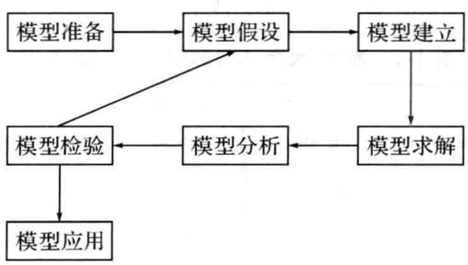

图 1-1　数学建模过程框图

我们看到，数学建模实际上是经过若干次循环而逐渐接近真理的过程。应该指出的是，并非所有的建模过程都要经过上述这些步骤，有时各个步骤之间的界限也并不是那么明显。因此，在建模过程中不要局限于形式上的按部就班，重要的是根据对象的特点和建模的目的，去粗取精、去伪存真，不断完善。