GAO ZHONG SHU XUE JIE
TI JI QIAO YAN JIU

高中数学解题技巧研究

郭拴贵　编著

世界图书出版公司

高中数学解题技巧研究

郭拴贵　　编著

世界图书出版公司
北京·广州·上海·西安

(陕)新登字 014 号

高中数学解题技巧研究

郭拴贵　编著

责任编辑　李　丹

世界图书出版西安公司出版发行
(西安市西木头市 34 号　邮编 710002)
各地新华书店经销
西安武警技术学院印刷厂印刷
开本:787×1092　1/16　印张 26.75　字数:732 千字
1996 年 8 月第 1 版　　1996 年 8 月第 1 次印刷
印数:0001—5000 册
ISBN　7—5062—2038—5/G · 17
Wx6/10　　定价:33.00 元

序

这本《高中数学解题技巧研究》，在高中数学资料中，是一本精彩的优秀著作。对高中数学的研究、教学、复习、进修等都有较强的指导性和较高的学术价值。

本书在解题技巧上功夫较深，许多地方有独到的洞见。观点高、方法特、思路捷，是本书的主要特色。作者用居高临下的数学修养，不仅在方法技巧上进行了深入的研究，而且更重要的是在解题技巧的引导与出台上，亦即在思维的心智活动上，作了精辟而通俗的分析。尤如木偶，不光幕前是活灵活现，而且更重要的是指出了幕后的挑线法与操作要领。这样作，不仅把方法送给了读者，而且把取得方法的钥匙也奉献出来了。

书中许多评注，写得十分深刻，在方法与思路上也给了较广的概括。使读者得到了一个完满的整体概念。虽然书中有许多评注是针对一个例题评注，但读者从中却受到了普遍性的启发。

因此，本书对高三学生、数学竞赛参加者、中学数学教师，高等师范院校学生，都是一本值得阅读的好书。

陕西师范大学《中学数学教学参考》主编　兰纪正

1995 年夏

前　言

初等数学是支撑整个数学大厦的柱石。其解题方法与技巧，充满了各个数学分支和以数学为工具的各种科学领域。因此，下功夫打好这个基础，对今后的科学事业，确是“毕生受益”之举。

本书面向高中学生和中学数学教师，特别是要参加高考的高三学生和正在指导他们的教师。也可供参加数学竞赛者参考。

高考的角逐，人才的竞争，使中学数学资料空前繁荣（有人称“题海”），但由于中学数学理论的稳定，所以每种资料，都是在灵活使用知识与解题技巧上做文章。因此，要学好高中数学，要对付高考与各种资料，就必须坐下来深思解题技巧这个实质问题。这其实是一种捷径。

解题方法科学，必然带来解题过程轻松，答案准确。从而节约试场时间，有效解决“量大算不完”的矛盾。

本书目的正是：以解题技巧为核心，设置一个较全面且有秩序的训练系统，使它不仅能覆盖高中数学的知识体系，而且能使读者通过它广见种种数学模型和解题技巧。从灵活性、智能性方面开阔视野，开拓思维，受到启发。并通过训练，养成一种合理的思维模式，训练出一个灵活的会分析的头脑。从而达到处理高考数学试题和多数数学资料中的试题、以及解答许多数学竞赛题的水平。

本书结构：以高中数学教材为纲，以研究解题方法技巧为出发点，对 187 个范例进行了祥细的分析讲评，并按知识和方法划分为：函数、不等式、方程、数列、复数、排列组合与二项式定理、解析几何、立体几何等八章，各章又据方法类属分为若干节。每章都配有习题，目的是让读者检验自己是否掌握了本章的知识与解题技巧。书后附有习题解答。全书例题 187 个，习题 125 个。这些题从方法技巧上说都具有典型的代表性和训练价值。

本书例题解法包含分析、讲解、评注。力争做到：观点鲜明，方法简洁，分析透彻。并善于使用图形、表格和程序框架，努力使解法实质突出，直观易

懂。为展示方法，加强比较，丰富直觉，培养选择，对许多题，给出了多种可供选取的解法。

本书对解题过程的陈述，选用了“启发讲授式”。这不仅是为了自修者易懂，更主要的是我们的目的在于如何寻求问题的答案和怎样产生解决问题的技巧。通过对解题过程各环节的探索与科学的陈述，使我们学会分析问题把握问题实质的能力。起到“由此及彼、举一反三”的效应。故着笔立意，不是就题解题，而是培养读者“会想”，因此，常有启发读者应如何观察、如何联想、如何选择的文句，还有交待心理活动的文句。这样做，仿佛有许多话作为答卷或课堂板书是“废话”。但从培训的角度看，它比写在卷面上的更重要，因为它实际上是起存在作用的幕后。正如把花朵挂在胸前时要宰去它的根，但它之所以红得像燃烧的火，其根源还是那并不挂在胸前的根。何况，这样陈述，便于解惑。对教师讲授，亦不无参考。

本书基本上每例解完后都有评注，交待关键与技能所在。读者不难据此而改编出另外的数学问题，这些题当然自己一定会解（但别人不见得会）。评注还建议读者应注意什么，加强什么。并指出知识基础及作为课堂范例时的讲授重点与难点等。

关于使用本书的几点说明如下：

- 本书各章相对独立，对高三同学可各取所需。选读或全读，均可。当然，每题最好先自己试解。然后再读，收获才大。
- 前三章相对而言，是本书的基础，速度应适当放慢。
- 对高一、高二同学，若学有余力且具备了相应的基础知识，可根据自己情况选读。教师亦可参考评注在复习或适当时期选讲部分例题，以便早日开拓。

本书在出版过程中，得到兰纪正老师等的帮助，在此表示感谢。不妥错误之处，欢迎读者批评指导。

郭拴贵

1995 年夏天

于西安培华女子大学

目　录

第一章　函　　数

函数，是量的制约关系的数学理论。在种种数学过程中，无不充满制约关系。因此，函数在解决数学问题的过程中，扮演重要工具的角色。应用十分广泛。

掌握好函数工具，对学好数学，具有重要的意义。

本章，分为五节对三十二个函数方面的例题，给出了分析、讲解、评注。内容基本上覆盖了高中数学中函数方面的知识，也基本上覆盖了处理函数方面问题的基本观点和方法。

本章涉及的基本观点和方法有

- 基本函数法
- 值域法
- 图象法
- 单调性法
- 判别式法
- 直线斜率法
- 构造函数法

其中基本函数法，是一个重要的基本方法。

所谓"基本函数"，这里是指教材中讲授的那些函数。它们是一次、二次、反比例、幂、指、对、三角、反三角函数等，以及：

- $y = A\sin(\omega x + \varphi)$
- $y = a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \varphi), (a^2 + b^2 \neq 0)$
- $y = (ax + b) + \dfrac{d}{x + c}(d \neq 0)$（见[例 174]）
- 由二次曲线确定的函数（如 $y = \sqrt{x^2 - 1}, y = x + 2\sqrt{1 - x^2}$，…等等，见[例 178]～[例 181]）

所谓"基本函数法"，就是把要研究的问题，通过分析、分解、复合、换元等技术处理，转化为步步是基本函数的序列过程。从而使问题得到解决。由于基本函数在任意区间上的性质、图象，我们已经了如指掌，故这种方法，只要转化技术过关，是十分有效的方法。

以上所言，还望读者在解题中亲自体验。

本章分下列五节进行讲授

- 基本函数法（一）——单调性方法
- 基本函数法（二）——值域方法
- 图象及图象法应用
- 函数性质的应用与研究
- 函数方法应用

本章是高中数学的重要基石，望读者重视。可适当放慢速度。

第一节　基本函数法（一）——单调性方法

学会查明函数的单调性，是进一步学会解决许多其他问题的基础。如值域、最值、不

等式、方程问题等。

所谓单调性方法，就是通过单调性讨论而使问题得到解决的方法。

基本函数法概念，在本章前言里谈过。它对讨论函数单调性来说，也是一种基本方法。

一般地说，用该方法来解决问题的过程可分为两个阶段，第一阶段是把“问题的解决”转化为“只要某个函数 $f(x)$ 的单调性得到解决”；第二阶段是把“ $f(x)$ 的单调性”转化为“基本函数的单调性”。许多问题（如本身就是单调性问题），仅有后一阶段。

以上是思想观点，观点既明，重点就在转化的技巧。

【例 1】〈Ⅰ〉设 $a>0, b>1$，试比较

$$\lg^2(a+b) \text{ 与 } (\lg b)\cdot(\lg(2a+b)) \text{ 的大小；}$$

〈Ⅱ〉设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1>0, a_{n+1}=1+\dfrac{2}{a_n}, (n=1,2,\cdots)$，试讨论 $\{a_n\}$ 的单调情况；

〈Ⅲ〉设 $\left|x-\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)\right|<\dfrac{\pi}{2}, (k\in Z)$，证明：

$$\operatorname{arc\,tg}(\cos x)+\operatorname{arc\,ctg}(\sin x)>\frac{\pi}{2};$$

〈Ⅳ〉解方程 $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=2^x.$

【解〈Ⅰ〉】先分析如下。由 $a>0, b>1$，可知：所出现的对数值皆为正数，故

$$\lg^2(a+b) \gtreqless (\lg b)\left(\lg(2a+b)\right) \Longleftrightarrow \frac{\lg(b+a)}{\lg b} \gtreqless \frac{\lg(b+2a)}{\lg(b+a)} \qquad ①$$

观察①式两端，不难发现，把左端的 b 换成 $b+a$ 即为右端，即①的两端具有同一形态：$\lg(x+a)/\lg x, (x>1)$，于是引进函数

$$f(x)=\frac{\lg(x+a)}{\lg x} \quad (x>1) \qquad ②$$

则①的左、右两端分别为 $f(b)$ 与 $f(b+a)$，化为比较 $f(b)$ 与 $f(b+a)$ 的大小。于是只要查明 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上的单调性，则二数之大小立明。

以下，研究 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上之单调性。因为

$$f(x)=\frac{\lg(x+a)}{\lg x}=\frac{\lg\left[x\left(1+\frac{a}{x}\right)\right]}{\lg x}=\frac{\lg x+\lg\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\lg x}$$

$$=1+\lg\left(1+\frac{a}{x}\right)\cdot\frac{1}{\lg x} \quad (x>1) \qquad ③$$

而函数 $\lg\left(1+\dfrac{a}{x}\right)(a>0)$ 与函数 $\dfrac{1}{\lg x}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上递减。故 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递减，于是 $f(b)>f(b+a)$ 即 $\lg^2(a+b)>(\lg b)(\lg(2a+b))$。

（〈Ⅰ〉解完，其它方法见评注）

【解〈Ⅱ〉】观察 a_n 与 a_{n+1} 的递推关系 $a_{n+1}=1+\dfrac{2}{a_n}$，引进函数

$$f(x)=1+\frac{2}{x} \quad (x>0) \qquad ①$$

于是 $a_{n+1}=f(a_n)$，因此 $\{a_n\}$ 的性质与 $f(x)$ 的性质息息相关。

先看 $f(x)$ 的不动点，即使 x（输入值）等于 $f(x)$（输出值）的 x 值，亦即方程

$$f(x)=x \qquad (x>0) \qquad ②$$

的实根，解②得

$$x=2 \qquad ③$$

于是 $f(2)=2$，那么

(1) $a_1=2$ 时，$a_2=f(2)=2, a_3=f(2), \cdots$，即 $\{a_n\}$ 是常数列 $a_1=a_2=\cdots=2$。

(2) $0<a_1<2$ 时，因 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 是减函数，且因 $f(2)=2$，故由 $a_1<2$ 得(把算符 f 作用于 $a_1<2$ 的两边)：$f(a_1)>f(2) \Longleftrightarrow a_2>2$，如此相继递推得

$$
\begin{array}{llll}
 & 0<a_1<2 & \Longrightarrow & a_2>2 \\
\Longrightarrow & 0<a_3<2 & \Longrightarrow & a_4>2 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

所以

$$0<a_{2k-1}<2,\ (k=1,\cdots) \qquad a_{2k}>2,\ (k=1,\cdots) \qquad ④$$

即奇数项小于 2，偶数项大于 2。任何偶数项大于所有的奇数项。据此，应进一步追索奇数项与偶数项的单调性。即 $\{a_{2n}\}$ 及 $\{a_{2n-1}\}$ 的单调性：

先看初始两项 a_1 与 a_3 的大小，因 $a_1\in(0,2)$，故有

$$a_3-a_1=1+\frac{2}{a_2}-a_1=1+\frac{2}{1+\frac{2}{a_1}}-a_1$$

$$=-\frac{a_1^2-a_1-2}{a_1+2}=-\frac{(a_1-2)(a_1+1)}{a_1+2}>0$$

故

$$a_3>a_1 \qquad ⑤$$

于是用 f 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，相继递推(如同导出 ④ 式一样)得

$$
\begin{array}{llll}
 & a_3>a_1 & \Longrightarrow & a_4<a_2 \\
\Longrightarrow & a_5>a_3 & \Longrightarrow & a_6<a_4 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

所以

$$a_{2k+1}>a_{2k-1} \quad (k=1,\cdots) \qquad a_{2k+2}<a_{2k} \quad (k=1,\cdots) \qquad ⑥$$

故得结论：$a_1\in(0,2)$ 时，奇数项递增，偶数项递减。

总结：$0<a_1<2$ 时，$\{a_n\}$ 单调情况是

$$a_1<a_3<a_5<\cdots<2<\cdots<a_6<a_4<a_2 \qquad ⑦$$

如下面的图 (1) 所示。

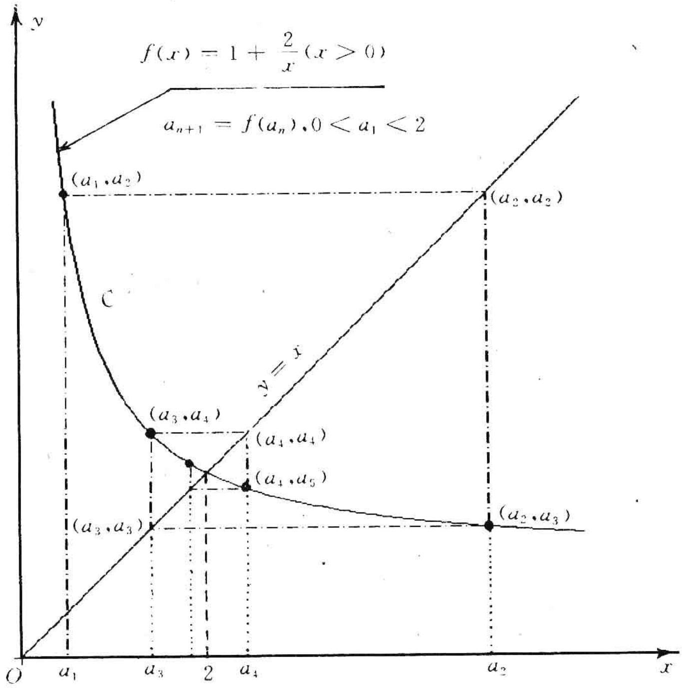


图 (1)

(3) $a_1 > 2$ 时，仿 (2) 可得

$$a_2 < a_4 < a_6 < \cdots < 2 < \cdots < a_5 < a_3 < a_1 \quad ⑧$$

(请读者补充过程并给出图形)

〈Ⅱ〉之答案为 $a_1 = 2$ 时, $a_1 = a_2 = \cdots = 2$

$a_1 \in (0,2)$ 时, $a_1 < a_3 < \cdots < 2 < \cdots < a_4 < a_2$

$a_1 > 2$ 时, $a_2 < a_4 < \cdots < 2 < \cdots < a_3 < a_1$

【证〈Ⅲ〉】

$$\left|\alpha - \left(2k\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right| < \frac{\pi}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \left(2k\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{2} < \alpha < \left(2k\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \alpha \in \left(2k\pi - \frac{3\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{4}\right), (k \in Z) \quad ①$$

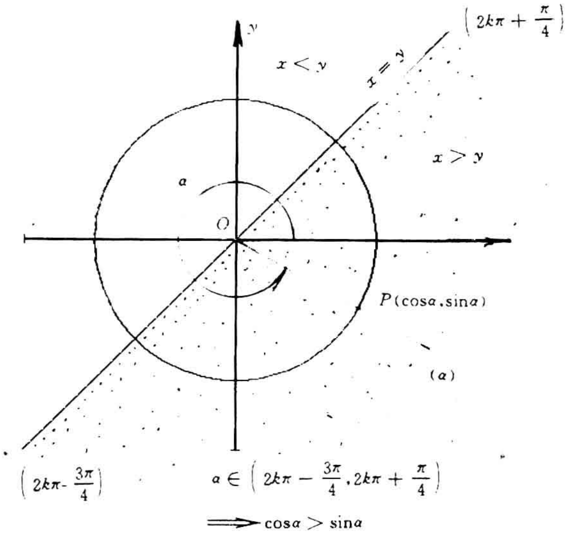


图 (2)

由此知 α 的终边落在单位园中位于直线 $y = x$ 下侧的区域内(如图(2) 中的阴影区域所示)。因直线 $l: y = x$ 下侧的任意点 (x,y) 满足 $x > y$，故 α 的终边与单位园的交点 $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$ 满足

$$\cos\alpha > \sin\alpha \quad ②$$

现在把算符 arc tg 作用于 ② 的两边，因函数 arc tg$x$ 在 R 上是增函数，故由②得

$$\operatorname{arc\,tg}(\cos x) > \operatorname{arc\,tg}(\sin x) \quad ③$$

再用恒等式 $\operatorname{arc\,tg}x + \operatorname{arc\,ctg}x = \frac{\pi}{2}, (x \in R)$ 即得

$$\operatorname{arc\,tg}(\cos x) > \operatorname{arc\,tg}(\sin x)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,ctg}(\sin x)$$

$$\Longleftrightarrow \operatorname{arc\,tg}(\cos x) + \operatorname{arcctg}(\sin x) > \frac{\pi}{2} \quad ④$$

(证完)

【解〈Ⅳ〉】 由于 $2^x \neq 0$，原方程两边同除以 2^x，得同解方程

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^x = 1 \quad ①$$

构造函数 $f(x)$ 为

$$f(x)=\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^x+\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^x \quad ②$$

则因 $\sqrt{2+\sqrt{3}}/2\in(0,1)$，$\sqrt{2-\sqrt{3}}/2\in(0,1)$，于是函数 $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^x$ 及 $\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^x$ 在$(-\infty,\infty)$上都是减函数，故 $f(x)$ 在$(-\infty,\infty)$上是减函数，故得方程①（亦即 $f(x)=1$）在$(-\infty,\infty)$上有根时，根是唯一的。由原方程不难观察出：$x=2$ 是一个根，即 $f(2)=1$，故原方程只有一个实根是 $x=2$。

【评注】

(a) 本例各题，从知识内容或结论的形式来说，属于不同领域，但从方法来说，都是函数单调性方法应用方面的问题。〈Ⅰ〉化为 $f(x)=\lg\left(1+\frac{a}{x}\right)(a>0,x>1)$ 与 $g(x)=\frac{1}{\lg x}(x>1)$ 的单调性；〈Ⅱ〉转化为 $f(x)=1+\frac{2}{x}(x>0)$ 的单调性；〈Ⅲ〉转化为 $f(x)=\mathrm{arc\ tg}x$ 的单调性；〈Ⅳ〉转化为 $f(x)=a^x+b^x\left(a,b\in(0,1)\right)$ 的单调性。解题的重点与技巧，在于如何把问题转化为上述函数的单调性。

(b) 本例所用到的基本函数有

1) $y=\frac{k}{x}$，　2) $y=kx+b$，　3) $y=\log_a x$，　4) $y=a^x$，　5) $y=\mathrm{arc\ tg}x$。

本例各题所遇到的函数的单调性，都可以通过上述基本函数的单调性得到解决。如〈Ⅰ〉中遇到的 $y=\lg\left(1+\frac{a}{x}\right)$ 化为基本函数序列是：

$$t=\frac{a}{x}\longrightarrow u=1+t\longrightarrow y=\lg u$$

由于基本函数是我们最熟悉的函数，故由 x 的单调性得 t 的单调性；由 t 的单调性得 u 的单调性；由 u 的单调性得 y 的单调性。

因此，把一个非基本函数分解为基本函数的序列（或称为基本函数的复合），是十分重要的基本训练。它是“基本函数法”使用的基础。

(c)〈Ⅰ〉可叙述为“证明：$\lg^2(b+a)>(\lg b)\left(\lg(b+2a)\right)(b>1,a>0)$”，除上述证法外，还可用放缩法与均值不等式证明如下：

$$\begin{aligned}\lg(b+a)&=\frac{1}{2}\lg(b+a)^2=\frac{1}{2}\lg(b^2+2ab+a^2)\\&>\frac{1}{2}\lg(b^2+2ab)=\frac{1}{2}\lg[b(b+2a)]\\&=[\lg b+\lg(b+2a)]/2\\&>\sqrt{(\lg b)[\lg(b+2a)]}(a>0,b>1)\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow\quad \lg^2(b+a)>(\lg b)\left(\lg(b+2a)\right)$$

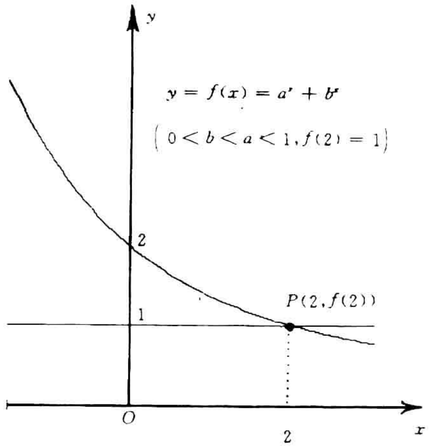
(d) 本例的〈Ⅳ〉属于方程问题，其解法较特殊。它先把原方程化为同解方程 $f(x)=1$；然后由 $f(x)$ 在 R 上的严格单调来说明“根存在时，是唯一的”。而根 $x=2$ 是易观察出的。故根确实存在。从而得解。见图（3）。

(e) 本例考查学生通过分析变形引入函数来解决问题的能力；并考查单调性方法的使用以及观察、联想的能力。

(f) 练习题：

● 讨论数列 $\{a_n\}$ 的单调性，其中 a_n 满足

$$a_1 > 0, a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$



图（3）

● 解方程组：求正数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，使它们满足

$$\begin{cases} 1 + \dfrac{1}{x_1} = x_2 \\ 1 + \dfrac{1}{x_2} = x_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 1 + \dfrac{1}{x_{n-1}} = x_n \\ 1 + \dfrac{1}{x_n} = x_1 \end{cases}$$

● 设 $0 < a < 1$，若 $x_1 = a, x_n = a^{x_{n-1}} (n = 2, 3, \cdots)$，则数列 $\{a_n\}$

（A）是递增的。　（B）是递减的。　（C）奇数项是递增的，偶数项是递减的。　（D）偶数项是递增的，奇数项是递减的。

（提示：参考图（1）的画法）（85. 中国竞赛题）

【例 2】 讨论函数 $f(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{5-x}$ 的单调性。

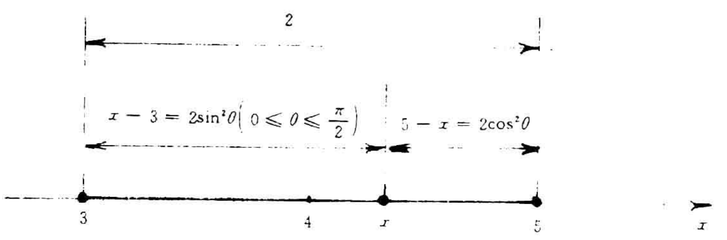
【方法概述】 通过换元，化为基本函数的单调性，换元是转化，是技巧。

［**解法一**］因为定义域为 $3 \leqslant x \leqslant 5$，且因

$$\begin{cases} (x-3) + (5-x) = 2 \\ x - 3 \geqslant 0 \\ 5 - x \geqslant 0 \end{cases}$$

故可设

$$\begin{cases} x - 3 = 2\sin^2\theta \\ 5 - x = 2\cos^2\theta \end{cases} \left(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right) \qquad ①$$



于是

$$\begin{aligned} y = f(x) &= \sqrt{x-3} + \sqrt{5-x} \\ &= \sqrt{2}\sin\theta + \sqrt{2}\cos\theta \\ &= \sqrt{2}(\sin\theta + \cos\theta) \\ &= 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right), \left(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)。 \end{aligned} \qquad ②$$

于是 $f(x)$ 随 x 变化的单调性，可通过中间参变量 θ 而得，如下表所示：

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$x = 3 + 2\sin^2\theta$	3	$\nearrow$	4	$\nearrow$	5
$\theta + \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{3\pi}{4}$
$y = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\sqrt{2}$

由上表中的第二、四两行可见：$3 \leqslant x \leqslant 4$ 时，$y = f(x)$ 上升；$4 \leqslant x \leqslant 5$ 时，$y = f(x)$ 下降。

［**解法二**］因 $3 \leqslant x \leqslant 5$ 时，$|x-4| \leqslant 1$，故可设

$$x - 4 = \sin\theta, \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right) \qquad ③$$

于是 $x - 3 = 1 + \sin\theta = \left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right)^2$，$5 - x = 1 - \sin\theta = \left(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\right)^2$，于是由 $\frac{\theta}{2} \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 得

$$\begin{aligned} y = f(x) &= \sqrt{x-3} + \sqrt{5-x} \\ &= \left|\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2})\right| + \left|\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2})\right| \\ &= \left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right) + \left(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\right) \\ &= 2\cos\frac{\theta}{2} \end{aligned} \qquad ④$$

$f(x)$ 的单调情况如下表：

θ	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$x = 4 + \sin\theta$	3	$\nearrow$	4	$\nearrow$	5
$\frac{\theta}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{4}$
$f(x) = 2\cos\frac{\theta}{2}$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\sqrt{2}$

由表中的第二、四两行可知：当 $3 \leqslant x \leqslant 4$ 时，$f(x)$ 单调增，当 $4 \leqslant x \leqslant 5$ 时，$f(x)$ 单调减。

［**解法三**］因 $f(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{5-x} \geqslant 0$，故 $f(x)$ 的单调性与 $(f(x))^2$ 的单调性相同，即 $f(x)$ 与 $\psi(x) = f^2(x)$ 同增同减。因

$$\psi(x) = f^2(x) = 2 + 2\sqrt{(x-3)(5-x)} \qquad ⑤$$

令

$$t=(x-3)(5-x),(x\in[3,5]) \quad ⑥$$

则得 $\psi(x)$ 的单调性如下表

x	3	4	5
$t=(x-3)(5-x)$	0 ↗	1 ↘	0
$\psi(x)=2+2\sqrt{t}$	2 ↗	4 ↘	2

由上表知 $\psi(x)$ 在[3,4]上递增，而在[4,5]上递减。因 $f(x)$ 与 $\psi(x)$ 同增同减，故得 $f(x)$ 的单调性是：

$x\in[3,4]$ 时，$f(x)$ 单调增，

$x\in[4,5]$ 时，$f(x)$ 单调减。

【评注】

(a) 本例从方法上来说，是训练"基本函数法"的例子。通过换元（见①式，③式，⑥式），而化为基本函数（见②式，④式，⑤式）。

方法一中的换元法（即①式），是由 $x+y=a(x\geqslant 0,y\geqslant 0,a>0)$ 联想 $a\sin^2\theta+a\cos^2\theta=a$ 而悟得。故可设 $x=a\sin^2\theta,y=a\cos^2\theta,\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$。

(b) 本题所用知识有

● 有关三角函数的公式。

● 基本三角函数的性质及图形，特别是单调性。

(c) 本题考查学生使用基本函数来解决问题的能力。并考查换元的技术。

(d) 练习：不必换元，讨论下列函数的单调性：

d_1) $y=\sqrt{x-3}+\sqrt{x-5}$

d_2) $y=\sqrt{3-x}+\sqrt{5-x}$

d_3) $y=\sqrt{x-3}-\sqrt{5-x}$

d_4) $y=\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}$

d_5) $y=\sqrt{5-x}-\sqrt{3-x}$

d_6) $y=\sqrt{3-x}-\sqrt{5-x}$

d_7) $y=\sqrt{x-3}-\sqrt{x-5}$

d_8) $y=\sqrt{x-5}-\sqrt{x-3}$

【提示】d_1) ～ d_4) 直接口答；d_5) 用有理化分子并用 d_2)；d_6) 用 d_5)；d_7) 用有理化分子并用 d_1)；d_8) 用 d_7)

【例 3】已知函数 $f(x)=x^2-3x+2,(x\in R)$，当 $x\in[t,t+1]$ 时，$f(x)$ 的最小值记为 $g(t)$。

〈Ⅰ〉画 $y=g(t)(t\in R)$ 的图象；

〈Ⅱ〉求 $g(\sin\theta)$ 的最大值与最小值以及所对应的 θ 值，这里 $\theta\in[0,2\pi]$。

【解】先求 $g(t)$ 的表达式，因为函数 $f(x)=x^2-3x+2$ 的对称轴是 $x=-\frac{-3}{2}=\frac{3}{2}$，最小值是 $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{4}$。$f(x)$ 在区间$[t,t+1]$上的最小值，由对称轴相对于该区间的位置："在该区间右、在该区间内、在该区间左"而定。故分三种情况：

(1) $t+1\leqslant\frac{3}{2}\Longleftrightarrow t\leqslant\frac{1}{2}$ 时，f 在$[t,t+1]$的单调性为

x	t	$t+1$	$\frac{3}{2}$
$f(x)$	$f(t) \searrow$	$f(t+1) \searrow$	$-\frac{1}{4}$

故 $f(x)$ 在 $[t,t+1]$ 上的最小值 $g(t)$ 为

$$g(t)=f(t+1)=(t+1)^2-3(t+1)+2=t^2-t.\left(t\leqslant\frac{1}{2}\right) \quad ①$$

(2) $t<\frac{3}{2}<t+1 \Longleftrightarrow \frac{1}{2}<t<\frac{3}{2}$ 时, f 在 $[t,t+1]$ 上的单调性为

x	t	$\frac{3}{2}$	$t+1$
$f(x)$	$f(t) \searrow$	$f\left(\frac{3}{2}\right)=-1/4 \nearrow$	$f(t+1)$

故 f 在 $[t,t+1]$ 上的最小值 $g(t)$ 为

$$g(t)=-\frac{1}{4},\left(\frac{1}{2}<t<\frac{3}{2}\right) \quad ②$$

(3) $t\geqslant\frac{3}{2}$ 时, f 在 $[t,t+1]$ 上的单调性为

x	$\frac{3}{2}$	t	$t+1$
$f(x)$	$-\frac{1}{4} \nearrow$	$f(t) \nearrow$	$f(t+1)$

故 f 在 $[t,t+1]$ 上的最小值 $g(t)$ 为

$$g(t)=f(t)=t^2-3t+2,\left(t\geqslant\frac{3}{2}\right) \quad ③$$

由①、②、③知 $g(t)(t\in R)$ 的表达式为

$$g(t)=\begin{cases} t^2-t & \left(t\leqslant\frac{1}{2}\right) \\ -\frac{1}{4} & \left(\frac{1}{2}<t<\frac{3}{2}\right) \\ t^2-3t+2 & \left(t\geqslant\frac{3}{2}\right) \end{cases} \quad ④$$

由此，得 $g(t)$ 的图象如下图。