

热工流体 数值计算

俞冀阳 编著

清华大学出版社

俞冀阳 编著

热工流体 数值计算

清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

本书主要叙述了热工水力分析中的数值计算方法,包括偏微分方程的数值求解、线性代数方程组的求解、流体动力学方程体系以及数值求解方法等内容。本书的重点是在介绍各种数值计算方法的基础上,对SIMPLE方法、多孔介质法、子通道分析方法等进行讨论,深入算法的核心,对各种数值计算方法进行研究。

本书可作为高等院校反应堆工程专业研究生的专业课教材,也可供相关专业的工程技术人员参考。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

热工流体数值计算/俞冀阳编著. —北京:清华大学出版社,2013.1

ISBN 978-7-302-30819-5

I. ①热… II. ①俞… III. ①反应堆—热工水力学—数值计算 IV. ①TL33

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第287911号

责任编辑:朱红莲 洪 英

封面设计:傅瑞学

责任校对:刘玉霞

责任印制:宋 林

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦A座 邮 编:100084

社总机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:北京嘉实印刷有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm 印 张:12.75

字 数:306千字

版 次:2013年1月第1版

印 次:2013年1月第1次印刷

印 数:1~3000

定 价:28.00元

产品编号:049706-01

前言

随着核能技术和计算机技术的发展,核反应堆工程领域内出现的热、质传递的数值计算方法也得到了迅速发展。如何高效可靠地预测流体的流动和传热行为,对于核能系统设计具有重要的意义。本书的目的是使读者全面系统地掌握热工流体数值计算的基本方法。本书给出了大量具体的程序源代码案例,解剖各种算法的核心和精髓,对于提高研究生的数值建模能力、编程分析能力及程序调试能力很有帮助。

本书首先介绍了数值计算和实验分析的差别,回答了为什么要学习数值计算的问题。然后在第2章介绍偏微分方程求解的一般性的方法——有限差分法。结合各种不同类型的偏微分方程,给出了几个具体的例题,引领读者进入数值计算的大门。第3章,主要讲述了由差分法得到的大型线性代数方程组的求解方法。在介绍一般性方法的基础上,引入了几种高效的算法,并提供源代码供读者测试各种算法的优劣。第4章,主要讲述了流体动力学的方程体系。重点讨论质量守恒、动量守恒和能量守恒得到的守恒方程的各种形式,这是流体传热和流动分析的基础。第5章介绍单相流动力学方程的求解方法,介绍SIMPLE算法和多孔介质方法,并利用方腔顶盖驱动流的案例,分析SIMPLE算法的性能。第6章和第7章主要介绍两相流的分析模型和数值计算方法。第8章介绍核反应堆热工流体分析中常用的子通道分析方法。本书的附录提供了一些分析方法的源程序代码和利用本书介绍的方法开发的THSWAN程序,并提供了一些算例供读者参考。

本书要求读者具有一定的反应堆热工流体、传热学、流体力学的基本知识。本书作为清华大学研究生课程的教材,通过本课程的学习,学生能够得到全方位的训练,包括对具体问题的数值建模能力,对FORTRAN语言、C语言、MATLAB语言的编程能力,对各种方法的发展和创新能力以及对核能系统的综合设计能力。

由于各种原因,书中难免还有片面、不足甚至错误之处,望读者和使用本教材的研究生提出各种宝贵意见。

编著者

2012年10月29日于清华园

目录

第 1 章	绪论	1
第 2 章	偏微分方程数值解法	4
2.1	典型的偏微分方程介绍	4
2.1.1	椭圆型方程	4
2.1.2	抛物型方程	4
2.1.3	双曲型方程	5
2.1.4	定解问题	5
2.2	差分法简介	6
2.3	椭圆型方程的差分解法	8
2.4	抛物型方程的差分解法	10
2.5	双曲型方程的差分解法	12
第 3 章	线性方程组求解	16
3.1	解线性方程组的直接法	16
3.1.1	高斯消元法	16
3.1.2	解三对角方程组的追赶法	19
3.2	解线性方程组的迭代法	21
3.2.1	雅可比迭代法	21
3.2.2	高斯-赛德尔(Gauss-Seidel)迭代法	22
3.2.3	超松弛法	22
3.2.4	SIP 方法	23
3.2.5	其他基于共轭梯度的迭代方法	26
3.2.6	迭代法的收敛条件	31
第 4 章	流体动力学方程体系	32
4.1	质量方程	33
4.2	动量方程	33
4.3	能量方程	36

4.4	微分方程的一般形式	40
第5章	单相流动力学方程数值求解	43
5.1	Lax-Wendroff 差分格式	43
5.2	MacCormack 差分格式	45
5.3	SIMPLE 方法	62
5.3.1	SIMPLE 方法的思路	63
5.3.2	SIMPLE 方法的步骤	66
5.4	用 SIMPLE 方法计算方腔顶盖驱动流	67
5.5	多孔介质法	68
5.6	多孔介质有限体积法离散方程	71
5.6.1	对流项	71
5.6.2	扩散项	76
5.6.3	瞬态项	77
5.6.4	源项	77
5.6.5	主控制体的方程	78
5.6.6	动量控制体的方程	80
5.6.7	压力方程	82
5.6.8	边界条件	84
第6章	两相流分析模型	85
6.1	描述两相流的物理量	85
6.2	滑移速度	88
6.3	SM 模型	89
6.4	SPM 模型	90
第7章	两相流基本方程的数值求解	91
7.1	一般形式的守恒方程数值求解	91
7.2	连续方程的差分格式	94
7.2.1	单相流和 SM 模型的两相流	94
7.2.2	基于 SPM 模型的两相流	95
7.3	动量方程的差分格式	95
7.3.1	单相流	95
7.3.2	基于 SM 模型的两相流	97
7.3.3	基于 SPM 模型的两相流	100
7.4	能量方程的差分格式	106
7.4.1	单相流	106
7.4.2	基于 SM 和 SPM 模型的两相流	108
7.5	描述压力分布的泊松方程	109

7.5.1 单相流	109
7.5.2 基于 SM 模型的两相流	110
7.5.3 基于 SPM 模型的两相流	110
7.6 压力方程中可压缩项的处理	111
7.6.1 单相流和基于 SM 模型的两相流	111
7.6.2 基于 SPM 模型的两相流	112
7.7 THSWAN 程序概况	112
第 8 章 堆芯的子通道分析方法	115
8.1 子通道控制体的划分方案	115
8.2 子通道间的交混	117
8.3 子通道分析方法的守恒方程	118
附录 A SIP.F90	121
附录 B SIMPLE.F90	139
附录 C THSWAN 程序使用说明	152
附录 D THSWAN 算例	170

本课程主要讨论核反应堆工程领域内出现的热、质传递的数值计算问题,诸如堆芯、蒸汽发生器、凝汽器等单元设备内存在的极其复杂的传热与传质现象。

对传热与流体流动过程的预测可以通过实验研究或者数值计算的方法,在开始这门课程之前,先对这两种方法进行比较简要的讨论并加以比较。

我们知道,一个物理过程的最可靠的数据资料往往要由实验测量得到。采用全尺寸设备进行实验研究,可以预测和它完全相同的同类设备在相同的条件下的运行特性。但是,在大多数情况下,这种全尺寸实验是极其昂贵的,而且有时候甚至是根本不可能的。于是比较可行的方法是在缩小比例的模型上做相似实验。但是由这些实验所得到的结果必须外推到全尺寸的设备上,然而进行这种外推工作的一般规律往往是无法得到的。此外,这种缩小尺度的模型并不总是能模拟全比例设备的各方面特性,这样就进一步降低了模型试验结果的准确性。最后,必须记住,在许多情况下还存在着测量上的严重困难,何况测量仪表本身还有误差。

那么理论的预测方法呢?理论的预测通常根据一个数学模型的结果而不是一个实际的实验装置的结果。对于本课程所要研究的物理过程,数学模型主要由一组常微分或偏微分方程组成。如果打算采用经典的数学方法来解析地求解这些微分方程组,那么想要预测在工程实际中许多感兴趣的现象几乎是没有什么希望的。翻一翻传热学或流体力学的经典教科书就可以得出结论,实际问题中只有相当小的一部分可以得到解析解。此外,这些解往往包含有无穷级数特殊函数以及关于特征值的超越方程等,以致使这些解析解的计算仍然是一个非常艰巨的任务。

很幸运,数值方法和计算机的迅速发展使得人们有可能对几乎任何一个实际问题求出数学模型的近似解。于是我们就要构造并求解关于这些未知量的代数方程组。用代数方程代替微分方程所固有的简化使得数值方法强有力并得以广泛应用。数值计算已经成为实验研究和理论分析之外的又一种新的研究方法。

下面列举一些有关数值计算胜过相应的实验研究的优点。

(1) 成本低

用数值计算的方法进行预测的最重要的优点是它的成本低。在大多数实际应用中,计算机运算的成本要比相应的实验研究的成本低好几个数量级。随着所要研究的物理对象变得越来越大,越来越复杂,这个因素的重要性还会不断增长。除此之外,与大多数物品价格不断上涨的趋向相反,未来计算机计算的成本或许还会更低。

(2) 速度快

数值计算研究能以极其惊人的速度进行。一个设计者可以在不到一天的时间内研究数百种不同的方案并从中选择出最佳的设计。另一方面很容易想象得到的是相应的实验研究将需要非常多的时间。

(3) 资料完备

对一个问题进行计算机求解可以得到详尽而又完备的资料。它能够提供在整个计算域内所有的有关变量(如速度、压力、温度、浓度及湍流强度)的值。与实验的情况不同,在调试中几乎没有达不到的位置,也不会遇到由传感器引起的流场扰动的困难。显然不可能期望实验研究能够测出整个计算域内所有变量的分布。正因为如此,就是在做实验的时候,同时求得计算机的数值解来补充实验资料也是很有价值的。

(4) 具有模拟真实条件的能力

在理论计算中,可以很容易地模拟真实条件,不必采用缩小的模型或冷态流动模型。就一个计算机的程序而言,无论是具有很大或很小尺寸的物体,不论是处理很低或很高的温度,也不论是处理有毒或易燃的物质,还是分析很快或很慢的过称,都几乎不会有任何困难。

(5) 具有模拟理想条件的能力

人们有时用预测的方法来研究一种基本的物理现象而不是一个复杂的工程问题。在研究某种现象的时候,人们希望把注意力集中在几个基本的参数上而要设法消除所有无关的因素。因此,人们希望实现若干理想的条件,例如:二维状态,常密度,一个绝热的表面或是很大的反应速率等。在数值计算中,很容易准确地约定这样的一些条件。相反,即便是很小心地安排的实验也很难近似做到这种理想化的条件。

理论计算所具有的一些优点足以激发人们热衷于计算机分析,但是对于任何事物过度的热情都是不可取的。在开始进行学习数值计算之前,先了解一点数值计算的缺点,或者说是数值计算存在的局限性是有益处的。

正如前面所述,计算机分析算出了蕴含在数学模型中的结果。相反,实验研究则观察实体本身。因此所用的数学模型的适用程度限制着数值计算的成败。我们必须注意到,计算机使用者所得到的的是与数学模型和数值分析两者都有关最终结果。如果所采用的数学模型不合适,那么,即便是一个完善而又令人满意的数值方法也只能产生毫无价值的结果。

为了讨论数值计算的缺点,把所有的实际问题分成两大类来讨论:

A类:指能够用合适的数学模型进行描述的一类问题(如热传导、层流流动、简单的湍流边界层)。

B类:指迄今还无法用合适的数学模型进行描述的一类问题(如复杂的湍流流动、某些非牛顿流体流动、在湍流燃烧中氧化物的生成、某些两相流动等)。

当然一个确定的问题到底应该归于上述两类问题中的哪一类,决定于我们打算把什么样的描述看成是“合适的”。

A类问题。可以说,对于A类问题中的大多数理论计算不会有什么缺点。在这样的情况下用计算机求解的优越性远远大于实验研究。但是人们在计算时偶尔也会碰到一些问题。如需要预测的只是些非常有限的对象(如求取一个复杂设备的总压降),实验往往变得十分简单,计算可能要比实验来得贵。对于一些几何形状复杂、非线性强、流体物性变化大等的困难问题,数值解可能很难获得或者即使可以获得代价也比较高昂。另外,对于像湍流

这样一类变化快而尺度又小的现象,要想通过求解瞬态的纳维—斯托克斯(Navie-Stokes)方程来算出它们的全部与时间相关的结果仍然是计算方法实际能力所不及的。最后,当要求解的数学问题偶尔会出现多于一个解时,要想确定所算得的某一个解是否就是方程本身的真解也是不容易的。

研究计算方法的目的在于使这些计算方法更加可靠、准确和有效。随着研究的进展,这里所提到的问题将会被不断地克服掉。

B类问题。B类问题除了具有A类问题所具有的全部问题以外,人们尚难确定计算结果与真实结果之间到底接近到什么程度。在这种情况下,进行实验验证是极有必要的。数学模型的研究不断地把B类的问题转化为A类问题。这种研究过程包括先提出一个模型,然后用计算机分析求出该模型所蕴含的全部物理内涵并进而对这些结果与实验数据进行比较。于是在这一研究过程中,计算方法起着关键的作用。各种尺度的湍流模型的发展就是一个令人瞩目的例子。

我们在这里所进行的关于数值计算方法与实验研究之间相对优缺点的讨论,目的并不是要向读者推荐数值计算方法而排斥实验研究。分别对两种方法各自的优缺点进行评价的根本之点,是在于告诉读者要恰当地选择合适的方法,这在哲学意义上来说,一定要具体问题具体分析。

无疑,实验方法是研究一种新的基本现象的根本方法,就这个意义上讲实验在前而计算在后。而在对许多相互作用的已知现象进行综合分析时,计算方法更为有效。但是就是在这样的情况下,为了充分确认计算结果的可取性,人们仍然有必要把这些结果与实验数据加以比较、验证。另一方面初步的计算机分析对于实验过程的设计常常是有益的,如果用计算机分析进行补充研究往往能使实验的工作量大大减少。

于是最佳的预测过程应当是数值计算与实验的有效结合。两部分工作的比例与问题的性质、研究的对象以及经济和其他一些限定因素有关。本课程重点讲述的是数值计算的方法问题。

第 2 章

偏微分方程数值解法

首先我们来明确一下什么是偏微分方程组,抓住三个关键词:“偏”、“微分”和“组”。“偏”是和“常微分”的“常”相对的,是因为函数关系中的自变量数目不止一个,例如有时间、空间坐标等,因此用偏导数。“微分”是和“积分”相对的,说明变量之间的函数关系是微分的关系。“组”描述的是问题的数学模型有可能不止一个方程,而是由几个偏微分方程联合在一起的一个方程组。

本章重点研究偏微分方程,“组”的问题留待以后的章节再讨论。本章要点:偏微分方程的分类及其差分格式,对应不同的差分格式要能够分析其截断误差精度和稳定性特征。

2.1 典型的偏微分方程介绍

下面我们先来看一下典型的单个偏微分方程的一些比较成熟的求解方法。该部分的内容可以参考与大学本科阶段学过的数理方程和特殊函数课程有关的内容。

2.1.1 椭圆型方程

科学技术中经常遇到一些重要的、典型的偏微分方程。在研究有热源稳定状态下的热传导,有固定外力作用下薄膜的平衡问题时,都会遇到泊松(Poisson)方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (x, y) \in D \quad (2-1)$$

其中, D 表示分析区域。特别在没有热源或没有外力时,就得到拉普拉斯(Laplace)方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2-2)$$

此外,当研究不可压缩理想流体无旋流动的速度场的时候也会遇到方程(2-1)或方程(2-2)类型的方程。

2.1.2 抛物型方程

在研究热传导过程、气体扩散现象、电磁场的传播等问题中以及在统计物理、概率论和量子力学中,经常遇到抛物型方程。这类方程中最简单、最典型的是瞬态热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad t > 0, 0 < x < L \quad (2-3)$$

其中, a 是常数。方程(2-3)表示长度为 L 的细杆内物体温度分布的偏微分方程。

2.1.3 双曲型方程

在研究波的传播、物体的振动时,常遇到双曲型方程。这类方程中最简单、最典型的是波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad t > 0, 0 < x < L \quad (2-4)$$

它表示长度为 L 的弦振动的偏微分方程。

2.1.4 定解问题

偏微分方程(2-1)~(2-4)是描述物理过程的普遍规律的。要使它们刻画某一特定的物理过程,必须给出附加条件。把决定方程唯一解所必须给定的初始条件和边界条件叫做定解条件。定解条件由实际问题提出。对方程(2-3)来说,初始条件的提法应为 $u(x, 0) = f(x)$, 其中 $f(x)$ 为已知函数,它表示物体在初始状态下温度分布是已知的。边界条件的提法可以为物体在端点的温度分布为已知,即

$$\begin{cases} u(0, t) = \varphi(t) \\ u(L, t) = \psi(t) \end{cases}, \quad t \geq 0 \quad (2-5)$$

其中, $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 为已知的可以随时间变化的函数。

对方程(2-4)来说,边界条件的提法和方程(2-5)的形式一样,它表示弦在两端振动规律为已知。初始条件的提法可以为

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \end{cases}, \quad 0 \leq x \leq L \quad (2-6)$$

其中, $f(x)$ 和 $g(x)$ 为已知函数。它表示在初始时刻弦振动的规律和振动的速度。对于方程(2.1)和方程(2.2)来说,因为它们反应稳定状态的情况,与时间无关,所以不需要提初始条件。边界条件的提法可以为

$$u(x, y)|_s = \varphi(x, y) \quad (2-7)$$

其中, $\varphi(x, y)$ 为已知边界; s 是区域 D 的边界。

由偏微分方程和定解条件所构成的问题叫定解问题。许多实际问题提出的定解问题无法求出解析解,少数问题即使求得解析解,计算过程、解的表达式也可能很复杂。因此必须寻求方法简单、可以在计算机上计算的数值方法。

本章主要针对几个典型的微分方程介绍常用的差分方法。差分方法的基本思想是:把一个连续问题离散化,通过各种手法化成未知量的线性方程组,然后求其解。

2.2 差分法简介

差分法是求偏微分方程数值解的重要方法之一,它的主要做法是把偏微分方程中的所有偏导数分别用差商代替,从而得到一个代数方程组——差分方程,然后对差分方程求解,并以所得的解作为偏微分方程数值解。而偏导数之所以能够用差商来近似的数学依据是连续可微函数在邻域内的泰勒展开。

为了运用差分法,需要先对区域进行剖分,用网格点来代替连续区域,因此差分法也可称为网格法。

下面用一个简单例子来说明差分法的基本思想,希望读者能够通过这样一个简单的问题体会差分法的精要。

取一边长为 1 的正方形均匀薄板(见图 2-1),上下侧面绝热,四周保持恒温(但每一边上的温度不一定相等),求板内各点的稳定温度分布。为了先把数学问题抽象出来,我们先不考虑该板的实际大小和厚度,边长取 1,而不是 1m 或者 1cm。这样,这个问题的数学模型可以化为拉普拉斯方程的第一边值问题:

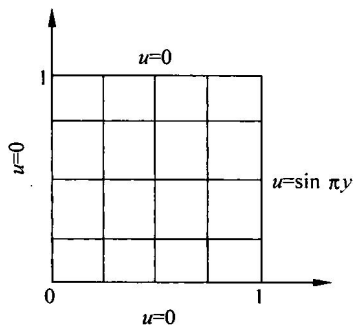


图 2-1 网格法示意图

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & (\Omega: 0 < x < 1, 0 < y < 1) \\ u|_{x=0} = u|_{y=0} = u|_{y=1} = 0 \\ u|_{x=1} = \sin \pi y \end{cases} \quad (2-8)$$

一般来说,对这类问题我们无法求出解的解析表达式,有的即便能求出也是很复杂的,在实际问题中往往也并不需要求出 u 在区域 Ω 内在连续统意义上的每一点的值,实际上能求出该区域内某些离散点的近似值也就满足需要了。

在图 2-1 中作平行于坐标轴间隔为 $h = \frac{1}{4}$ 的两组网格线,求 u 在网格点(落在 Ω 内两族直线的交点)上的值,并且以后采用下列记号:

$$(x_i, y_k) = (ih, kh), \quad u(x_i, y_k) = u(i, k) \quad (2-9)$$

利用 u 在这些点满足方程(2-8),即

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{ik} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{ik} = 0 \quad (2-10)$$

求出 u 在网格点上的值,方程(2-10)中 $()_{ik}$ 表示在 (i, k) 点上的值。

从方程(2-10)中是无法直接求出 u 值的,求出 u 在网格点上的近似值也就可以了。为此,和常微分方程的差分方法一样,将方程(2-10)中的偏导数用差商代替,则有

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{ik} = \frac{u(i-1, k) - 2u(i, k) + u(i+1, k)}{h^2} \quad (2-11)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{ik} = \frac{u(i, k+1) - 2u(i, k) + u(i, k-1)}{h^2} \quad (2-12)$$

于是就得到 $u(i, k)$ 的近似值 u_{ik} 所满足的线性代数方程组:

$$\frac{1}{h^2}(u_{i+1,k} + u_{i-1,k} + u_{i,k+1} + u_{i,k-1} - 4u_{ik}) = 0 \quad (2-13)$$

其中, $u_{0k} = u_{i0} = u_{i3} = 0 (k, i = 1, 2, 3)$,

$$u_{4k} = \sin(k\pi/4) = \begin{cases} 0.707, & k = 1 \\ 1, & k = 2 \\ 0.707, & k = 3 \end{cases} \quad (2-14)$$

可以用迭代法来解方程组(2-13)。首先将方程组(2-13)化成可迭代形式:

$$u_{ik} = \frac{1}{4}(u_{i+1,k} + u_{i-1,k} + u_{i,k+1} + u_{i,k-1}) \quad (2-15)$$

计算 u_{ik}^{n+1} 时可将方程(2-15)化成简单迭代形式:

$$u_{ik}^{n+1} = \frac{1}{4}(u_{i+1,k}^n + u_{i-1,k}^n + u_{i,k+1}^n + u_{i,k-1}^n)$$

计算 u_{ik}^1 时只要将 u_{ik}^0 周围四个点加起来除以 4, 如此下去直到 u_{ik}^n 满足所需要的收敛精度为止。

下面是这个问题的一段 FORTRAN 实现程序, 程序的计算结果如图 2-2 所示。

```

PARAMETER (N=5, PI=3.1415926D0)
DIMENSION U(N,N), U0(N,N)
U=0
DO I=1,N
    U(I,N)=SIN(DBLE(I-1)*PI/DBLE(N-1))
END DO
U0=U
DELTA=1.0
DO WHILE (DELTA.GE.1.0D-3)
    DELTA=0.0
    DO I=2,N-1
        DO J=2,N-1
            U(I,J)=(U0(I-1,J)+U0(I+1,J)+U0(I,J-1)+U0(I,J+1))/4.0
            DELTA=DMAX1(ABS((U(I,J)-U0(I,J))/U(I,J)),DELTA)
        END DO
    END DO
    U0=U
ENDDO
OPEN (96, FILE='U.PRN')
WRITE (96,100) ((U(I,J), I=1,N), J=1,N)
100 FORMAT (5E15.5)
STOP
END

```

同样我们也可以用赛德尔迭代法来求解上述方程组, 有下述迭代公式:

$$u_{ik}^{n+1} = \frac{1}{4}(u_{i-1,k}^{n+1} + u_{i+1,k}^n + u_{i,k-1}^n + u_{i,k+1}^n) \quad (2-16)$$

请比较一下方程(2-15)和方程(2-16)的迭代格式的异同。由上面的例子可以看出用差

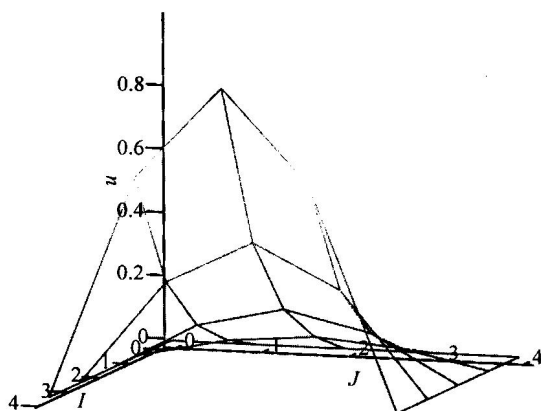


图 2-2 温度分布示意图

分法解椭圆型方程需要考虑以下三个问题:

- (1) 选用网格, 如何将微分方程离散化为差分方程?
- (2) 当网格步长 $h \rightarrow 0$ 时, 差分方程的准确解是否收敛于微分方程的解?
- (3) 如何解相应的代数方程组?

2.3 椭圆型方程的差分解法

椭圆型方程最典型的问题是拉普拉斯方程

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2-17)$$

和泊松方程

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (2-18)$$

下面以泊松方程第一边值问题为例来建立差分方程。

考虑泊松方程第一边值问题:

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi(x, y), & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2-19)$$

先作和坐标轴平行的两组网格线:

$$x = ih_1, \quad i = 0, \pm 1, \dots \quad (2-20)$$

$$y = kh_2, \quad k = 0, \pm 1, \dots \quad (2-21)$$

现在对 (i, k) 点沿着 x, y 轴方向分别用二阶中心差商代替 u_{xx}, u_{yy} (通常用 u_{xx} 表示 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

u_{xy} 表示 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$), 则得

$$\Delta_h u_{ik} = \frac{u_{i+1,k} - 2u_{ik} + u_{i-1,k}}{h_1^2} + \frac{u_{i,k+1} - 2u_{ik} + u_{i,k-1}}{h_2^2} = f_{ik} \quad (2-22)$$

称方程(2-22)为方程(2-19)的差分方程,式中 u_{ik} 表示节点 (i,k) 上的近似值。

下面我们来分析一下差分方程(2-22)对数学模型(2-19)的近似程度,利用泰勒(Taylor)展开公式,有

$$\begin{aligned} u_{i+1,k} = & u_{ik} + h_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{ik} + \frac{h_1^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{ik} + \frac{h_1^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{ik} \\ & + \frac{h_1^4}{4!} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_{ik} + \frac{h_1^5}{5!} \left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \right)_{ik} + \frac{h_1^6}{6!} \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} \right)_{(i,k)} \\ & \text{其中, } (i,k) \leq (\bar{i},k) \leq (i+1,k) \end{aligned} \quad (2-23)$$

$$\begin{aligned} u_{i-1,k} = & u_{ik} - h_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{ik} + \frac{h_1^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{ik} - \frac{h_1^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{ik} \\ & + \frac{h_1^4}{4!} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_{ik} - \frac{h_1^5}{5!} \left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \right)_{ik} + \frac{h_1^6}{6!} \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} \right)_{(i,k)} \\ & \text{其中, } (i-1,k) \leq (\bar{i},k)' \leq (i,k) \end{aligned} \quad (2-24)$$

$$\begin{aligned} u_{i,k+1} = & u_{ik} + h_2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{ik} + \frac{h_2^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{ik} + \frac{h_2^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right)_{ik} \\ & + \frac{h_2^4}{4!} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right)_{ik} + \frac{h_2^5}{5!} \left(\frac{\partial^5 u}{\partial y^5} \right)_{ik} + \frac{h_2^6}{6!} \left(\frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right)_{(i,k)} \\ & \text{其中, } (i,k) \leq (\bar{i},k) \leq (i,k+1) \end{aligned} \quad (2-25)$$

$$\begin{aligned} u_{i,k-1} = & u_{ik} - h_2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{ik} + \frac{h_2^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{ik} - \frac{h_2^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right)_{ik} \\ & + \frac{h_2^4}{4!} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right)_{ik} - \frac{h_2^5}{5!} \left(\frac{\partial^5 u}{\partial y^5} \right)_{ik} + \frac{h_2^6}{6!} \left(\frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right)_{(i,k)} \\ & \text{其中, } (i,k-1) \leq (\bar{i},k)' \leq (i,k) \end{aligned} \quad (2-26)$$

把这四个式子代入式(2-22)便有

$$\frac{u_{i+1,k} - 2u_{ik} + u_{i-1,k}}{h_1^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{ik} + \frac{h_1^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_{ik} + \frac{h_1^4}{360} \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} \right)_{ik} + O(h_1^6) \quad (2-27)$$

$$\frac{u_{i,k+1} - 2u_{ik} + u_{i,k-1}}{h_2^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{ik} + \frac{h_2^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right)_{ik} + \frac{h_2^4}{360} \left(\frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right)_{ik} + O(h_2^6) \quad (2-28)$$

于是可得差分方程(2-22)的截断误差为

$$\begin{aligned} R_{ik}(u) &= \Delta u(x_i, y_k) - \Delta_h u(x_i, y_k) \\ &= -\frac{1}{12} \left(h_1^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + h_2^2 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right)_{ik} + O(h^4) \\ &= O(h^2) \end{aligned} \quad (2-29)$$

其中, u 是方程(2-22)的光滑解,可见其截断误差是二阶的。

由于差分方程(2-22)中只出现 u 在 (i,k) 及其相邻四个点上的值,故称之为五点差分格式。

特别地,当取正方形网格时,有 $h_1 = h_2 = h$,则差分方程(2-22)简化为

$$u_{ik} - \frac{1}{4}(u_{i-1,k} + u_{i,k-1} + u_{i+1,k} + u_{i,k+1}) = -\frac{h^2}{4}f_{ik} \quad (2-30)$$

若 $f \equiv 0$,则有

$$u_{ik} = \frac{1}{4}(u_{i-1,k} + u_{i,k-1} + u_{i+1,k} + u_{i,k+1}) \quad (2-31)$$

2.4 抛物型方程的差分解法

抛物型方程中最典型的是一维热传导方程:

$$\Delta u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad a > 0, \quad 0 < t \leq T \quad (2-32)$$

它的定解条件主要有以下两类:

(1) 初值问题(或称柯西(Cauchy)问题)

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty \quad (2-33)$$

(2) 边值问题(或称混合问题)

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u(a_0, t) = \alpha, \quad u(a_n, t) = \beta \end{cases} \quad (2-34)$$

求方程(2-32)满足定解条件(1)或(2)的解。

在区域 $G = \{(x, t) | 0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$ 上考虑热传导方程

$$\Delta u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad a \text{ 为正常数} \quad (2-35)$$

和定解条件

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), & 0 < x < 1 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & 0 < t \leq T \end{cases} \quad (2-36)$$

先用两组平行直线族 $x_j = jh, t_k = k\tau (j=0, \pm 1, \dots, k=0, \pm 1, \dots)$ 构成的矩形网覆盖整个 xt 平面。 h, τ 为常数, 分别称为空间步长及时间步长。在节点 (x_j, t_k) 处微商与差商之间有如下近似关系:

$$\frac{u(x_j, t_{k+1}) - u(x_j, t_k)}{\tau} = \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]_j^k + O(\tau) \quad (2-37)$$

$$\frac{u(x_{j+1}, t_k) - 2u(x_j, t_k) + u(x_{j-1}, t_k))}{h^2} = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_j^k + O(h^2) \quad (2-38)$$

利用上述表达式得到 Δu 在 (x_j, t_k) 处的关系式

$$\begin{aligned} & \frac{u(x_j, t_{k+1}) - u(x_j, t_k)}{\tau} - a \frac{u(x_{j+1}, t_k) - 2u(x_j, t_k) + u(x_{j-1}, t_k))}{h^2} \\ &= [\Delta u]_j^k + O(\tau + h^2) \end{aligned} \quad (2-39)$$

当 u 满足方程(2-35)时, 由方程(2-39)看出在 (x_j, t_k) 点可以用下列方程近似地代替:

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} - a \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} = f_j^k \quad (2-40)$$

$$j = 1, 2, \dots, N-1; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

其中, $f_j^k \equiv f(x_j, t_k); u_j^k$ 视为 $u(x_j, t_k)$ 的近似值。

差分方程(2-40)称为热传导方程(2-35)的古典显格式。将方程(2-40)写成便于计算的形式