

机构优化设计

(讲义手稿)

郑州粮食学院

机械系机械原理及零件教研室

一九八五年二月

目 录

第一章	平面机构的矢量三角形解法	1
	引 言	1
§ 1—1	复数理论的基本知识	1
§ 1—2	矢量三角形的解	6
§ 1—3	矢量的微分	15
§ 1—4	机构分析的矢量三角形法	16
附 录	矢量三角形解的 BASIC 子程序	22
第二章	机构设计的最优化方法	25
	引 言	25
§ 2—1	机构优化设计的数学模型	27
一.	设计变量	27
二.	约束条件	29
三.	目标函数	32
四.	最优设计的数学模型	34
§ 2—2	最优化方法的基本概念	35
一.	极值点的充分条件	35
二.	目标函数的等值面	36
三.	局部最优和全域最优	38
附 录		39
§ 2—3	最优化设计中的数值迭代方法	
	和一维搜索方法	46
一.	数值迭代方法和收敛条件	46

二.	一维搜索方法	47
(一)	进退法	48
(二)	二次插值法	49
§ 2-4	无约束最优化方法	53
一.	坐标轮换法	53
二.	最速下降法 (梯度法)	59
三.	共轭梯度法	64
四.	牛顿法和变尺度法	68
五.	共轭方向法	73
§ 2-5	约束最优化方法	76
一.	约束随机法	77
二.	消元法与变量变换法	80
三.	罚函数法	81
§ 2-6	机构的优化设计	84

第一章 平面机构的矢量三角形解法

引 言

在探讨机构综合(设计)之前,必须先研究机构的分析(运动分析和动力分析)。研究平面机构分析的方法有图解法、解析法及实验法三种。图解法的优点是比较简单直观,解析法则可以得到高的精度,但比较麻烦。近年由于电子计算机的使用和现代数值计算方法的大量出现,很多具有广泛适应性的通用解法和程序可供使用,因此解析法有了很大的发展。解析法由于所用的数学工具不同,有直角坐标解析法,复数法等。本章介绍的是复数法。并总结出平面机构的矢量三角形解法,以供机构的电子计算机辅助设计时引用。

一般平面机构无论怎样复杂,都可以分解成若干个三角形的形式来表达。通过解析这种再简单不过的三角形形式,即可获得各构件的运动参数和动力参数。讨论本章的目的,也就在于建立解析这样三角形的子程序。我们在对复杂机构进行分析时,反复调用相应的三角子程序,即可得到所需的参数。

§1-1 复数理论的基本知识

机构运动简图的形状可以用矢量多边形的方式来表达,而该多边形中所包含的矢量可以用复数形式表示。为此我们来讨论直角坐标系,实数沿着它的横坐标轴来截取,而虚数沿着纵坐标轴来截取。(图1-1-1)复数按下列条件而对应于某一

矢量 R :

$$R = x + jy \quad (1-1-1)$$

式中 x —— 复数 (矢量) 的
实数部分。

jy —— 虚数部分。

我们用 θ 表示矢量对横坐标
轴的倾角, 用 r 表示矢量 R 的模
得:

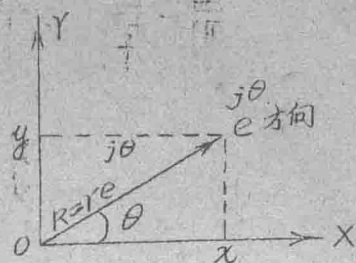


图 1-1-1

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (1-1-2)$$

由式 (1-1-2) 得:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1-1-3)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{tg } \theta &= \frac{y}{x} \end{aligned} \right\} \quad (1-1-4)$$

这里取 θ 为 $-180^\circ < \theta \leq 180^\circ$

注意, 这里写成 (1-1-4) 形式求 θ 值, 应根据 x, y
的正、负、零, 确定 θ 的象限求 θ 的值:

1) 当 $x > 0$ 时, θ 为第一、四象限, 因此

$$\theta = \text{tg}^{-1} \frac{y}{x}$$

2) 当 $x < 0, y \geq 0$ 时, θ 为第二象限角, 则

$$\theta = \text{tg}^{-1} \frac{y}{x} + \pi$$

3) 当 $x < 0, y < 0$ 时, θ 为第三象限角, 所以

$$\theta = \text{tg}^{-1} \frac{y}{x} - \pi$$

4) 当 $x=0$ 时

若 $y>0$ 则 $\theta = \frac{\pi}{2}$

若 $y<0$ 则 $\theta = -\frac{\pi}{2}$

若 $y=0$ 则 $\theta = 0$

根据以上所列各种情况, 编写求 θ 值的 BASIC 子程序参
看本章附录“5000 ATANT2 (T_1, T_2, T_0)” 这里变量
 T_1 表示 x , T_2 表示 y , T_0 表示 θ 。

把方程 (1-1-2) 代入 (1-1-1), 可得到复数 (矢量)
的一种表达形式:

$$R = r \cos \theta + j r \sin \theta \quad (1-1-5)$$

用欧拉公式:

$$\cos \theta + j \sin \theta = e^{j\theta} \quad (1-1-6)$$

得到复数 (矢量) 又一种表达形式

$$R = r e^{j\theta} \quad (1-1-7)$$

这种表示方式将矢量的模和方向角归纳在同一项中, 应用起来
方便。

两矢量 A 和 B 相加得出矢

(图 1-1-2)

$$R = A + B \quad (1-1-8)$$

$$\begin{aligned} & r(\cos \theta + j \sin \theta) \\ &= a(\cos \alpha + j \sin \alpha) \\ &+ b(\cos \beta + j \sin \beta) \end{aligned} \quad (1-1-9)$$

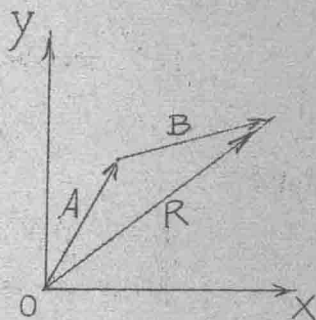


图 1-1-2

由此得：

$$\left. \begin{aligned} R \cos \theta &= a \cos \alpha + b \cos \beta = R_x \\ R \sin \theta &= a \sin \alpha + b \sin \beta = R_y \end{aligned} \right\} \quad (1-1-10)$$

这里 R_x 和 R_y 的值即为矢量 R 的矢端坐标值，即

$$R = R_x + j R_y \quad (1-1-11)$$

两矢量相减时，其关系式类同式 1-1-10，只不过将公式中 + 变成 - 号。

以复数表示的两个矢量 A 和 B 相乘以后，得出矢量，

$$R = A B \quad (1-1-12)$$

或

$$R e^{j\theta} = a e^{j\alpha} + b e^{j\beta} = a b e^{j(\alpha+\beta)} \quad (1-1-13)$$

由此得：

$$\left. \begin{aligned} R &= a b \\ \theta &= \alpha + \beta \end{aligned} \right\} \quad (1-1-14)$$

两矢量相除，得矢量：

$$R = \frac{A}{B} \quad (1-1-15)$$

或：

$$R e^{j\theta} = a e^{j\alpha} / b e^{j\beta} = \frac{a}{b} e^{j(\alpha-\beta)} \quad (1-1-16)$$

由此得：

$$\left. \begin{aligned} R &= a/b \\ \theta &= \alpha - \beta \end{aligned} \right\} \quad (1-1-17)$$

若 (1-1-7) 式两边同除以 R 可得单位矢量

$$S = e^{j\theta} \quad (1-1-18)$$

其模等於 1，表示 R 方向的單位矢罫，因此， $e^{j\theta}$ 表示 3 矢罫 R 的方向，即表示一个与 X 轴成 θ 角的方向。我們称方向 S 或方向 $e^{j\theta}$ 。(图 1-1-1)

用某單位矢罫 $e^{j\alpha}$ 去乘矢罫 R 时，則

$$re^{j\theta} \cdot e^{j\alpha} = re^{j(\theta+\alpha)} \quad (1-1-19)$$

相当于將矢罫 R 按逆时针方向轉过 α 角。

設 $\alpha = \frac{\pi}{2}$

則 $e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} = j$ (1-1-20)

因此，用虛數單位 j 去乘某复数矢罫，表示將这一矢罫逆时针方向旋轉 90° ，即

$$j \cdot re^{j\theta} = re^{j(\theta+90^\circ)} \quad (1-1-20)$$

同样，还有关系式：

$$-R = -re^{j\theta} = j^2 re^{j\theta} = re^{j(\theta+180^\circ)} = re^{j(\theta-\theta)} \quad (1-1-21)$$

同理，用單位矢罫 $e^{j\alpha}$ 去除某矢罫，則意味着將此矢罫按顺时针旋轉 α 角，相当用 $e^{j(-\alpha)}$ 去乘法矢罫，即

$$\frac{re^{j\theta}}{e^{j\alpha}} = re^{j\theta} \cdot e^{j(-\alpha)} = re^{j(\theta-\alpha)} \quad (1-1-21)$$

§1-2 矢量的解

设矢量 A 和 B 之和为 C , 其矢量方程式为

$$C = A + B \quad (1-2-1)$$

或写成复数形式:

$$C e^{j\theta_c} = a e^{j\theta_a} + b e^{j\theta_b} \quad (1-2-2)$$

按三角形法则表示如图 1-2-1

因为每个平面矢量含有长度(模)和方向(角)这两个参数, 所以, 式 (1-2-1) 中含有 6 个参数。由式 (1-1-7) 有

$$\left. \begin{aligned} C \cos \theta_c &= a \cos \theta_a + b \cos \theta_b \\ C \sin \theta_c &= a \sin \theta_a + b \sin \theta_b \end{aligned} \right\} \quad (1-2-3)$$

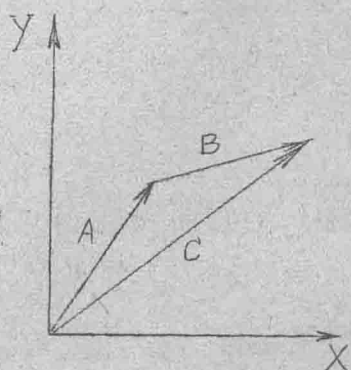


图 1-2-1

即矢量方程式 (1-2-1) 中包含有两个标量方程式 (1-2-3) 所以, 解矢量方程式 (1-2-1), 未知参数必须在二个以内, 否则其解不定。

设矢量方程式 (1-2-1) 的 6 个参数: 三个长度参数 a , b , C 和三个方向角 θ_a , θ_b , θ_c 中有两个未知数。现设 A 总是为已知矢量, 根据不同的组合, 矢量方程式 (1-2-1) 可以分为以下四种类型:

1. C 和 θ_c 为未知数
2. b 和 C 为未知数
3. C 和 θ_b 为未知数
4. θ_b 和 θ_c 为未知数

对于不同类型的问题，其解法也不同，现分别详述如下。

类型1的解

矢量方程：

$$C = A + B \quad (1-2-4)$$

或

$$C e^{j\theta_c} = a e^{j\theta_a} + b e^{j\theta_b} \quad (1-2-5)$$

式中 C 和 θ_c 为未知数，其他参数都已知。其图解见图1-2-1。

分别取(1-2-5)式两边虚数部分和实数部分，得：

$$\left. \begin{aligned} C \sin \theta_c &= a \sin \theta_a + b \sin \theta_b = y \\ C \cos \theta_c &= a \cos \theta_a + b \cos \theta_b = x \end{aligned} \right\} \quad (1-2-6)$$

两式相除得：

$$\operatorname{tg} \theta_c = \frac{y}{x} \quad (1-2-7)$$

这里 $-180^\circ < \theta_c \leq +180^\circ$ ，按式(1-1-4)求 θ_c 。用计算机计时，可调用 ATANT2 (T_1, T_2, T) 子程序。

下面再来求另一个未知数 C 。

由于 θ_c 已求得，用 $e^{j\theta_c}$ 除(1-2-5)式两边得：

$$C = a e^{j(\theta_a - \theta_c)} + b e^{j(\theta_b - \theta_c)} \quad (1-2-8)$$

取两边的实数部分可求得：

$$C = a \cos(\theta_a - \theta_c) + b \cos(\theta_b - \theta_c) \quad (1-2-9)$$

实际上，求解 C 值应用余弦定理亦可求得。

类型1解的 BASIC 子程序见本章附录标号为1000的 CASE1 (A1, A0, B1, B0), (C1, C2) 子程序。各变量名的脚标1和0分别代表相应矢量的长度和方向角。前括号内为输入参数，后括号内为输出参数。

类型2的解

矢量方程式：

$$C = A + B \quad (1-2-10)$$

$$C e^{j\theta_c} = a e^{j\theta_a} + b e^{j\theta_b} \quad (1-2-11)$$

其中 C 和 b 为未知数。其图解见图

1-2-2。

用 $e^{j\theta_c}$ 除上式两边得

$$C = a e^{j(\theta_a - \theta_c)} + b e^{j(\theta_b - \theta_c)} \quad (1-2-12)$$

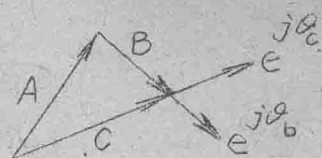


图 1-2-2

取两边虚数部分，可消去未知数 C ，得：

$$0 = a \sin(\theta_a - \theta_c) + b \sin(\theta_b - \theta_c)$$

$$\therefore b = \frac{a \sin(\theta_a - \theta_c)}{\sin(\theta_c - \theta_b)} \quad (1-2-13)$$

同样，用 $e^{j\theta_b}$ 除 (1-2-11) 式两边，再取虚数部分，则可得：

$$C \sin(\theta_c - \theta_b) = a \sin(\theta_a - \theta_b)$$

$$\therefore C = \frac{a \sin(\theta_a - \theta_b)}{\sin(\theta_c - \theta_b)} \quad (1-2-14)$$

请注意，式 (1-2-13) 和 (1-2-14) 实质上是正弦定理。

由图 (1-2-2) 知，如果 B 和 C 方向平行，则两方向线相交于一点，此时相立式 (1-2-13) 和 (1-2-14) 右边的分母为零，因此矢量方程式 (1-2-11) 无解。

求解类型2的 BASIC 子程序见附录中标号为 2000 的子程序 CASE 2 (A1, A0, B0, C0) (B1, C1, D) 若计算结果输出 $D = 0$ ，则表示矢量方程式 (1-2-11) 无解。

类型3的解

矢量方程

$$C = A + B \quad (1-2-15)$$

$$C e^{j\theta_c} = a e^{j\theta_a} + b e^{j\theta_b} \quad (1-2-16)$$

中，未知数是 C 和 θ_b 。其图解如图

1-2-3。

以 $e^{j\theta_c}$ 除上式得

$$C = a e^{j(\theta_a - \theta_c)} + b e^{j(\theta_b - \theta_c)} \quad (1-2-17)$$

取两边虚数部分，可消去未知数 C 。

得，

$$0 = a \sin(\theta_a - \theta_c) + b \sin(\theta_b - \theta_c) \quad (1-2-18)$$

得，

$$\sin(\theta_b - \theta_c) = \frac{a \sin(\theta_c - \theta_a)}{b} = y' \quad (1-2-19)$$

$$\cos(\theta_b - \theta_c) = \pm \sqrt{1 - y'^2} = x' \quad (1-2-20)$$

上两式相除得，

$$\tan(\theta_b - \theta_c) = \frac{y'}{x'} \quad (1-2-21)$$

$$-180^\circ < \theta_b - \theta_c \leq +180^\circ$$

如前所述，应由 $\text{ATAN2}(T_1, T_2, T_0)$ 求出 $(\theta_b - \theta_c)$ 的值，从而可求得未知数 θ_b 的值。

由 (1-2-20) 知，由于 x' 的值是 $(\theta_b - \theta_c)$ 的余弦值，因此从 C 到 B 所夹的角 $(\theta_b - \theta_c)$ 的值为—。四象限角时，应取 (1-2-20) 式中的十号，为二、三象限时取一号。式 (1-2-20) 的正负号也可以这样来确定， B 在 C 上投影的分量与 C 同向时，取十号，否则取一号。如图 (1-2-3)，解 (1) 对应式 (1-2-20) 十号，解 (2) 对应一号。

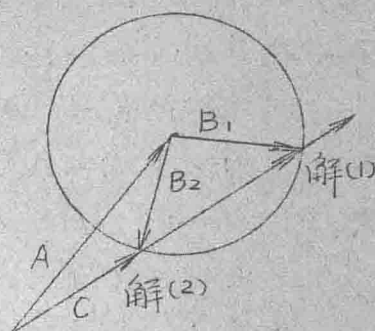


图 1-2-3

通常，可根据机构的初始条件来确定 (1-2-20) 的正负号。在一般情况下，如果初始条件是取 + 号，即使矢角有变化（如机构位置不同）也延续取 + 号；如果初始条件取 - 号，也照样延续取 - 号，在中途从取 + 号变动取 - 号这样的机构一般不用，因为象这样的机构是包含了不定因素的机构，作为机构来说是有点缺陷的。

又 B 的长度 b 太小时，在图 1-2-3 中由于 B 达不到 C，即 C 方向线与圆弧无交点，所以不会形成三角形，此时，式 (1-2-19) 的绝对值大于 1，亦即式 (1-2-20) 中根号 $\sqrt{\quad}$ 内将会出现负值，因此方程 (1-2-16) 无解。

求得 θ_b 的值后，取式 (1-2-17) 实数部分，即可求得另外一个未知数 C。

$$C = a \cos(\theta_a - \theta_c) + b \cos(\theta_b - \theta_c) \quad (1-2-22)$$

求解类型 3 的 BASIC 子程序见附录中标号为 3000 的 CASE 3 (A1, A0, B1, C0, M) (B0, C1, D) 式 (1-2-20) 中的正负号分别对应置 M 为 1 和 0，M 赋值 1 或 0 可由初始条件确定。当计算结果输出 $D=0$ 时，表示矢角方程式 (1-2-16) 无解。对机构来说，意味着运动付对机构所加的约束遭到破坏，亦即机构的结构参数违反了机构的约束条件。

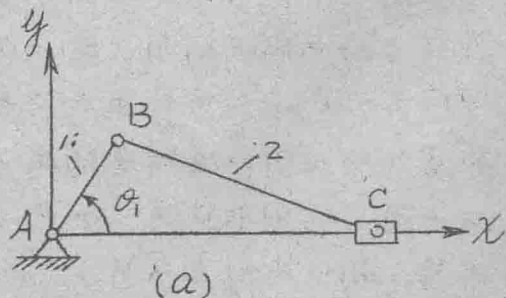
例 1-1 图示 1-2-4 曲柄滑块机构，曲柄 1 为主动件， l_1, l_2 已知， θ_1 为输入角，求滑块位移 S 。

解：机构矢角图如图 (b)。

矢角方程为：

$$S = \angle 1 + \angle 2 \quad (\text{类型 3})$$

这里， $\theta_0 = 0$ ， l_1 和 θ_1 ， l_2 已知。



未知数为 S 和 θ_2 。

L_2 在 S 上投影与 S 同向，

所以 $M=1$ ，BASIC 子程序

如下：

```

10 INPUT  $\angle_1, P_1, \angle_2, P_5$ 
20  $\angle ET$   $A1 = \angle_1$ 
30  $\angle ET$   $A0 = P_1$ 
40  $\angle ET$   $B1 = \angle_2$ 
50  $\angle ET$   $C0 = P_5$ 
60  $\angle ET$   $M = 1$ 
70 GOSUB 3000
75 IF  $D=0$  GOTO 90
80 PRINT  $B2, C1$ 
85 GOTO 95
90 PRINT "No SOLUTION"
95 END
    
```

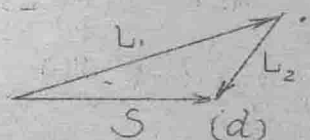
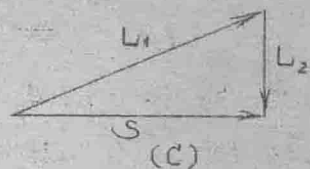
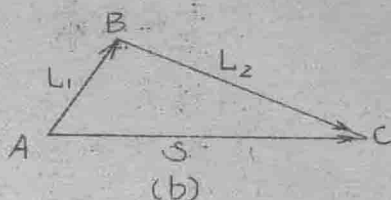


图 1-2-4

如图 a 所示，曲柄 1 转动任何位置，在调用 CASE 3 子程序时，始终置 $M=1$ 。

现在再来考虑这样的情况：当 $L_1 > L_2$ 时，曲柄就变成摇杆，当机构处于死点位置时（相应矢量图 (c)），滑块出现运动不定性，若滑块往右运动，如图 d 所示位置时，此时应置 $M=0$ ；若往左位置，应置 $M=1$ ，如果依靠惯性渡过死点，则该机构在一个运动循环中， M 的值是不同的。当然，这样的机构没有什么实用价值；但是，若取滑块作为原动件来产生双摇杆的来回摆动，那又是另外一回事了。

类型4的解

矢量方程式

$$C = A + B \quad (1-2-23)$$

$$C e^{j\theta_c} = a e^{j\theta_a} + b e^{j\theta_b} \quad (1-2-24)$$

式中 θ_c 和 θ_b 是未知数。图解见图 1-2-5，由图解知 2 个解。

用 $e^{j\theta_a}$ 除上式的两边得：

$$C e^{j(\theta_c - \theta_a)} = a + b e^{j(\theta_b - \theta_a)} \quad (1-2-25)$$

分别取上式的虚数部分和实数部分，得

$$\left. \begin{aligned} C \sin(\theta_c - \theta_a) &= b \sin(\theta_b - \theta_a) \\ C \cos(\theta_c - \theta_a) &= a + b \cos(\theta_b - \theta_a) \end{aligned} \right\} \quad (1-2-26)$$

将等号二边平方并分别相加，得：

$$C^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(\theta_b - \theta_a)$$

上式实质上就是余弦定理。

$$\therefore \cos(\theta_b - \theta_a) = \frac{C^2 - a^2 - b^2}{2ab} = \chi' \quad (1-2-27)$$

$$\sin(\theta_b - \theta_a) = \pm \sqrt{1 - \chi'^2} = \chi \quad (1-2-28)$$

$$\tan(\theta_b - \theta_a) = \chi' / \chi \quad (1-2-28)$$

$$-180^\circ < \theta_b - \theta_a \leq +180^\circ$$

调用 ATANT 2 (T_1, T_2, T_0) 即可求得 $(\theta_b - \theta_a)$ 的值，从而求得未知数 θ_b 的值。

式 (1-2-28) 的正负号取决于 $(\theta_b - \theta_a)$ 是一、二象限角还是三、四象限角，若由 A 到 B 的夹角为一、二象限角则取

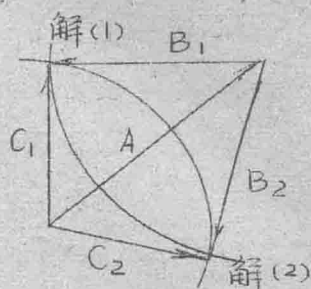


图 1-2-5

+号, 是三、四象限角则取一号, 也可这样来决定: 置A於水平向右方向位置。若B在A上方, 取+号, 否则取负号。图1-2-5中, +号相应力解(1), 负号相应力解(2)。取哪一种符号和前面例子相同, 由初始条件确定。

取式(1-2-24)的虚数部分和实数部分, 得

$$\left. \begin{aligned} C \sin \theta_c &= a \sin \theta_a + b \sin \theta_b = y \\ C \cos \theta_c &= a \cos \theta_a + b \cos \theta_b = x \\ \operatorname{tg} \theta_c &= \frac{y}{x} \end{aligned} \right\} \quad (1-2-29)$$

θ_c 的取值同前, 由 x, y 是正、负、零来确定。

类型4的实质是给出三边 a, b, c , 作三角形。所以当不满足二边之和大于或等於第三边时, 矢角方程式(1-2-24)将无解, 此时(1-2-28)式的根号内为负数, 亦即 $\cos(\theta_b - \theta_a)$ 的值大于1。

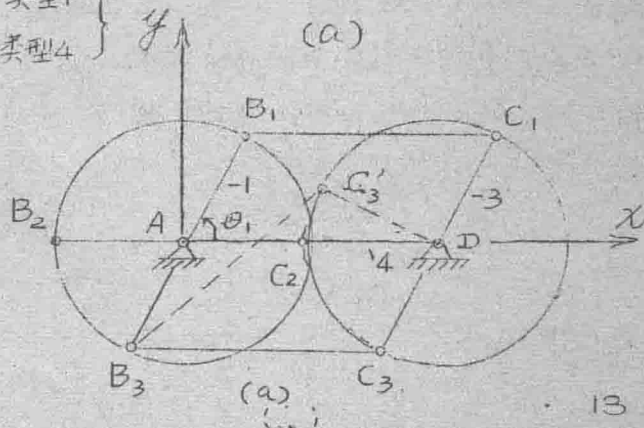
求解类型4的 BASIC 子程序见附录中标号为4000 的 CASE 4 (A1, A0, B1, C1, M) (B0, C2, D) M和D的意义同前。

例1-2 如图1-2-6 平行四边形机构, 曲柄1为主动件, 各杆长度已知, θ_1 为输入角, 求输出角 θ_3 。

解: 机构矢角图如图(b)。矢角方程式如下:

$$\left. \begin{aligned} \angle 5 &= \angle 4 + \angle 1 \text{ 类型1} \\ \angle 3 &= \angle 5 + \angle 2 \text{ 类型4} \end{aligned} \right\} y \quad (a)$$

将以上式子由上往下依次调用相应程序求解, 即可求得 θ_3 , 调用 CASE 4 时, $M=0$ 。



这里已知 $l_4, \theta_4, l_1, \theta_1, l_2, l_3$, 未知数为 $l_5, \theta_5, \theta_2, \theta_3$ BASIC 程序

如下:

```
5 INPUT L1, P1, L2, L3,
    L4, P4
```

```
10 LET A1 = L4
```

```
15 LET A0 = P4
```

```
20 LET B1 = L1
```

```
25 LET B0 = P1
```

```
30 GOSUB 1000
```

```
35 LET A1 = C1
```

```
40 LET A0 = C0
```

```
45 LET B1 = L2
```

```
50 LET C1 = L3
```

```
55 LET M0 = 0
```

```
60 GOSUB 4000
```

```
65 IF D = 0 GOTO 85
```

```
70 PRINT C0
```

```
80 GOTO 90
```

```
85 PRINT "No SOLUTION"
```

```
90 END
```

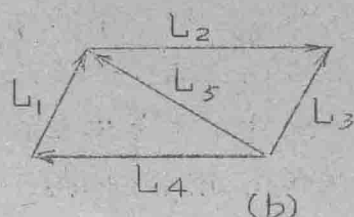


图 1-2-6

平行四边形机构，当处于死点位置时（如图 1-2-6 a 中 AB_2 位置）从动杆将产生运动不定性，如图中曲柄处于 AB_3 位置时，从动杆有可能出现在 C_3D 位置，也可能出现在 C'_3D 位置（应予以避免），当处于 C_3D 位置时，以工计称 $M=0$ ，若处于 C'_3D 位置时，则 $M=1$ 。对于如图正平行四边形机构，不管曲柄 1 处于何位置，始终赋值 $M0=0$ ，若为反平行四边形机构则始终置 $M=1$ 。