# 物理实验简明教程

（初　　稿）

江西省物理学会

1984年8月

# 前　　言

本书是在江西几所三年制师专多年使用的物理实验讲义的基础上，广泛参考了本科、专科各类高等学校物理实验教材，根据教育部《二、三年制师范专科学校（普通物理实验）教学大纲》（高等教育出版社1983年4月第1版）编写而成的。它可供二、三年制的师专（大专）物理科作为物理实验教材，也可供其它各类本科、专科高等院校选用。

我们在以下几方面作了一些尝试：一、尽量照顾实用的需要，希望它可供教师、学生在实验课上直接使用，不至于有了此书还要查找不少其他资料才做得了实验，也不想让它成为面面具到的综合参考书。二、多数是按传统方式编写的实验；此外，也编写了一部分只对学生进行原则性指导的"自拟步骤"实验（在实验题目或书中有关内容的标题上注有△），以便为"设计性"实验打基础。而且也编写了一些选作实验（注有＊号）。三、每个实验之后，都有难度不同的思考题，还在每篇之后编有综合练习，既有着重物理思想的分析题，也有侧重技能的操作题，还有培养独立实验能力的设计题。这对于学生系统复习、发展智力和教师考核学习成绩，也许都会有些好处。

在教学实践中，我们深深地感到需要花大力气培养学生的数据处理和误差分析能力。按道理说，每做一次实验，应该根据不同情况选用合适的数据处理方法；尤其是，必须根据自已的实验方法、仪器精度和数据情况，定量地进行误差分析；如有必要，然后再和理论值、公认值对比，并作进一步的分析讨论。可惜，不少学生却在测量之后，立即与公认值对比，而将实测值与公认值之差作为"实验误差"，这样做，当然是错误的。本书原来希望能为纠正这种错误作出一些贡献。可惜，虽然有些实验我们十分注意这点，另一些的编写却也在"犯规""违例"。我们殷切期望，广大读者特别是各位老师能在使用本书时注意及此，并帮助我们在今后改写时得以提高。

本书的编写工作是由江西省物理学会组织领导的。编写过程中，得到了北京大学林抒同志和龚镇雄同志、东北师大杨述武同志的指导，书中还部分地引用了一些他们的著作中的成果；也得到了江西工学院程齐贤同志和江西教育学院娄溥仁同志的关心；还得到了编写人员所在单位的领导和许多老师的支持。在此表示感谢。

我们期待着各位老师同学和各方面读者的批评指正。

编　者　1984年5月

## 本书编写人员

**主　　编**　肖新民

**副 主 编**　包燊荣

**编　　写**　九江师专包燊荣（绪论、力学），

宜春师专刘静娴（热学），

江西师大丁贤盛（电磁学），

吉安师专李剑白（光学1—7），

抚州师专黄仁忠（光学8—16），

江西师大肖新民（原子物理）。

**责任编辑**　肖新民

**印　刷：**南昌市东风印刷厂承印
地址：于都街89号

# 目　　录

# 绪　论

## 一、物理实验的作用与任务

物理学是一门实验科学，在物理学发展的长河中。物理实验起着积极的、甚至决定性的作用。一部物理学史充分地证明了，整个物理学大厦正是建立在物理实验这块基石上。例如牛顿经典力学的形成是建立在加里略、开普勒、惠更斯等人的实验基础上；麦克斯韦电磁场理论的完善也是建立在库仑、奥斯特、法拉弟等人的实验基础上；本世纪初，普朗克、爱因斯坦、玻尔使物理学的面貌发生巨大的、革命性的变化，仍然是以黑体辐射、光电效应、康普顿效应等实验为基础的。所以说，物理实验既是学习、研究物理学必不可少的重要手段、又是物理学揭示宇宙奥秘，开拓未知世界的有力武器。

普通物理实验是物理实验的入门，因而被列为高等师范院校物理专业独立设置的一门重要基础课程。它的主要任务是：

1、在物理实验方面，使学生受到基础的比较系统的训练（包括基本物理的测量，基本仪器的使用，误差分析与数据处理的基本知识，实验现象的观测与判断等），培养学生具有中学物理实验教学的能力。

2、通过实验学习与理论学习的相互配合，加深、巩固、扩大对物理概念和物理定律的掌握程度。普物实验并不是为了建立新概念、发现新的定律，而是从中学习实验思想方法、技能技巧。

3、培养学生严格、细致、实事求是、一丝不苟的科学态度和爱护公物的道德品质。养成讲究科学方法、遵守操作规程、注意安全措施的良好实验习惯。

## 二、物理实验的学习方法

1、了解实验思想，弄懂原理方法，在实验中始终占主导地位。实验思想是整个实验的根本，只有理解了实验设计者的意图、懂得了原理，才能发挥自己的积极性，避免盲目性；才能不是呆板地重复实验步骤，而是灵活地学习实验技巧；才能提高实验技能、实验素养。

2、乐于观测，善于观测，有意识地在实验中培养自己的观测能力。观测能力是实验能力的一个重要表现，它的基本任务是合理地、充分地发挥仪器的功能，观察物理现象；在仪器精度范围内测准物理信息。我们要充分运用感官（包括听、视、嗅、触等）和大脑思维去判断、试探、估量物理现象是否按预期出现、设备是否正常、仪器显示的物理信息是否受到干扰……等。这样，才能捕捉需要的实验现象，提供丰富的实验素材。

3、在实验中要养成勤动脑、多动手的习惯，提高实验分析的能力，掌握排除故障的技巧。实验时，不能说测量结果达到了理论值（或标准值）就心满意足，而与理论值相差很远就感到失望。一旦测量值与理论值相差很远，应该分析实验方法是否正确，仪器设备是否符合要求，实验环境是否影响太大。找出产生误差的原因，排除一般故障。应该说，能否发现仪器装置故障与修复仪器是实验能力强弱的一种重要表现。

4、每次实验要掌握好重点和难点．实验有它自己的特点和规律、不象讲课那样条理清楚、层次分明，但它所遇到的问题确比讲课要更加复杂具体、丰富多彩．这时，我们应该先抓住一些关键性的、重要的问题首先解决、对那些零散枝节问题要滞后一步，全部问题要同时解决是不可能的．

## 三、物理实验的过程与要求

实验课一般分三个阶段完成：预习，操作，报告．这三个阶段互相联系，不可分割．

1、预习

预习应该从实验理论与实验仪器两方面进行．实验前学生应首先仔细阅读讲义和有关资料，如仪器说明书，了解实验的理论依据与测量条件，弄懂实验原理，掌握方法步骤，设计数据表格．做到心中有数，有条不紊．再是了解仪器装置的基本原理，操作规程与注意事项，看清仪表精度，量程范围．

2、操作

操作包括仪器仪表的安装调试和使用，现象观测，数据测量与列表记录．观测的所有数据、现象及实验条件都应全面而有条理地记录在预习时自己设计的表格中，不可随手乱记，更不能抛弃一些自己不满意的数据不记．

记录的内容应含有时间、地点、姓名、合作者、环境条件、仪器编号、原始数据（指从仪器上直接读出来未经任何运算的数据）、发现的问题．

3、报告

实验报告是实验的最后总结，其内容有实验课题、实验目的、原理摘要、方法步骤、仪器设备（注明编号）、实验结果、处理数据的方法、分析误差的原因、修正误差的办法、异常现象的讨论等．初学者对报告内容的后几点往往感到难以下手，以下提示几点内容，供初学者参考：

1、本次实验是否达到目的？测量结果是否满意？误差原因何在？有何修正办法？

2、本次实验所得的经验有哪些？吸取的教训是什么？是否观察到异常现象，遇到什么困难？解决得怎样？

3、对所用的仪器装置能否提出改进的设想，对教师有何要求与希望．在这方面，应有积极创新的思想．

总之，每次实验之后，都要认真作出自我评价：我究竟获得了几位有效数字？而且，更应该想到：我们总是在向更高一位有效数字的不断进军中提高自己和发展新技术的．

# 误差理论与数据处理基础知识

## 第一节　测量与误差

### 一、测量

物理实验不仅要观察各种物理现象，更重要的是找出现象之间的数量关系．为了得到有关物理量之间的数量关系，必须进行测量，测量的意义就是将待测量与一个选来作为标准的同类量进行比较，得出它们之间的倍数关系．选来作为标准的同类量称为单位，倍数称为测定值。

测量可分为两类：一类是直接测量，如用尺量长度，用表计时间，用天平称质量……等；另一类是间接测量就是由直接测量所得到的数据，依据一定的公式，经过运算，得出所需的测量结果．例如，单摆测重力加速度g先直接测量出摆长L和摆的周期T，再依据公式$g = 4\pi^2L/T^2$进行运算，求出g值．在物理量的测量中，绝大部分都是间接测量，直接测量总是有限的，但直接测量是一切测量的基础．不论是直接测量还是间接测量，都需满足一定的实验条件，按照科学的方法而且正确地使用仪器，才能得出正确的结果。因此，在实验过程中必须注意测量条件、实验环境和仪器设备所引进的误差．

### 二、误差

测量值与被测量的真值之差称为误差或真差．由于实验条件所限（指环境的稳定性、仪器的灵敏度和人眼睛的分辨率……等），人们只能测出近似值的最佳值，而不能测出真值本身。所以说，有测量就一定有误差，误差是伴随着测量又同时存在于一切测量的始终；并且在整个实验过程中，误差的数值还表示实验结果的优劣、仪器精度的高低等．因此，在做实验之前，先学习一点基础的误差理论知识．

1、误差的表示方式

（1）　绝对误差△N

某物理量的测量值N与该量的真值$N_0$之差称为绝对误差△N

$$\triangle N = N - N_0 .$$

绝对误差虽然可以反映测量值偏离真值的大小和方向，但是不能更确切地反映测量工作的精细程度．绝对误差是有单位量纲的，其数值大小与所取单位有关．

（2）相对误差

绝对误差与某一约定值之比，称为相对误差，一般用百分比来表示．约定值可以是被测量的真值，也可以是仪器的标称值（即测量值）或满刻度值，也可以是公认值．按照约定值的不同，相对误差又可分为如下几种：

a）实际相对误差E（实），是指绝对误差△N与被测量的真值$N_0$之比，即

$$E(\text{实}) = (\triangle N/N_0)\cdot 100\%$$

b）标称相对误差E（标），是指绝对误差与测得值（即标称值）之比，即

$$E(标)=(\triangle N/N)\cdot 100\%。$$

它表示了绝对误差相当于测得值的百分之几。当相对误差不大时，E（实）≐E（标），随意选用，关系不大。当相对误差较大时，就不能随意选用。E(实)与E(标)的关系可以简单证明如下：

$$E(实)-E(标)=\frac{\triangle N}{N_。}-\frac{\triangle N}{N}=\frac{N\triangle N-N_。\triangle N}{N_。N}$$

$$=\frac{\triangle N(N-N_。)}{N_。\cdot N}=\frac{\triangle N}{N_。}\cdot\frac{\triangle N}{N}=E(实)\cdot E(标).$$

c）引用相对误差E（引），是指绝对误差与测量仪器上限（N上）之比，即

$$E(引)=[\triangle N/(N_{上})]\cdot 100\%.$$

它表示了绝对误差相当于测量仪器上限的百分之几，主要用来表示电表的准确度。

相对误差是一个比值，其数据与被测量所取的单位无关，它不仅能反映误差的大小与方向，而且还能更确切地反映出测量工作的精细程度。相对误差虽然与绝对误差有一定的关系，例如，$\triangle N=E(实)\cdot N_。$，但是不能误认绝对误差大，相对误差也大.如对直径为0.5mm的毛细管测径，绝对误差为0.1mm，又对200m高的烟囱测高，绝对误差为0.2m。可以看出后者的绝对误差是前者的两千倍，然而，后着测量比前者测量要精确得多，因为后者的相对误差是前者的两百分之一。

2．误差的分类

按照误差的性质可以分为偶然误差、系统误差、粗大误差。

（1）偶然误差（随机误差）

在同一条件下重复测量同一量时，由于各种偶然因素的影响，使得测量值随机变化，这种随机变化而引进的误差称偶然误差。例如，读数上下涨落，平衡点漂移，环境温度升降，湿度和气压随机的微小变化对实验的影响等引起的误差。偶然误差虽然是随机变化的，或大或小，但是偶然误差服从一定的统计规律。可以看出，它具有以下三个特征：

a）绝对值相等的正误差与负误差出现的机会均等，称为偶然误差的对称性；

b）绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的机会多，称为偶然误差的单峰性；

c）在一定的测量条件下，偶然误差的绝对值不会超过一定界限，或者说超过这一界限的概率趋近于零，称偶然误差的有界性。

（2）系统误差

在同一条件下(指同一方法、仪器、环境、观测者)多次测量同一量时，绝对值和符号保持不变，或在条件改变时，按一定规律变化的误差称为系统误差。系统误差来源又可归结为以下几个方面：

a）仪器误差——由仪器、实验装置引进的误差。如刻度不准、零点不对、天平不等臂、放大器的非线性、照相底板的收缩等。

b）理论误差（或方法误差）—由理论公式本身的近似性，测量方法所规定的实验条件之限制而引进的误差。例如辐射热的散失、空气阻尼或浮力的影响、接线电阻与接触电阻的不计、单摆测g时由于公式$T=2\pi\sqrt{L/g}$本身的近似性等引进的误差。

c）环境误差—由外界环境的影响而产生的误差。例如室温逐渐升高、外界电磁场的干扰、光照不均匀、外界振动的影响等。

d）个人误差—由观测者本人心理和生理特点所造成的误差。例如停表计时，有人反应较慢，所以计时总是失之过长。

系统误差也具有三个特征：

a）系统误差是一个非随机变量，是固定不变的，不服从统计规律而服从确定的函数规律；

b）重复测量时，对于固定不变的系统误差具有重现性；

c）系统误差可以修正。

（3）粗大误差（过失误差）

明显歪曲了测量结果的误差称为粗大误差。观测者在观测、记录和整理数据过程中粗心大意、环境突然明显变化（突然温升、振动、电压波动等）都可能引起粗大误差；初学者由于实验技巧生疏、素养不够，容易出现粗大误差。所以，我们在实验中应尽力防止粗大误差的产生。

## 三、精度

反映测量结果与真值接近的程度的量称为精度。它与误差大小相对应，因此可用误差的大小来表示精度的高低，误差小则精度高，精度可分为

a）准确度：指测量数据的平均值偏离真值的程度，它反映了系统误差的大小；

b）精密度：指测量数据本身的离散程度，它反映了偶然误差大小；

c）精确度：指测量数据偏离真值的离散程度，它反映了系统误差和偶然误差的综合影响的大小。

对于具体的测量，精密度高的，准确度不一定高；准确度高的，精密度也不一定高；但精确度高的，精密度与准确度都一定高。如图0.1—1所示的打靶结果，子弹落在靶心周围有三种情况：

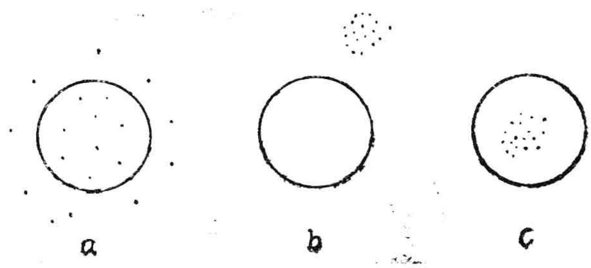

图 0.1—1

a）系统误差小而偶然误差大，即准确度高而精密度低。

b）系统误差大而偶然误差小，即准确度低而精密度高。

c）系统误差和偶然误差都小，即精确度高。我们希望的就是要得到精确度高的结果。

〔思考题〕

1. 下列测量中哪些是直接测量？哪些是间接测量？

（1）用米尺量身高；（2）用游标尺测园柱体体积；（3）用温度计测水温；（4）甲、乙两同学分别用同一台天平称铁块的质量；（5）某人分别用电表的300V档和500V档测电压；（6）在不同的环境温度下测水的密度；（7）用伏安法测电阻；（8）用冲击摆测弹丸速度；（9）用打点计时器测重力加速度。

2.*在第1题的各种情况中，哪些是等精度测量？哪些是非等精度测量？

3.什么叫误差？误差有哪几类？它们的含意各是什么？请举例说明。

4.判断下列情况属于哪类误差：

（1）温度计零点没有校准；（2）使用物理天平时忘了调水平；（3）测温时，系统温度稍有起伏；（4）记录数据有错误；（5）电表的级别；（6）在20℃下定标的标准电阻，在30℃下使用；（7）测沸水温度时将温度计拿出读数。

5.下列因素使测量结果偏大，还是偏小？

（1）用受热膨胀的钢尺进行测量；（2）用偏慢的秒表计百米跑速度；（3）用天平称物体质量时，没有考虑浮力影响；（4）在单摆实验中小球作锥摆运动。

## 第二节 直接测量值偶然误差的估计

假定在没有系统误差和粗大误差的情况下来讨论偶然误差的估计问题。为了提高测量精度，人们总是对某物理量进行多次测量，每次测量所得数值又并不是完全一样，那么，怎样表示测量结果才能最合理地代表真值呢？又怎样能如实地评价实验结果的优劣、估计测量数据的离散程度与可靠性呢？通常在测量条件不变的情况下，以多次测量的算术平均值$\overline{N}$作为测量结果，这是近似于真值的最值佳。用算术平均值的标准误差$\sigma_N$来说明偶然值的不可靠性，故一般测量结果写成$\overline{N}\pm\sigma_N$的形式。

### 一、测量列的算术平均值原理

设$N_1$、$N_2$、$N_3$、……$N_k$为K次测量所得的值，则算术平均值$\overline{N}$为

$$\overline{N}=\frac{N_1+N_2+\cdots\cdots+N_k}{K}=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}Ni \qquad (0.2-1)$$

当测量次数无限增加时，算术平均值$\overline{N}$必然趋近真值$N_o$。

因为　　$Ni=N_o+\triangle Ni$

$$\overline{N}=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}Ni=\frac{1}{K}(KN_o+\sum_{i=1}^{K}\triangle Ni)=N_o+\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\triangle Ni.$$

当$K\to\infty$时，由偶然误差的对称性，$\sum_{i\to\infty}\triangle Ni$必然趋近零，式中$\triangle Ni$表示某一次测量的真差，所以有$\overline{N}\to N_o$。

### 二、算术平均值的标准误差

在有限次测量中以算术平均值作为测量结果，但它不一定等于被测量的真值，由于偶然

误差的存在，各个测量列的算术平均值也不相同，它们围绕着被测量的真值有不同程度的离散. 为了说明这种离散程度，也就是说明算术平均值的偶然值的不可靠性，我们采用了算术平均值的标准误差作为其不可靠性的评定标准.

在讲算术平均值的标准误差之前，我们先讨论某一测量列的标准误差$\sigma$.

1、测量列的标准误差$\sigma$

测量列的标准误差$\sigma$是指各测量值误差的平方和的平均值的根之平方 .所以又称为均方差.

设测量列中K个测量值的误差为$\triangle N_1$、$\triangle N_2$、……$\triangle N_K$则标准误差$\sigma$为：

$$\sigma=\sqrt{\frac{\triangle N_1{}^2+\triangle N_2{}^2+\cdots\cdots+\triangle N_k{}^2}{K}}=\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{K}\triangle Ni^2}{K}} \qquad (0.2-2)$$

但是真值未知，各测量值的误差都无从知晓，因此，不可能按上式计算标准误差. 测量时只能得出算术平均值$\overline{N}$——接近真值. 理论分析表明，可以用测量值与算术平均值之差（即残差$v$）表示标准误差.

$$\sigma=\sqrt{\frac{(N_1-\overline{N})^2+(N_2-\overline{N})^2+\cdots\cdots(N_K-\overline{N})^2}{K-1}}=\sqrt{\frac{\sum v_i{}^2}{K-1}} \qquad (0.2-3)$$

此式称为贝塞尔（Bessel）公式.

对于单次测量的标准误差$\sigma$，虽然我们没有推出计算公式，但是应该理解$\sigma$所表示的意义.标准误差$\sigma$的数值小，说明该测量列小的误差占优势，任一单次测量值对算术平均值的离散程度就小，测量的可靠性就大. 因此，单次测量的标准误差$\sigma$可作为测量列中单次测量不可靠性的评定标准.

应该指出，标准误差$\sigma$不是一个具体的误差，$\sigma$的大小只说明，在一定条件下等精度测量列偶然误差出现的概率分布情况. 在该条件下，任何一单次测量结果的误差$\triangle N$，都不等于$\sigma$，但却认为这一系列测量都具有同样一个标准误差. 按照偶然误差的高斯理论，测量列的标准误差为$\sigma$时，则此测量列中任一测量值的误差$\triangle N$有68.3%的概率在（$-\sigma$，$+\sigma$）区间之内.

2. 算术平均值的标准误差s.

设m组测量列，每一组进行K次等精度测量，得到m个算术平均值$\overline{N\,\mathrm{I}}$、$\overline{N\,\mathrm{II}}$，……$\overline{Nm}$，相应的测量列中单次测量标准误差为$\sigma_1$、$\sigma_2$…$\sigma m$ 因为是等精度测量,各组标准误差相等,即

$$\sigma_1=\sigma_2=\cdots\cdots=\sigma m=\sigma$$

可以证明算术平均值的标准误差s比单次测量的标准误差要小$\sqrt{K}$倍，即

$$S=\sigma/\sqrt{K},$$

用残差来表示，则有

$$S=\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{K}(Ni-\overline{N})^2}{K\cdot(K-1)}} \qquad (0.2-4)$$

由此可见，算术平均值的可靠性要高于任何测量值，当K愈大、S愈小，所得的算术平均

值愈接近真值．然而，一般情况下K取到10就已满足要求．

在物理实验中，有时也用平均绝对误差去评价测量值．平均绝对误差$\overline{\triangle N}$就是各测量值误差的绝对值的平均值，即

$$\overline{\triangle N}=\frac{|N_1-N_o|+|N_2-N_o|+\cdots\cdots+|N_K-N_o|}{K}$$

$$\approx\frac{|N_1-\overline{N}|+|N_2-\overline{N}|+\cdots+|N_K-\overline{N}|}{K} \qquad (0.2—5)$$

按照高斯误差理论，测量列的平均绝对误差为$\overline{\triangle N}$时，则测量列中任一测量值的误差$\triangle Ni$有57.5%的概率在（$-\overline{\triangle N}$，$+\overline{\triangle N}$）区间之内．当测量次数很多时

$$\sigma=\frac{5}{4}\overline{\triangle N} \qquad \text{或} \qquad \overline{\triangle N}\approx\frac{4}{5}\sigma \qquad (0.2—6)$$

平均绝对误差在计算上略比标准误差方便；但是，标准误差比平均误差有效，特别在测量次数少时更加明显．所以，目前国内外的物理科学论文，大多数都采用标准误差．

**三、单次测量的误差**

在有些实验中，不容许对被测量做重复测量，例如，破坏性实验，动态中的测量等，常常是进行一次测量．我们在对单次测量的误差估计时，要根据仪器的分度值大小和测量的环境条件来具体考虑，具体分析． 一般平均绝对误差至少取仪器最小分度值的$^1/_2$，标准误差取仪器最小分度值的$^1/\sqrt{3}$．

例一、用有毫米刻度的米尺对某物长度进行单次测量，数据为573.4毫米，仅有一个测量数据，用前面所述的Bessel 公式就无法计算误差了，这时，可仍按上述办法估计：

$$\overline{\triangle N}=\frac{1}{2}\times 1\text{毫米}=0.5\text{毫米},$$

$$\sigma=\frac{1}{\sqrt{3}}\times 1\text{毫米}\approx 0.6\text{毫米},$$

〔思考题〕

1．什么是真值？为什么可用算术平均值代替真值？

2．若测得g值的算术平均值为979.3cm/s²，绝对误差有0.2cm/s²，应如何表示测量结果？

3．算术平均值的标准误差与算术平均绝对误差有什么不同？它们的物理意义如何？

4．某测量结果为4.28±0.03cm，能说明其真值一定落在(4.28—0.03)—(4.28+0.3)cm范围内吗？为什么？

5．计算下列数据的算术平均值$\overline{N}$及其标准误差S，把结果写成$\overline{N}\pm S$的形式，并计算相对误差．

（1）Ni＝15.20，15.23，15.21，15.19，15.17（cm）．　（2）Ni＝22.39，22.39，22.37，22.39，22.41，22.37，22.39（g）．

6．计算下列数据的平均值$\overline{N}$和平均绝对误差$\overline{\triangle N}$，写出测量结果$\overline{N}\pm\overline{\triangle N}$，计算相对误差$\frac{\overline{\triangle N}}{\overline{N}}$．　Ni＝1.95，1.94，2.05，1.97，2.05，1.99，1.96，2.02，1.95(N/cm²)．

**7.** 欲测某小球直径（约1 cm），若每次测量的绝对误差为0.005cm，问要使测量结果的算术平均值的标准误差小于0.1%应如何安排测量次数？

## 第三节　间接测量结果　偶然误差的估计

计算间接测量结果时，是将各直接测量的最佳值（而不是真值）代入测量公式求出的。所以求出的间接测量结果必然具有误差，其误差取决于各直接测量值的误差，以及测量公式的具体形式．间接测量结果的误差是直接测量误差的传递（或合成）．误差传递公式有两种：

### 一、间接测量误差的算术合成（传递）公式

设间接测量函数的一般形式为

$$N=f(x_1、x_2、\cdots\cdots xn)=f(xi)\qquad (i=1、2、\cdots n)\quad(0.3-1)$$

xi为各直接测量值的算术平均值，△xi为各直接测量值的平均绝对误差，$N$、△N为间接测量结果及其平均绝对误差．

当△xi不大时，可按泰勒级数公式展开（0.3—1）式为

$$N+\triangle N=f+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial xi}\triangle xi+\frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial xi^2}\triangle xi^2+\cdots+\frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^n f}{\partial xi^n}\triangle xi^n\quad(0.3-2)$$

由于△xi为误差项，一般都是较小的值，所以（0.3—2）式可取一级近似(略去二次以上的项）得

$$\triangle N=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial xi}\cdot\triangle xi=\frac{\partial f}{\partial x_1}\triangle x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\triangle x_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\triangle x_n\quad(0.3-3)$$

实际上（0.3—3）式也可以用对（0.3—1）式求全微分的方法求得：

$$dN=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot dx_n\qquad(0.3-4)$$

通常误差远小于测量值，把dN、$dx_1$、$dx_2$，…看成误差，（0.3—4）式就是间接测量的传递公式了。

有时也把（0.3—1）式先取对数后再求全微分，

即　　$\ln N=\ln f(x_1、x_2、\cdots、xn)$

$$\frac{dN}{N}=\frac{\partial \ln f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial \ln f}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial \ln f}{\partial x_n}dx_n\qquad(0.3-5)$$

将$dN_1$、$dx_1$、$dx_2$…dxn看成误差，则（0.3—5）式可改写成

$$\frac{\triangle N}{N}=\frac{\partial \ln f}{\partial x_1}\triangle x_1+\frac{\partial \ln f}{\partial x_2}\triangle x_2+\cdots+\frac{\partial \ln f}{\partial x_n}\cdot\triangle x_n\qquad(0.3-6)$$

由（0.3—3）式、（0.3—6）式，任意函数的误差传递公式都可以推出．下表中是常见的几种初等函数误差的算术合成（传递）公式：

常用函数误差传递（算术合成）公式表（一）

| 函数关系式 | 误差传递（算术合成）公式 | |
|---|---|---|
| | 绝对误差 | 相对误差 |
| $N=x_1 \pm x_2$ | $\triangle N=\triangle x_1+\triangle x_2$ | $\frac{\triangle N}{N}=\frac{\triangle x_1+\triangle x_2}{x_1 \pm x_2}$ |
| $N=x_1 \cdot x_2$ | $\triangle N=(\triangle x_1 \cdot x_2+\triangle x_2 \cdot x_1)$ | $\frac{\triangle N}{N}=\frac{\triangle x_1}{x_1}+\frac{\triangle x_2}{x_2}$ |
| $N=x_1/x_2$ | $\triangle N=\frac{\triangle x_1 \cdot x_2+\triangle x_2 \cdot x_1}{x_2^{\,2}}$ | $\frac{\triangle N}{N}=\frac{\triangle x_1}{x_1}+\frac{\triangle x_2}{x_2}$ |
| $N=A \cdot x^n$ | $\triangle N=A \cdot n x^{n-1} \cdot \triangle x$ | $\frac{\triangle N}{N}=n \cdot \frac{\triangle x}{x}$ |
| $N=\sqrt[n]{x}$ | $\triangle N=\frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} \cdot \triangle x$ | $\frac{\triangle N}{N}=\frac{1}{n} \cdot \frac{\triangle x}{x}$ |
| $N=\sin x$ | $\triangle N=\cos x \cdot \triangle x$ | $\frac{\triangle N}{N}=\mathrm{ctg} x \cdot \triangle x$ |
| $N=\cos x$ | $\triangle N=\sin x \cdot \triangle x$ | $\frac{\triangle N}{N}=\mathrm{tg} x \cdot \triangle x$ |
| $N=\mathrm{tg} x$ | $\triangle N=\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \triangle x$ | $\frac{\triangle N}{N} \doteq \frac{2\triangle x}{\sin 2x}$ |
| $N=\mathrm{ctg}$ | $\triangle N=\frac{1}{\sin^2 x} \cdot \triangle x$ | $\triangle N=\frac{2\triangle x}{\sin 2x}$ |

例一、用单摆测重力加速度g，测得周期T为$1.997 \pm 0.005$秒，摆长$L$为$99.84 \pm 0.05$厘米，计算测量结果g值为多少？

解 $\bar{g}=4\pi^2 \bar{L}/(\bar{T}^2)=4\pi^2 \cdot \frac{0.9984\,\mathrm{m}}{1.997\,\mathrm{s}^2}=9.883\,\mathrm{m/s^2}$

$$E标=\frac{\triangle g}{g}=\frac{\triangle L}{L}+2\frac{\triangle L}{T}=\frac{0.05}{99.84}+2 \cdot \frac{0.005}{1.997}=\frac{0.5}{1000}+\frac{2.5}{1000}=\frac{3}{1000}=0.3\%$$

$\triangle g=E标 \cdot g=0.03\,\mathrm{m/s^2}$　　$\therefore g=\bar{g} \pm \triangle g=9.88 \pm 0.03\,\mathrm{m/s^2}$

例二、在气垫实验中测匀加速运动的a值，已知 $a=\frac{d^2}{2S} \cdot \left(\frac{1}{t_2^{\,2}}-\frac{1}{t_1^{\,2}}\right)$ ·求$\triangle a/a$为多少？

解：
$$\frac{\triangle a}{a}=2\frac{\triangle d}{d}+\frac{\triangle S}{S}+\frac{\triangle\left(\frac{1}{t_2^{\,2}}-\frac{1}{t_1^{\,2}}\right)}{1/t_2^{\,2}-1/t_1^{\,2}}$$

$$=2\frac{\triangle d}{d}+\frac{\triangle S}{S}+\left(\triangle\frac{1}{t_2^{\,2}}+\triangle\frac{1}{t_1^{\,2}}\right)\Big/\left(\frac{1}{t_2^{\,2}}-\frac{1}{t_1^{\,2}}\right)$$

$$=2\frac{\triangle d}{d}+\frac{\triangle S}{S}+\left(2\frac{\triangle t_2}{t_2^{\,3}}+2\frac{\triangle t_1}{t_1^{\,3}}\right) \cdot \frac{t_1^{\,2} \cdot t_1^{\,2}}{t_1^{\,2}-t_2^{\,2}}\ .$$

在计算偶然误差时，我们无法判断各分误差的实际符号，从最不利的情形考虑，将各分误差的绝对值直接相加，以最大误差来表示间接测量合成后的总误差。所以，这样估计的误差总是要偏大一点，在不必区分系统误差和偶然误差，或作粗略的误差估计时，可用这种算术合成（传递）公式进行计算。如果采用各误差取平方的形式，用标准误差表示偶然误差的话，就可以不受其符号的影响。故此，提出第二种误差传递公式。

**二、间接测量的标准误差传递公式**

对几个量直接测量K次，讨论间接测量的标准误差。根据误差传递基本公式（0.3—3）式，可写出每直接测量一次测量列所得到的误差方程式，直接测量K次，可以写出K个方程如下：

$$\triangle N_1=\frac{\partial f}{\partial x_1}\triangle x_{11}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\triangle x_{21}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\triangle x_{n1}$$

$$\triangle N_2=\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\triangle x_{12}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\triangle x_{22}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\triangle x_{n2}$$

…………

$$\triangle N_k=\frac{\partial f}{\partial x_1}\triangle x_{1k}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\triangle x_{2k}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\triangle x_{nk}$$

将以上各方程两边平方，用一般方程式表示为：

$$\triangle N_k^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\cdot\triangle x_{1k}^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\cdot\triangle x_{2k}^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2\cdot\triangle x_{nk}^2$$

$$+2\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_2}\triangle x_{1k}\cdot\triangle x_{2k}+\cdots\cdots$$

再将平方后各等式相加，并除以K，可得

$$\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\triangle N_i^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\frac{\sum\limits_{i=1}^{K}\triangle x_{1i}^2}{K}+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\frac{\sum\limits_{i=1}^{K}\triangle x_{2i}^2}{K}+\cdots$$

$$+\left(\frac{\partial f}{2x_n}\right)^2\frac{\sum\limits_{i=1}^{K}\triangle x_{ni}^2}{K}+\cdots \qquad (0.3\text{—}7)$$

上式中最后一部分包括有$\Sigma\triangle x_1i\cdot\triangle x_2i$，因为偶然误差具有对称性，有正有负，在求总和时，非平方项总要消去一部分，当K逐渐增加时，非平方项总和就趋于零，所以可略去这些非平方项。在等式中没有写出。按照标准误差的定义，令

$$\sigma_1^2=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\triangle x_{1i}^2$$

$$\sigma_2^2=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\triangle x_{2i}^2$$

…………

$$\sigma_n^2=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\Delta x_{ni}^2$$

$$\sigma_N^2=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}Ni^2$$

$\sigma_1$、$\sigma_2$、$\cdots\sigma n$分别为各个直接测量量的标准误差。所以（0.3—7）式可写成

$$\sigma_N^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\sigma_1^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\sigma_2^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2\sigma_n^2$$

$$\therefore\quad \sigma_N=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\sigma_1^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\sigma_2^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2\sigma_n^2}\qquad (0.3-8)$$

实际上计算间接测量值$\bar{N}$时，各直接测量值$x_1$、$x_2\cdots xn$都取算术平均值。因此，我们上式中的标准误差应取算术平均值的标准误差。

即

$$S=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2S_1^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\cdot S_2^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2S_n^2}\qquad (0.3-9)$$

相对误差为

$$E(标)=\frac{S}{f}=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\cdot\left(\frac{S_1}{f}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\cdot\left(\frac{S_2}{f}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2\left(\frac{S_n}{f}\right)^2}\qquad (0.3-10)$$

由（0.3—8）式可推出常用函数的标准误差传递公式

常用函数的偶然误差传递公式（标准误差的合成）表（二）

| 函　数　表　达　式 | 标准误差传递（合成）公式 |
|---|---|
| $N=x_1\pm x_2$ | $\sigma_N=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$ |
| $N=x_1\cdot x_2$ | $\frac{\sigma_N}{N}=\sqrt{\left(\frac{\sigma_1}{x_1}\right)^2+\left(\frac{\sigma_2}{x_2}\right)^2}$ |
| $N=x_1/x_2$ | $\frac{\sigma_N}{N}=\sqrt{\left(\frac{\sigma_1}{x_1}\right)^2+\left(\frac{\sigma_2}{x_2}\right)^2}$ |
| $N=x_1^k\cdot x_2^m/x_3^n$ | $\frac{\sigma_N}{N}=\sqrt{K^2\left(\frac{\sigma_1}{x_1}\right)^2+m^2\left(\frac{\sigma_2}{x_2}\right)^2+n^2\left(\frac{\sigma_3}{x_3}\right)^2}$ |
| $N=Kx$ | $\sigma_N=K\sigma x$，$\frac{\sigma_N}{N}=\frac{\sigma_x}{x}$， |
| $N=\sqrt[K]{x}$ | $\frac{\sigma_N}{N}=\frac{1}{K}\cdot\frac{\sigma_x}{x}$ |
| $N=\sin x$ | $\sigma_N=\lvert\cos x\rvert\cdot\sigma_x$ |
| $N=\ln x$ | $\sigma_N=\frac{\sigma_x}{x}$ |

例三、测量某一金属园柱体的密度。测得园柱体的直径d为$5.645\pm0.003$mm，高度h为$6.715\pm0.005$cm，质量m为$14.06\pm0.01$g。求密度$\rho\pm\sigma_\rho=?$