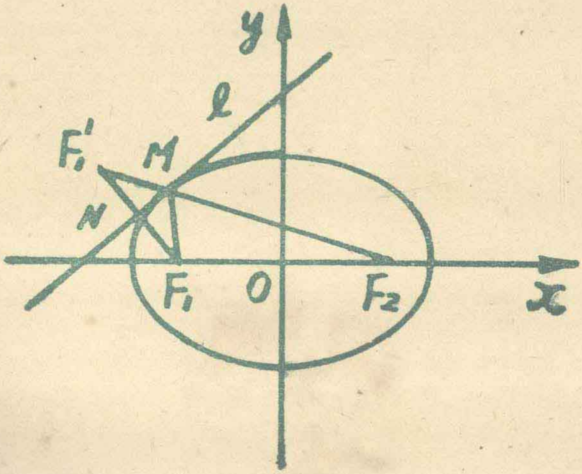
·新时代文库·

平面解析几何应考指要

李振瑛 编著



大连出版社

平面解析几何应考指要

李振瑛　编著

大　连　出　版　社

新 时 代 文 库

平面解析几何应考指要

李振瑛 编著

大连出版社出版 新华书店首都发行所发行

（大连市昆明街36号） 86073部队印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：8 字数：170千字

1989年3月第1版 1989年3月第1次印刷

印数：1—10000册

责任编辑：洪 伟 特约编辑：施 雪

封面设计：刘长泉 责任校对：陈玉福

ISBN 7—80555—074—3/G·27

定价：2.60元

说　明

本书系《新时代文库》书目之一，由李振瑛编著。

在内容的选择上，有的是为了帮助读者巩固解析几何基础知识，以便在解题中灵活运用；有的是为使读者掌握一些解题方法、规律与技巧，并培养创造型思维能力；有的是为了使读者对数与形的辩证结合加深认识；有的是为使读者了解解析几何内部的纵向联系，以及解析几何与代数、三角、微积分、物理间的横向联系。

全书共十一部分，把平面解析几何课本中的重点内容和建国（特别是80年）以来高考、数学竞赛中平面解析几何题中的重要内容，以及它们二者之间联系的重要部分指示出来。书中还做了一题多解及一法解多题的示范。

书中各部分内容都独立成章，又相互联系，互相补充。在阅读时请注意：凡书中指出“见本书P××例×”时，请不要一扫而过，而要真正前后翻阅这些内容，以加深对书中内容的全面、系统理解。本书第一部分：“用‘三（或四）点共线法’解八年十三道高考或竞赛题”，集中了本书的主要方法与技巧，是全书的一个缩影。

本书内容深入浅出，与课本联系密切，便于自学；也可供在校高中文、理科（含高中二年级）学生阅读，以丰富其解题技巧与方法，加快解题速度，提高创造型思维能力，增强高考或参加数学竞赛能力；还可供中学数学教师参考。

一九八八年八月

目　录

一、用“三（或四）点共线法”解八年十三道高考或竞赛题[1]

现行高中平面解析几何课本（以下简称课本）第一章中有四处（课本甲P13，4，P17，4，P35，9，P56、3；乙P13，4，P17，4，P27，9，P46，3）给出了关于三点共线的习题。这些题解法很简单，不妨取其中一个试试：

引例 1 （课本甲P56，P乙46，3）用两种方法证明：三点A（－2，12）、B（1，3）、C（4，－6）在同一条直线上。

证法一 距离法

∵ 可求 $|AB|=\sqrt{(1+2)^2+(3-12)^2}=3\sqrt{10}$，$|BC|=\cdots\cdots=3\sqrt{10}$，$|AC|=\cdots\cdots=6\sqrt{10}$，

∴ $|AB|+|BC|=|AC|$，∴ A、B、C三点共线。

证法二 斜率法

∵ 可求 $K_{AB}=(3-12)/[1-(-2)]=-3$，$K_{AC}=(-6-12)/[4-(-2)]=-3$ ∴ $K_{AB}=K_{AC}$，

∴ A、B、C三点共线。

其实，解法不止上述两种。例如：

***证法三 行列式法**

---

[1]曾以“用点共线法解一类解析几何题”为题，在浙大数学系的“教学与研究——中学数学”1986年2期上压缩登出，又曾在辽宁省高师数学教育研究会及辽宁省师专数学中心教研组1988年年会上评为优秀论文；还曾在沈阳科技报第218期（82年9月4日）登出例11。

$$\because \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 12 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0, \therefore A、B、C$$

三点共线。

除此之外，还有直线法、点线距离法、定比分点法、直线参数方程法、极坐标法、复数法、重合法、反证法等多种方法。这里不再具体列出。

本例是给出三点坐标，求证它们共线。其实，更有用的是本例逆命题：如果三（或四）点共线，则用共线的种种表达式来解决解析几何的一些问题，将是非常方便的。为此，我们首先研究一些三（或四）点共线的表达式。

（一）在直角坐标系中，若三（或四）点$P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$、$P_3(x_3, y_3)$〔$P_4(x_4, y_4)$〕共在无斜率（垂直x轴）直线上，则必有$x_1=x_2=x_3$〔$=x_4$〕；若共在斜率为K的直线上，则必有$K=K_{P_1P_2}=K_{P_2P_3}$〔$=K_{P_4P_1}$〕……，即有：$K=(y_1-y_2)/(x_1-x_2)=(y_2-y_3)/(x_2-x_3)$〔$=(y_1-y_4)/(x_1-x_4)$〕……，此为**斜率表达式**。还有**距离表达式**：$|P_1P_3|=|P_1P_2|+|P_2P_3|$；在直线参数方程中，距离表达式可写作：$|P_1P_3|=|t_1-t_3|$，其中直线$P_1P_3$ $\begin{cases} x=x_2+t\cos\alpha \\ y=y_2+t\sin\alpha \end{cases}$（t为参数，倾角α为常数，$0\leqslant\alpha<\pi$）过点$P_2(x_2, y_2)$；$P_1$对应于参数$t_1$，$P_3$对应于参数$t_3$。三点共线**行列式表达式*** 为：$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$

* 凡画星号者为选学内容，可供课外小组活动用。

（二）在极坐标系中，若三点$A(\rho_1, \theta_1)$、$F(0, \theta)$（极点）、$B(\rho_2, \theta_2)$共线，则有$|AB| = \rho_1 + \rho_2$〔或$|AB| = |\rho_1 - \rho_2|$〕且$\theta_2 = \theta_1 + \pi$（或$\theta_1 = \theta_2$），

（三）共线极坐标更一般表达式、复平面点共线的幅角表达式或向量表达式，本文略去。

我们知道，平面解析几何主要研究直线和圆锥曲线的方程及其性质，而把直线和圆锥曲线放在一起研究，特别是研究它们相交的情形，不但是课本要求的重点，更是高考的重点，而且在实际中应用也很广泛。然而，解决这一重点问题的关键，是要抓住直线和圆锥曲线的二交点、交弦的中点（或定比分点）、圆锥曲线的特征点（中心、焦点、顶点…）、弦上动点或圆锥曲线上动点等点中的三（或四）点共线的某一种形式的表达式，抓住了这一条，解析几何的不少问题就都迎刃而解了。

本部分正是用这个"三（或四）点共线法"一个方法，把课本中几个习题和近**八年**来**十三**道高考或数学竞赛中解析几何题，有机地联系起来，并各自用了比当年原"答案"都简单和优异的方法、技巧，解决了各题。具体异优于原"答案"的方法与技巧，用立若干个小标题的方法，予以概括。原"答案"大都略去，请自行对照。

为了熟悉解析几何的主要方法与技巧，先给出课本中一个习题的五种解法。

引例2　（课本甲P111，乙P99，8）过抛物线$y^2 = 2px$的焦点的一条直线，和这抛物线相交，二交点的纵坐标分别为y_1、y_2，求证：$y_1y_2 = -p^2$

证法一　消去一次项变数、韦达定理法

令过焦点F(p/2, 0)的弦为$x=p/2$或$y=K(x-p/2)$（$K\neq 0$），代入$y^2=2px$得$y^2-p^2=0$…①、或消去**一次项变数**x〔将$kx=y+px/2$代入$ky^2=2p(kx)=2p(y+pk/2)$〕得$ky^2-2py-kp^2=0$…②，

对①或②用韦达定理即得y的二根之积$y_1y_2=-p^2$

说明 本题是要证明$y_1y_2=-p^2$，故要由

$$\begin{cases} y^2=2px \\ y=k(x-p/2) \end{cases}$$

消去一次项变数x；其实，对抛物线问题，总是消去一次项变数的计算量要小；还有，标准抛物线方程中，一次项变数定对称轴，其系数符号定开口方向。所以，研究抛物线问题，总是对一次项感兴趣。

证法二 两个参数（一次项变数）、三点共线法

令$P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$、$F(P/2, 0)$、由这三点共线，有：$x_1=p/2=x_2$…①，或$(y_1-y_2)/(x_1-x_2)=y_1/[x_1-(p/2)]$…②，将$\begin{cases} x_1=y_1{}^2/2p \\ x_2=y_2{}^2/2p \end{cases}$代入①或②消去参数（一次项变数）$x_1$、$x_2$得：$y_1y_2=-p^2$。

证法三 两个参数（一次项变数）、圆锥曲线定义法

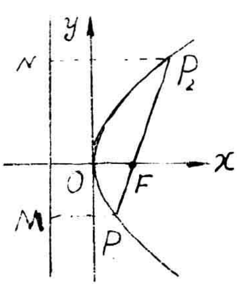


图 1—1

如图1—1，由抛物线定义有：$|P_1M|=|P_1F|$，$|P_2N|=|P_2F|$，于是由P_1、F、P_2三点共线有：

$|P_1P_2|^2=(|P_1F|+|P_2F|)^2=(|P_1M|+|P_2N|)^2=[(x_1+p/2)+(x_2+p/2)]^2=(x_1+x_2+p)^2$ 又$|P_1P_2|^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$

$\therefore (y_1-y_2)^2=(x_1+x_2+p)^2-(x_1-x_2)^2$

以$\begin{cases} y_1{}^2=2px_1 \\ y_2{}^2=2px_2 \end{cases}$代入上式，化简即得：$y_1y_2=-p^2$

说明 用各种圆锥曲线的定义解决一些轨迹及其他问题，将是非常方便的。这从本例证法三还看不出。本部分后面的例2证法二及例7、例8可见其优越性。再后面，本书之三，将专门研究用定义法解题问题。

证法四 圆锥曲线极坐标方程法

取焦点F为极点，对称轴及开口方向为极轴，则抛物线方程可取为$\rho=p/(1-\cos\theta)$.

由$P_1(\rho_1,\ \theta_1)$，$F(0,\ \theta)$、$P_2(\rho_2,\ \theta_2)$三点共线有：$\theta_2=\theta_1+\pi$，$\therefore\ \rho_1=p/(1-\cos\theta_1)$，$\rho_2=p/(1-\cos\theta_2=p/[1-\cos(\theta_1+\pi)=p/(1+\cos\theta_1)$

$\therefore\ y_1y_2=(\rho_1\sin\theta_1)\cdot[\rho_2\sin(\theta_1+\pi)]=p/(1-\cos\theta_1)\cdot\sin\theta_1\cdot p/(1+\cos\theta_1)\cdot(-\sin\theta_1)=-p^2$

说明 解决绕某点旋转的两条（或几条）直线的问题〔含过这点的弦的问题〕、有线段乘积的式子〔含倒数式子〕的问题，取圆锥曲线的极坐标方程，比较简单。特别，象本例，焦点弦可视为绕焦点的二直线（差π），就取焦点为极点更方便。

证法五 弦直线参数方程法

令弦——直线参数方程为：$\begin{cases} x=p/2+t\cos\alpha \\ y=t\sin\alpha \end{cases}$（t参数、$\alpha$常数，$0\leqslant\alpha<\pi$）

对本题有$\alpha\neq0$，代入$y^2=2px$，整理得

$\sin^2\alpha\cdot t^2-2p\cos\alpha\cdot t-p^2=0$

由参数t的几何意义可知，t的二根$t_1=FP_2>0$，$t_2=FP_1<0$〔见图1—1，P_1在F下方，P_2在F上方〕，故由韦达定理得$t_1t_2=-p^2/\sin^2\alpha$.

于是P_1、P_2的纵坐标之积$y_1\cdot y_2=t_1\sin\alpha\cdot t_2\sin\alpha=-p^2$.

说明 对解决含距离的和、差、积、商的问题、含弦的问题，取直线参数方程比较方便。另外，请注意证法四与五中，负号得出的异同。

下面开始用一法解八年十三道高考或竞赛题，用七个小标题概括解题方法与技巧。

§1—1 四点共线及消去一次项变数法

例1 （1987年理科正题第七题，12分）过点M(−1，0)的直线l_1与抛物线$y^2=4x$交于两点P_1，P_2，记线段P_1P_2的中点为P，过P点和这个抛物线焦点F的直线为l_2；l_1的斜率为k，试把l_2的斜率与l_1的斜率之比表示为k的函数，并指出这个函数的定义域、单调区间，同时说明在每个单调区间上，它是增函数还是减函数？

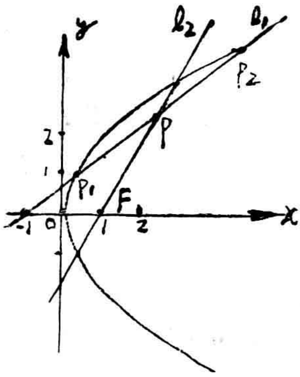


图 1—2

解 令l_1：$y=k(x+1)$…①，由$k\neq0$（否则，$k=0$，则l_1为抛物线的对称轴，与抛物线只能交一点）得$x=y/k-$

1，代入$y^2=4x$，消去**一次项变数**x得：$y^2=4(y/k-1)$，即$y^2-(4/k)y+4=0$…②（这比原“答案”消**二次项变数**y：将$y=k(x+1)$代入$y^2=4x$……计算量小）。

于是，l_1与抛物线有二交点的充要条件是：

$\triangle=(4/k)^2-4\cdot4>0$，解得$K\in(-1,0)\cup(0,1)$…③

令$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，中点$P(x,y)$，由P_1、P_2、P、M四点共线有：$(y_1-y_2)/(x_1-x_2)=k=y/(x+1)$…④，

且有$y_1+y_2=2y$…⑤

由于y_1，y_2为方程②的二根，故据韦达定理有$4/k=y_1+y_2=2y$，∴ $y=2/k$…⑥

⑥代入④解得 $x=(2-k^2)/k^2$…⑦

易求焦点F（1，0），令k_2为l_2的斜率，则有$k_2=y/(x-1)$，于是记$f(k)=k_2/k=[y/(x-1)]/k$，代入⑥⑦整理得：$f(k)=1/(1-k^2)$为所求函数，③为其定义域。显然，f（k）在（－1，0）内递减，在（0，1）内递增。

另一解法——中点轨迹求法，见例P13说明之后。

§1—2 三（或四）点共线及基本量法

引例3 （甲P194，25）直线$y=x+b$与抛物线$y=x^2-3x+5$交于两点，求这两点中点轨迹方程。

解 令二交点为$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，中点$p(x,y)$，则有

$$\begin{cases} y_1 = x_1^2 - 3x_1 + 5 \cdots ① \\ y_2 = x_2^2 - 3x_2 + 5 \cdots ② \\ 2x = x_1 + x_2 \cdots\cdots\cdots ③ \\ 2y = y_1 + y_2 \cdots\cdots\cdots ④ \end{cases}$$

∵ A、B、P三点共在直线$y = x + b$上，

∴ $(y_1 - y_2)/(x_1 - x_2) = k = 1$ ……⑤

①－②且因式分解得$y_1 - y_2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) - 3(x_1 - x_2)$，变形后再将③④⑤代入有：

$1 = (y_1 - y_2)/(x_1 - x_2) = (x_1 + x_2) - 3 = 2x - 3$

∴ $x = 2$（$y > 3$）即为所求轨迹方程。

说明 （i）所求轨迹为半直线$x = 2$（$y > 3$），称为**平行弦中点轨迹——圆锥曲线的直径**。这里是其中一种：**抛物线直径**。同样可求**椭圆（含圆）直径**和**双曲线直径**，见后例。

（ii）引例3中，由于弦的方向确定（斜率固定，是1），为使弦固定，只需再设一个量（如弦在纵轴上的截距）即可。这个独立取值的量，称为**基本量**。用基本量法求轨迹问题的一般规律是：

（变量个数）－（基本量个数）＝（列方程个数）＝（参数个数）＋（基本量个数）

对引例3有：变量6个（x_1、y_1、x_2、y_2、x、y），基本量1个，参数4个（x_1、y_1、x_2、y_2），故必须且只需列出①至⑤ 5个方程。

本部分乃至本书后面举的求轨迹的各例子〔例4、5、6、7（解法七、八）及9、10都将遵循上述基本量法求轨迹问题的规律，且大多数都是一个基本量。

（iii）本引例3用基本量法列出五个方程后，具体消去

四个参数的方法可概括为**对称式相减（加）、因式分解、斜率消参法**，下面的例 2 至 7 都这样消参。其他法消参，遇到再具体说明。

例 2（1987年广东数学标准化考试二试四题，15分）直线l过抛物线$y^2=2px$（$p\neq 0$）的焦点，且与抛物线交于$P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$两点。

（1） 求证：$4x_1x_2=p^2$；

（2）求证：对这抛物线的任何给定的一条弦 CD，直线l不是CD的垂直平分线。

证明 不妨令$p>0$，焦点$F(p/2, 0)$，l为$x=p/2$或$y=k(x-p/2)$，其中$k\neq 0$（否则，l为x轴，与$y^2=2px$只交一点，与题设矛盾）。

（1）当l为$x=p/2$时，由于P_1、F、P_2三点共线，有$x_1=p/2=x_2$，∴ $4x_1x_2=4\cdot p/2\cdot p/2=p^2$；当$l$为$y=k(x-p/2)$时，代入$y^2=2px$（此处是**消去二次项变数**$y$，，因为题目要证$4x_1x_2=p^2$，故要留$x$，消去$y$）整理得

$$k^2x^2-(k^2+2)x+k^2p^2/4=0$$

故由韦达定理有 $4x_1x_2=4\cdot k^2p^2/4k^2=p^2$。

说明 此题第（1）问与〔引例 2〕何其相似乃尔！

（2）反证法（这是不同于原“答案”的）

证法一 假定l是抛物线某弦CD的垂直平分线，令$C(x_3, y_3)$、$D(x_4, y_4)$

（A）若l为$x=p/2$（$\perp x$轴），由于$CD\perp l$，∴$CD\perp y$轴，故CD与抛物线只有一个交点，与CD是弦矛盾；

（B）若l为$y=k(x-p/2)$，$k\neq 0$（同上），令CD中点为$P_0(x_0, y_0)$，它在l上，有以下几个式子存在：

$$\begin{cases} y_3{}^2 = 2px_3 & \cdots\cdots\cdots ① \\ y_4{}^2 = 2px_4 & \cdots\cdots\cdots ② \\ 2x_0 = x_3 + x_4 & \cdots\cdots\cdots ③ \\ 2y_0 = y_3 + y_4 & \cdots\cdots\cdots ④ \\ y_0 = k(x_0 - p/2) & \cdots ⑤ \end{cases}$$

∵ C、P_0、D共线在垂直l的直线上，

∴ $(y_3 - y_4)/(x_3 - x_4) = -1/k \cdots ⑥$

用**对称式相减、因式分解、斜率法**可解得斜率为$-1/k$的平行弦中点轨迹——抛物线直径的方程为$y_0 = -pk$（半直线）它和l的交点为P_0——垂足和中点。

解方程组 $\begin{cases} y_0 = -pk \\ y_0 = k(x_0 - p/2) \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x_0 = -p/2 < 0 \\ y_0 = -pk. \end{cases}$

这说明$P_0(x_0, y_0)$在y轴左边（即抛物线准线$x = -p/2$上），与P_0为弦CD中点，应在y轴右边矛盾。

由（A）、（B）知假定不对。原结论得证。

证法二 圆锥曲线定义法（见后面§1—3之例7之后P23再解**例2**）

例3（1986年广东数学标准化考试二试第四题10分）已知：椭圆C的直角坐标方程为$x^2/4 + y^2/3 = 1$，试确定m的取值范围，使得对于直线$y = 4x + m$，在椭圆上存在两点关于该直线对称。

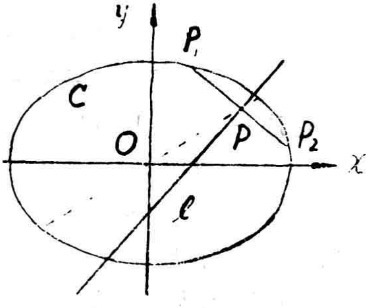


图 1—3

解 令椭圆上关于直

线l：$y=4x+m$对称的两点为$P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$，其中点为$P(x, y)$，则有下列各式：

$$\begin{cases} x_1{}^2/4+y_1{}^2/3=1 \cdots\cdots ① \\ x_2{}^2/4+y_2{}^2/3=1 \cdots\cdots ② \\ 2x=x_1+x_2 \qquad \cdots\cdots ③ \\ 2y=y_1+y_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④ \\ y=4x+m \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$

∵　P_1、P、P_2共在垂直l的直线上，

∴　$(y_1-y_2)/(x_1-x_2)=-1/4 \cdots\cdots ⑥$

用**对称式相减，因式分解、斜率法**得斜率为$-1/4$的平行弦中点轨迹——**椭圆直径**方程为$y=3x$.

解$\begin{cases} y=3x \\ y=4x+m \end{cases}$　得$\begin{cases} x=-m \\ y=-3m \end{cases}$即　$P(-m, -3m)$——垂足、中点。由题意，它应在椭圆内部

∴　$(-m)^2/4+(-3m)^2/3<1$

解得　$-2\sqrt{13}/13<m<2\sqrt{13}/13$即为所求m的范围。

练习题1（长春市1987年高考予考题）求实数m（$m\neq 0$）的范围，使曲线$y=x^2$的所有弦都不能被直线$y=m(x-3/4)$垂直平分。

解法一　若能被垂直平分，则弦的斜率为$-1/m$，仿例3、例2可求得斜率为$-1/m$的平行弦中点轨迹——抛物线直径方程为$x=-1/2m$（半直线）

解$\begin{cases} x=-1/2m \\ y=m(x-3/4) \end{cases}$　得$\begin{cases} x=-1/2m \\ y=-1/2-3m/4 \end{cases}$　即垂足、中点为$P_0(-1/2m, -1/2-3m/4)$。

据题意：不能垂直平分，故P_0应不在抛物线**内（上方）**，

而在**上**及**下方**，

故有$y_0 \leqslant x_0^2$，即$-1/2-3m/4 \leqslant 1/4m^2$，

可化为$[(m+1)(3m^2-m+1)]/4m_2 \geqslant 0$，$(m+1)/m^2 \geqslant 0$

解得$m \in [-1, 0) \cup (0, +\infty)$（答）

解法二 令与$y=m(x-3/4)$垂直平分的弦为l：$y=(-1/m)x+b$，代入$y=x^2$消去y得：

$mx^2+x-mb=0$……③

当$\triangle>0$即$1+4m^2b>0$……④时，③有二根x_1，x^2，此时，l与$y=x^2$交弦中点为$P_0(x_0, y_0)$，有：

$$\begin{cases} x_0=(x_1+x_2)/2=-1/2m \\ y_0=1/2m^2+b \end{cases}$$

又$P_0(x_0, y_0)$满足$y_0=m(x_0-3/4)$

即$1/2m^2+b=m(-1/2m-3/4)$解得$b=-1/2-3m/4-1/2m^2$

代入④ $1+4m^2(-1/2-3m/4-1/2m^2)>0$

这就是**能**垂直平分的条件。

由题意，**不能**垂直平分，故应有：

$1+4m^2(-1/2-3m/4-1/2m^2) \leqslant 0$

同样可解得$m \in [-1, 0) \cup (0, +\infty)$（答）

解法三 令抛物线的弦AB被直线$y=m(x-3/4)$垂直平分，其中$A(a, a^2)$、$B(b, b^2)$，则有AB中点P_0在直线上，且$K_{AB}=-1/m$ 故有

$$\begin{cases} (a^2+b^2)/2=m[(a+b)/2-3/4] \\ (a^2-b^2)/(a-b)=-1/m \end{cases}$$