国家自然科学基金研究专著
（2008年国家自然科学基金，编号：70871122）
（2011年国家自然科学基金，编号：71171203）

经济博弈论前沿专题

Frontier of Economic Game Theory

洪开荣 孙 倩 编著

经济科学出版社
Economic Science Press

国家自然科学基金研究专著
（2008年国家自然科学基金，编号：70871122）
（2011年国家自然科学基金，编号：71171203）

经济博弈论前沿专题

洪开荣　孙　倩　编著

经济科学出版社

图书在版编目（CIP）数据

经济博弈论前沿专题/洪开荣，孙倩编著．—北京：
经济科学出版社，2012.12
ISBN 978-7-5141-2815-4

Ⅰ.①经…　Ⅱ.①洪…②孙…　Ⅲ.①博弈论-应用-
经济-研究　Ⅳ.①F224.32

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 312707 号

责任编辑：漆　熠　侯晓霞
责任校对：刘　昕
责任印制：李　鹏

经济博弈论前沿专题
洪开荣　孙　倩　编著
经济科学出版社出版、发行　新华书店经销
社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号　邮编：100142
总编部电话：88191217　发行部电话：88191537
网址：www.esp.com.cn
电子邮件：esp@esp.com.cn
北京市季蜂印刷有限公司印装
787×1092　16 开　15 印张　320000 字
2012 年 12 月第 1 版　2012 年 12 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5141-2815-4　定价：32.00 元
（图书出现印装问题，本社负责调换。电话：88191502）

前　言

作为一种主体相互作用的分析语言，博弈论最为重要的核心概念是“纳什均衡”(Nash Equilibrium)，纳什均衡也是所有博弈均衡概念的理论基点。在最简单的两人博弈中，纳什均衡可以通俗表达为“给定你的选择，我要把我的效用最大化；给定我的选择，你也要把你的效用最大化”。从方法论的角度来了解，博弈论建立了一种独特的互动分析范式，这种博弈互动分析范式的先验假定是：任何主体都是以个体效用最大化为基本行为准则的，而这种基本行为准则支配了任何时候任何条件下的主体策略选择。在理解或应用这种博弈分析范式的时候，我们可以把纳什均衡更形象地称为“互为最适反应”(Reciprocal Best Response)。此时，博弈均衡就是纳什均衡，而纳什均衡也就是博弈均衡。

从纳什均衡的精练发展脉络来看，塞尔滕的子博弈完美纳什均衡（Subgame Perfect Nash Equilibrium）建立了纳什均衡的动态分析语言，海萨尼转换和贝叶斯纳什均衡(Bayesian Nash equilibrium）则巧妙利用了“自然的先验信念”与“主体的后验判断”之间的必然联系，因为任何策略行为及其后的信念判断在最终极的意义上，一定可以找到一个让一切思想成为体系、让一切行为成为理性、让一切存在成为合理的“自然”！可以说，正是因为海萨尼的创造性思想，博弈论不仅可以在遵循纳什均衡分析逻辑的基础上条理化现实世界的不确定性，也创造了博弈论成为现代经济学理论基石的基础条件。

审视博弈论的前沿发展，期权博弈（Option Game）、行为博弈（Behavioral Game）、演化博弈和实验博弈是最为活跃的研究领域。其中，期权博弈是实物期权定价与博弈均衡的结合性概念，也可以视为不确定性条件下的互为最适反应；行为博弈是行为经济学与博弈论融合发展的结晶。在行为博弈的理论视野中，纳什均衡，或者说任何形式的博弈均衡，都是策略互动均衡与信念互动均衡的整合。这时，纳什均衡还可以通俗地表达为“给定你的信念与策略，我要把我的效用最大化；给定我的信念与策略，你也要把你的效用最大化”。

本书共分为10章，前4章主要介绍经典博弈理论，包括完全信息静态博弈、完全信息动态博弈、不完全信息静态博弈和不完全信息动态博弈，重点论述博弈论的核心概念与内在逻辑。第5章至第8章分别是博弈论前沿研究的热点领域，分别是：期权博弈、行为博弈、演化博弈和实验博弈。第9章城市开发博弈和第10章项目评价博弈，是作者有过较多涉猎的研究领域，也可以视为作者对于博弈核心概念和博弈均衡思想的

综合性应用。同时，为了保证内容的简明性和可读性，每章都按照原理、模型和应用的顺序来展开论述。

近十年来，作者一直在高校从事博弈论课程的教学工作。如何以最少文字来论述博弈论的核心概念？如何以最简练文字来阐述博弈均衡分析思想？是作者每次接受博弈论教学任务后必然的思考。作为一种展示博弈论核心概念的教材性专著，本书可以作为经济管理专业研究生学习博弈论的教学参考书。对于希望撰写博弈论应用论文的硕士生或博士生来说，本书更具有重要的参考价值。

最后，作者要特别感谢2008年国家自然科学基金项目（编号：70871122）和2011年国家自然科学基金项目（编号：71171203）的资助，也要感谢2003年至今中南大学商学院聆听《经济博弈论》课程的研究生同学们，同学们专注聆听中表现出的浓厚兴趣，不仅使作者时时体会到教学相长的幸福感，也是本书得以完成的重要动力来源！

洪开荣　孙　倩

2012年11月27日于中南大学

目　录

第1章

完全信息静态博弈

博弈是主体相互作用的代名词，而博弈结构的每个方面都可以作为博弈类型划分的依据。根据博弈主体的先后顺序、博弈持续的时间和重复次数分为静态博弈和动态博弈；根据博弈主体对其他参加者所掌握的信息的完全与完备程度分为完全信息博弈和不完全信息博弈。将上述两种分类方法结合，博弈可以分为四种类型：完全信息静态博弈、完全信息动态博弈、不完全信息静态博弈和不完全信息动态博弈。

与上述四种博弈相对应，有四种均衡概念：纳什均衡、子博弈精炼纳什均衡、贝叶斯纳什均衡和精炼贝叶斯纳什均衡。在上述四类均衡中，后一类均衡以前一类均衡为基础，均衡的意义越来越强，最后的精炼贝叶斯纳什均衡有最强的均衡含义。或者说，现实均衡总是完美贝叶斯均衡，但在完全信息静态博弈中它等价于纳什均衡；在完全完美信息动态博弈中它等价于子对策完美均衡；在不完全信息静态博弈中它等价于贝叶斯纳什均衡。

§1.1 完全信息静态博弈的基本原理

完全信息静态博弈是指各博弈方同时决策，且所有博弈方对各方得益都了解的博弈。在博弈论中，完全信息静态博弈是博弈中最基本的类型，最为简单，但也是内涵最为丰富的，其对应的纳什均衡也是所有博弈均衡概念的理论基点。

1.1.1 纳什均衡

1. 纳什均衡的定义

依据谢识予对博弈的定义，认为博弈是一些个人、队组或其他组织，面对一定的环境条件，在一定的规则下，同时或先后，一次或多次，从各自允许选择的行为或策略中

进行选择并加以实施，各自取得相应结果的过程。而博弈论则是系统研究各种博弈问题，寻求在各博弈方具有充分或有限理性、能力条件下的、合理的策略选择和合理选择策略时博弈的结果，并分析这些结果的经济意义、效率意义的理论和方法。由此可见，博弈论更关注博弈主体相互作用而形成的博弈结果，探讨这种结果在不同环境下的稳定状况，即均衡。

通过分析博弈论的经典案例——囚徒困境，可以更好地理解纳什均衡，也能更为直观地表现博弈的核心内涵。

假设有两个嫌疑犯，嫌疑犯 1 和嫌疑犯 2 联合犯事。警方将两人分别置于不同的房间内进行单独审讯，对每一个犯罪嫌疑人，警方给出的政策是：如果两人都认罪，则各被判刑 8 年；如果一人认罪，另一人不认罪，则认罪者立即释放，不认罪者加重判刑至 10 年；如果两人都不认罪，则警方因证据不足不能判两人偷窃罪，但可以以私人民宅的罪名将两人各判入狱 1 年。并且每个嫌疑犯都被告知，他的同伙也面对着同样的政策。

很明显，该案例中，两个小偷必须在警方给出的政策下做出理性的决策，他们所做出的决策导致的结果，不仅受到自身决策的影响，还受到对方决策的影响。因此，他们做出决策的过程，实际上就是他们相互博弈的过程。

为了将上述案例看得更清楚，可以采用更为简明的表达方式。在博弈论里，一个博弈可以用两种不同的方式来表述：一种是战略式表述（strategic form representation）或标准式表述（normal form）；另一种是扩展式表述（extensive form）。尽管从理论上来讲，这两种表述形式几乎完全等价，但从分析的方便性角度来看，战略式表述更适合于静态博弈，而扩展式表述更适合于讨论动态博弈。

战略式表述的博弈模型需要在以下几个要素内容方面做出明确的确定，即参加者、策略空间和收益函数。

博弈论假定参加者是追求效用最大化的理性人。记 n 为一个博弈中参加者的个数（$n=1, 2, \cdots, n$）；N 为所有参加者构成的集合，$N=(1, 2, \cdots, n)$；i 为一个特定的参加者（$i=1, 2, \cdots, n$），$i\in N$。

策略空间（strategy space）是指每一个参加者可以选择的策略所构成的集合。记第 i 个参加者的战略空间为 S_i，S_i 中的一个元素为 $s_i\in S_i$，$i\in N$。

收益函数是指参加者从博弈中获得的效用水平或利润水平或其他形式的目标函数。无论是什么样形式的支付函数，它们一般都是以效用函数为基础。记第 i 个参加者的支付函数为 $u_i=u_i(s_1, \cdots, s_i, \cdots, s_n)$，$i\in N$。

我们将一个博弈记为 $G=\{S_1, \cdots, S_n; u_1, \cdots, u_n\}$，该表述方法就被称为一个博弈的“战略式表述”。

依据上述定义，图 1.1 则为“囚徒困境”博弈的战略式表述。

该战略式表述，清晰地描述了“囚徒困境”博弈。参加者 $N=(1, 2)$，策略空间 $S_1=S_2=\{$坦白，抵赖$\}$，支付函数 u_1（坦白，坦白）$=u_2$（坦白，坦白）$=-8$，u_1（坦

白，抵赖）$=u_2$（抵赖，坦白）$=0$，u_1（抵赖，坦白）$=u_2$（坦白，抵赖）$=-10$，u_1（抵赖，抵赖）$=u_2$（抵赖，抵赖）$=-1$。

囚徒1	囚徒2	
	坦白	抵赖
坦白	−8，−8	0，−10
抵赖	−10，0	−1，−1

图1.1 “囚徒困境”博弈的战略式表述

从图1.1可以看出，若囚徒1和囚徒2都最大化自己的利益，则他们的最佳策略都是“坦白”，由此出现了一个具有稳定性的策略组合：“坦白，坦白”。很明显，在这个策略组合中，每个博弈方的策略都是针对其他博弈方策略或策略组合的最佳对策。

上述博弈是两人博弈，由此形成的最佳策略组合则可以通俗地表示为：“给定你的策略，我的策略是我最好的策略；给定我的策略，你的策略也是你最好的策略。”简而言之，这种最佳策略组合就是博弈主体互为最适反应，即“给定你（们）的选择，我要把我的效用最大化；给定我的选择，你（们）要把你（们）的效用最大化”。

事实上，具有这种性质的策略组合，正是博弈理论中最重要的一个解概念，即博弈中的“纳什均衡”。

下面给出纳什均衡的定义：

对于n人战略式表述博弈$G=\{S_1, \cdots, S_n; u_1, \cdots, u_n\}$，若策略组合$s^*=(s_1^*, \cdots, s_n^*)$满足如下条件，则称$s^*$是一个纳什均衡：

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*)\geqslant u_i(s_i, s_{-i}^*), \quad \forall s_i\in S_i, \ i=1, \cdots, n$$

其中，s_i^*表示博弈方i的战略，s_{-i}^*表示除博弈方i之外的所有其他博弈方的策略构成的策略组合。

即是说如果对于每一个$i=1, \cdots, n$，s_i^*是给定其他参加者人选择$s_{-i}^*=(s_1^*, \cdots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \cdots, s_n^*)$的情况下第$i$个参加者的最优策略。

或者用另一种表达方式：当且仅当s_i^*是下述最大化问题的解时，s^*是一个纳什均衡：

$$s_i^*\in \arg\max_{s_i\in S_i} u_i(s_1^*, \cdots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \cdots, s_n^*), \quad i=1, \cdots, n$$

2. 对纳什均衡的说明

纳什均衡代表的策略组合是博弈主体在对方选择既定的情况下效用最大的策略，而这种效用的取得则是博弈主体信念的延伸。具体到囚徒困境博弈，其前提假定实际上是囚徒1和囚徒2都是自利的，影响其效用的唯一因素是所获刑期的长短。如果囚徒之间的江湖道义对其中一位囚徒有影响，揭露与背叛会削弱他的主观效用，那么囚徒困境的博弈结果——纳什均衡也许会发生改变。由此可见，博弈不仅体现在策略的互动，也体

现了博弈主体信念的互动，由此形成的纳什均衡应该是策略互动均衡和信念互动均衡的共同结果。

由纳什均衡的定义可以看出，不管是策略互动均衡，还是信念互动均衡，纳什均衡是不同关联主体的不同策略所构成的策略组合，而这种策略是关联主体都不愿偏离的策略，或者说，是关联主体一旦选择了就不愿意放弃的策略，但是这种策略并不一定是唯一的最佳策略。

事实上，上一节给出的纳什均衡的定义是一种“弱纳什均衡”概念。当定义中的不等式为严格不等式时，我们可以得到“强纳什均衡”的概念，即：

如果给定其他博弈方的策略，每一个博弈方的最优选择是唯一的。也就是说如果 s^* 是一个强纳什均衡，当且仅当对于所有的 $i=1$，…，n，$s_i'\neq s_i^*$，有：

$$u_i(s_i^*,\ s_{-i}^*)>u_i(s_i',\ s_{-i}^*)$$

如果一个纳什均衡是强的，则没有任何博弈主体在均衡策略与某些其他策略之间是无差异的，在弱纳什均衡情况下，有些参加者可能在均衡策略与非均衡策略之间是无差异的，既然是无差异的，为什么选择均衡策略而不选择其他策略呢？由于这个原因，强纳什均衡比弱纳什均衡是一个更为可取的概念。此外，强纳什均衡对博弈支付的微小变化并不敏感，这保证了博弈模型预测功能的稳健性。但是，我们也要认识到，并不是所有博弈都存在强纳什均衡，有些博弈可能存在多个纳什均衡，但是都不是强纳什均衡。

既然纳什均衡是博弈关联主体不愿偏离的策略组合，那我们可以设想一下，如果博弈主体在博弈之前预测到了该博弈的纳什均衡，那么所有的博弈方都不会做出与预测结果不一致的策略，也就是说，任何博弈方都不会有偏离预测结果的愿望，因此，这个预测结果最终会真正成为博弈的结果。这就是纳什均衡的“一致预测性”特点，这一特点是纳什均衡所独有的，是纳什均衡的本质属性，也是保证纳什均衡的价值，使纳什均衡有具不同于其他分析概念的特殊地位的重要性质之一。

1.1.2 混合策略纳什均衡

1. 混合策略纳什均衡的定义

在纳什均衡分析中，如果有唯一纳什均衡，则纳什均衡分析方法可以相当圆满地解决博弈问题，因为得到了唯一的最优解。但如果博弈中不存在纳什均衡或者纳什均衡不唯一，那么纳什均衡分析就无法给出确定的解，或根本就得不到解。因此，纳什均衡分析法还不能完全满足完全信息静态博弈分析的需要。为此，需要引进新的分析方法，那就是“混合策略博弈”和“混合策略纳什均衡”。

下面以猜硬币博弈为例来介绍混合策略博弈和混合策略纳什均衡。

猜硬币博弈是从儿童的猜硬币游戏演化而来的。两个儿童手里各拿着一枚硬币，决定要显示正面向上还是反面向上。如果两枚硬币同时正面向上或同时反面向上，儿童 A

付给儿童B一分钱；如果两枚硬币只有一枚正面向上，儿童B付给儿童A一分钱。图1.2给出了这个博弈的收益矩阵。

儿童A	儿童B	
	正面	反面
正面	-1，1	1，-1
反面	1，-1	-1，1

图1.2 猜硬币博弈的收益矩阵

通过对收益矩阵进行分析，可以得知该博弈不存在纳什均衡，因为给定儿童B选择正面，儿童A的最优决策是反面，而给定儿童A选择反面，儿童B的最优决策是反面；同样地，给定儿童B选择反面，儿童A的最优决策是正面，而给定儿童A选择正面，儿童B的最优决策是正面。

尽管该博弈不存在纳什均衡，但是通过对收益矩阵进行分析，我们可以得出，博弈主体如果希望自己赢，则一定要确保自己的策略选择不能预先被对方知道或猜测到。换句话说，博弈主体必须以某一随机概率决定自己是出正面还是反面，并且如果一方出某一面的概率大于出另一面的概率，则一定会导致两方中存在赢方或输方。这种博弈方以一定的概率分布在可选策略中随机选择的决策方式，称为“混合策略”（Mixed Strategies）。与此相对，则把博弈中原来意义上的策略称为“纯策略”（Pure Strategies）。

假定儿童A以p的概率选择正面，儿童B以q的概率选择正面，如果儿童A出正面的概率大于出反面的概率，则儿童B全选正面就能保证赢的几率要大于输的几率。同样的道理，如果儿童B出正面的概率大于出反面的概率，则儿童A全选反面就能保证赢的几率要大于输的几率。因此，要想不让对方有机可乘，最可靠的方法是自己正反面的概率选择使对方选择两种策略的期望收益相同。

首先考虑儿童A，他选择正反面的概率必须使得儿童B无论选择正面还是反面，其期望收益都是一样的。

$$u_B（正面）=u_B（正面，正面）\times p+u_B（反面，正面）\times(1-p)=p-(1-p)=2p-1$$

$$u_B（反面）=u_B（正面，反面）\times p+u_B（反面，反面）\times(1-p)=-p+(1-p)=1-2p$$

$$u_B（正面）=u_B（反面）$$

计算可得：$p=1/2$。

再考虑儿童B。同样的道理，儿童B选择正反面的概率必须使得儿童A无论选择正面还是反面，其期望收益都是一样的。

$$u_A（正面）=u_A（正面，正面）\times q+u_A（正面，反面）\times(1-q)=-q+(1-q)=1-2p$$

$$u_A（反面）=u_A（反面，正面）\times q+u_A（反面，反面）\times(1-q)=q-(1-q)=2q-1$$

$$u_A（正面）=u_A（反面）$$

计算可得：$q=1/2$。

当儿童 A 以（1/2，1/2）的概率随机选择正面和反面，儿童 B 以（1/2，1/2）的概率随机选择正面和反面时，双方获利的机会是相等的。也就是说，双方都无法通过单独改变策略，即单独改变随机选择纯策略的概率分布而提高利益，因此，双方上述概率分布的组合构成一个混合策略纳什均衡。

下面给出混合策略博弈的定义：

n 人战略式表述博弈 $G=\{S_1, \cdots, S_n; u_1, \cdots, u_n\}$ 中，$S_i=\{s_{i1}, \cdots, s_{ik(i)}\}$，概率密度 $\sigma_i=(\sigma_{i1}, \cdots, \sigma_{ik(i)})$ 被称为博弈方 i 的一个混合策略，$\sigma_{ik}=\sigma_i(s_{ik})$ 是 i 选择 s_{ik} 的概率，$0 \leqslant \sigma_{ik} \leqslant 1$，$\sum_{k=1}^{k(i)} \sigma_{ik}=1$，$k=1, \cdots, k(i)$，其中 $i=1, \cdots, n$，$k(i)$ 为 S_i 中纯策略个数（$k(i)$ 可为无穷大）。

显然，混合策略是纯策略概念的一种扩充，因为当某个 $\sigma_{ik}=1(\sigma_{ik'}=0, k \neq k', k'=1, \cdots, k(i))$ 时，混合策略就“退化”为一种纯策略。当博弈方按混合策略进行博弈时，则称该博弈为混合策略博弈。

记参加者 i 可选择的所有混合策略（当然包括所有的纯策略）构成的集合为 $\sum_i$，称 $\sum_i$ 为 i 的混合策略空间，$\sigma_i \in \sum_i$；$\sigma=(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$ 为混合策略组合（mixed strategy profile）；笛卡儿积 $\sum = \times_i \sum_i$ 为混合策略组合空间，$\sigma \in \sum$。

在混合策略博弈中，任意一个参加者不能准确判定博弈的最终纯策略组合是什么，因为至少其他参加者的纯战略选择对他来说只是一种不太准确的预测，所以，参加者对其所获得的支付的判断只能是一种预期值或期望效用。记 $v_i(\sigma)=v_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$ 为参加者 i 的期望支付函数。于是，我们有：

$$v_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s \in S} p(s) u_i(s)$$

其中，$p(s)$ 为 s 作为博弈结果的策略组合的概率。在完全信息静态博弈中，可以假定各个参加者在选择纯策略时是相互独立地做出决策的，因而就有 $p(s)=\prod_{j=1}^{n} \sigma_j(s_j)$，于是得到：

$$v_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s \in S} \prod_{j=1}^{n} \sigma_j(s_j) u_i(s)$$

定义混合战略博弈纳什均衡如下：

n 人战略式表述博弈 $G=\{S_1, \cdots, S_n; u_1, \cdots, u_n\}$ 中，混合策略组合 $\sigma^*=(\sigma_1^*, \cdots, \sigma_i^*, \cdots, \sigma_n^*)$ 是一个纳什均衡，如果对于所有的 $i=1, \cdots, n$，有：

$$v_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geqslant v_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*), \quad \forall \sigma_i \in \sum_i$$

混合策略博弈作为纯策略博弈的自然扩充是必要的，因为在这种扩充下才有著名的纳什存在性定理，也就是说，纳什存在性定理保证在非常一般的情况下存在的纳什均衡包括仅存在混合战略博弈纳什均衡的情形。

2. 对混合策略纳什均衡的说明

纯策略纳什均衡，在现实中很容易操作，博弈主体可以依据纳什均衡的策略组合进行决策。但是我们很难相信现实生活中，博弈参与主体有选择混合策略概率的意识和能力，很明显对一次博弈，博弈参与主体无法分解自己的行为，很难做到能以几分之一的概率做出何种选择，而且在找到各自最佳概念选择的摸索过程隐含该博弈多次反复进行也不现实。

关于这点疑问，纳什提供了关于纳什均衡的群体行为来进行解释。也就是说博弈不仅仅只是在两个博弈主体中产生，而是存在一个由大量个体组成的群体，在群体内不同的个体采用不同的混合策略，基本上，在这个群体中，所采用的特定纯策略的频率是维持不变的。

关于混合策略纳什均衡的另一个解释是“信念”的均衡。在一个混合策略的纳什均衡中，对每一个参加者而言，被赋予正概率的纯策略是无差异的。在应对其他参加者的均衡策略时，该参加者实际上是选择其自身的任一纯策略。于是，混合策略纳什均衡可以被理解为这样的一种均衡状态：在这种状态下，参加者都无法确定对手的实际选择，从而，在这种不确定性下，参加者在各个纯策略上分配概率，这种分配即是“信念”的分配。一个参加者的混合策略就代表了其他参加者对其的可实现的纯策略的“信念”，并且，参加者的信念决定了他们的最佳应对策略以及他们的最优期望支付。均衡就成了一种“信念的均衡”，而不是“行动的均衡”。

1.1.3 纳什均衡的存在性和多重性

1. 纳什均衡的存在性

从猜硬币博弈中，我们知道博弈中有可能不存在纯策略纳什均衡，在引入混合策略纳什均衡后，这一结论会不会改变呢？1950年，纳什证明了，任何有限博弈都存在至少一个纳什均衡，可能是纯策略纳什均衡，也可能是混合策略纳什均衡。这就是纳什均衡的存在性定理，具体如下：

n 人战略式表述博弈 $G=\{S_1, \cdots, S_n; u_1, \cdots, u_n\}$ 中，如果 n 是有限的，且 S_i 都是有限集（对 $i=1, \cdots, n$），则该博弈至少存在一个纳什均衡，但可能包含混合策略。

因为纯策略可以视为是相应概率为1的混合策略，那么纯策略纳什均衡也可以视为混合策略纳什均衡的特例。因此，纳什定理可以用通俗的语言表述为：“每一个有限博弈都至少有一个混合策略纳什均衡。”纳什定理的证明要用到数学中的角谷不动点定理，由于该定理的证明过于数学化，这里就不再给出，对证明过程感兴趣的读者可参看 Wllson（1971）。

纳什均衡的普遍存在性，意味着纳什均衡分析在我们所遇到的大多数博弈问题中，都是一种基本的分析方法。正是因为有普遍存在性，纳什均衡是博弈结果的“一致预测”的

性质才有意义，纳什均衡才会成为分析博弈和预测博弈结果的中心概念和基本出发点。

2. 纳什均衡的多重性

前面讨论了博弈中如果不存在纯策略纳什均衡，我们可以采用混合策略纳什均衡的分析方法。但是现实中，更多的博弈问题不是不存在纳什均衡，而是存在很多的纳什均衡。这就是纳什均衡的多重性问题。

下面以性别战博弈为例来说明。假定一个男生和一个女生得到了两张足球票和同一时间的两张芭蕾舞票。男生更想去看足球而女生更想去看芭蕾，但是都不愿分头行动。具体的收益如图 1.3 所示。

男	女	
	足球	芭蕾
足球	2，1	0，0
芭蕾	0，0	1，2

图 1.3　性别战博弈的收益矩阵

很明显，性别战博弈存在两个纯策略纳什均衡：（足球，足球）和（芭蕾，芭蕾）。但是参与主体对这两个纳什均衡存在显著不同的偏好。男生显著偏好前一个纳什均衡，女生显著偏好后一个纳什均衡，因此无法确定博弈的最终结果是哪一个纳什均衡。

但是如果考虑博弈模型之外的某一信息，有可能唯一的纳什均衡就会出现。例如，如果今天是女生的生日，男生可能认为应该选择芭蕾来讨女孩子欢心，而女生也会认为男生认为自己应该讨女生欢心，因此，最终结果就可能是他们都选择芭蕾。这种在现实生活中，博弈主体可能使用某些被博弈模型抽象掉的信息来达到一个均衡，被称之为“聚点均衡”。

当然，除了聚点均衡，事实上，面对纳什均衡的多重性问题，还有很多其他的方法来解决。例如，一个博弈中如果存在两个纳什均衡，其中一个纳什均衡在帕累托效率意义上明显好于另一个纳什均衡，那么各个博弈主体不仅自己会倾向于选择帕累托效率更好的纳什均衡，而且可以预料其他博弈主体也会选择该纳什均衡的策略。用这种方法选择出来的纳什均衡被称之为“帕累托上策均衡”。

§1.2　完全信息静态博弈的经典模型

1.2.1　古诺寡头模型

古诺寡头模型是纳什均衡最早的版本之一。在古诺寡头竞争模型中，参加者是两个

生产同质产品并在同一市场上展开竞争的企业，记为企业 1 和企业 2。每个参加者的策略是企业可选择的产量。在这里，我们将参加者的策略空间定义为企业可选择的产量范围，而参加者的支付为其可获利润。于是，我们有如下战略式表述的博弈：

$S_1 = S_2 = [0, \infty)$，$C_i(q_i)$ 为企业 i 的成本函数，q_i 为企业 i 的产量，$i=1, 2$；设逆需求函数为 $P=P(q_1+q_2)$，其中 P 为产品价格。

参加者 i 的支付函数为：

$$\pi_i(q_1, q_2) = q_i P(q_1+q_2) - C_i(q_i), \quad i=1, 2$$

对于参加者 i，给定参加者 $j(j\neq i)$ 的产量 q_j，其最优产量 q_i（利润最大化产量）满足以下一阶条件：

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = P(q_1+q_2) + q_i P'(q_1+q_2) - C_i'(q_i) = 0, \quad i=1, 2$$

上式定义了参加者 i 对参加者 $j(j\neq i)$ 的反应函数：

$$q_i^* = R_i(q_j), \quad i\neq j;\ i, j=1, 2$$

假定参加者 i 的成本函数为 $c_i(q_i)=cq_i$，$i=1, 2$，其中 c 为常数，即平均成本，且假设逆需求函数为线性的：

$$p = a - (q_1+q_2)$$

于是一阶条件变为：

$$a-(q_1+q_2)-q_1-c=0$$

$$a-(q_1+q_2)-q_2-c=0$$

反应函数则为：

$$q_1^* = \frac{1}{2}(a-q_2-c)$$

$$q_2^* = \frac{1}{2}(a-q_1-c)$$

解得，纳什均衡为：

$$q_1^* = q_2^* = \frac{1}{3}(a-c)$$

每个企业的利润为：

$$\pi_1 = \pi_2 = \left[a - 2\times\frac{1}{3}(a-c)\right]\cdot\frac{1}{3}(a-c) - c\cdot\frac{1}{3}(a-c) = \frac{1}{9}(a-c)^2$$

为了与垄断情况进行比较，让我们再来计算一下当两个企业联手进行完全垄断经营时的最优产量和利润。在垄断情形，两个企业最大化总的垄断利润，表达为：

$$\max_Q \pi_i = Q(a-Q-c)$$

其中，Q 为两个企业的产量之和。

解得：

$$Q^* = \frac{1}{2}(a-c) < q_1^* + q_2^* = \frac{2}{3}(a-c)$$

而垄断利润为：

$$\frac{1}{4}(a-c)^2>\pi_1+\pi_2=\frac{2}{9}(a-c)^2$$

寡头竞争的总产量大于垄断产量的原因在于每个企业在选择自己的最优产量时，只考虑对本企业利润的影响，而忽视了对另一个企业的外部负效应。这本质上仍是一个囚徒困境问题。

1.2.2 伯特兰德寡头模型

伯特兰德（Bertrand）1883年提出了另一种形式的寡头模型，这种模型与选择产量的古诺模型的差别在于，伯特兰德模型中各厂商所选择的是价格而不是产量。

假定：两个寡头企业的产品有一定差异并且进行价格竞争。产品有一定差异指两厂商的产品是在品牌、质量、包装等方面有所不同的同类产品。因此，伯特兰德模型中厂商的产品之间有很强的替代性，但又不是完全可替代，即价格不同时，价格较高的不会完全销不出去。这种情况下，我们可用当厂商1和厂商2的价格分别为 P_1 和 P_2 时，它们各自面临的需求函数可以表示为：

$$q_1=q_1(p_1,\ p_2)=a_1-b_1p_1+d_1p_2$$

$$q_2=q_2(p_1,\ p_2)=a_2-b_2p_2+d_2p_1$$

其中，d_1，$d_2>0$ 表示两厂商产品有一定替代性的替代系数。我们同样假设两厂商无固定成本，边际生产成本分别为 c_1 和 c_2。

在该博弈中，两厂商各自的战略空间分别为 $S_1=[0,\ P_{1\max}]$ 和 $S_2=[0,\ P_{2\max}]$，其中 $P_{1\max}$ 和 $P_{2\max}$ 分别是厂商1和厂商2还能卖出产品的最高价格。

两厂商的利润函数为：

$$\pi_1(P_1,\ P_2)=P_1q_1-c_1q_1=(P_1-c_1)q_1=(P_1-c_1)(a_1-b_1P_1+d_1P_2)$$

$$\pi_2(P_1,\ P_2)=P_2q_2-c_2q_2=(P_2-c_2)q_2=(P_2-c_2)(a_2-b_2P_2+d_2P_1)$$

由一阶条件得反应函数：

$$P_1=\frac{1}{2b_1}(a_1+b_1c_1+d_1P_2)$$

$$P_2=\frac{1}{2b_2}(a_2+b_2c_2+d_2P_1)$$

设纳什均衡为（P_1^*，P_2^*），必有：

$$\begin{cases}P_1^*=\dfrac{1}{2b_1}(a_1+b_1c_1+d_1p_2^*)\\[2ex] P_2^*=\dfrac{1}{2b_2}(a_2+b_2c_2+d_2p_1^*)\end{cases}$$

解得：