考研数学复习指导系列丛书

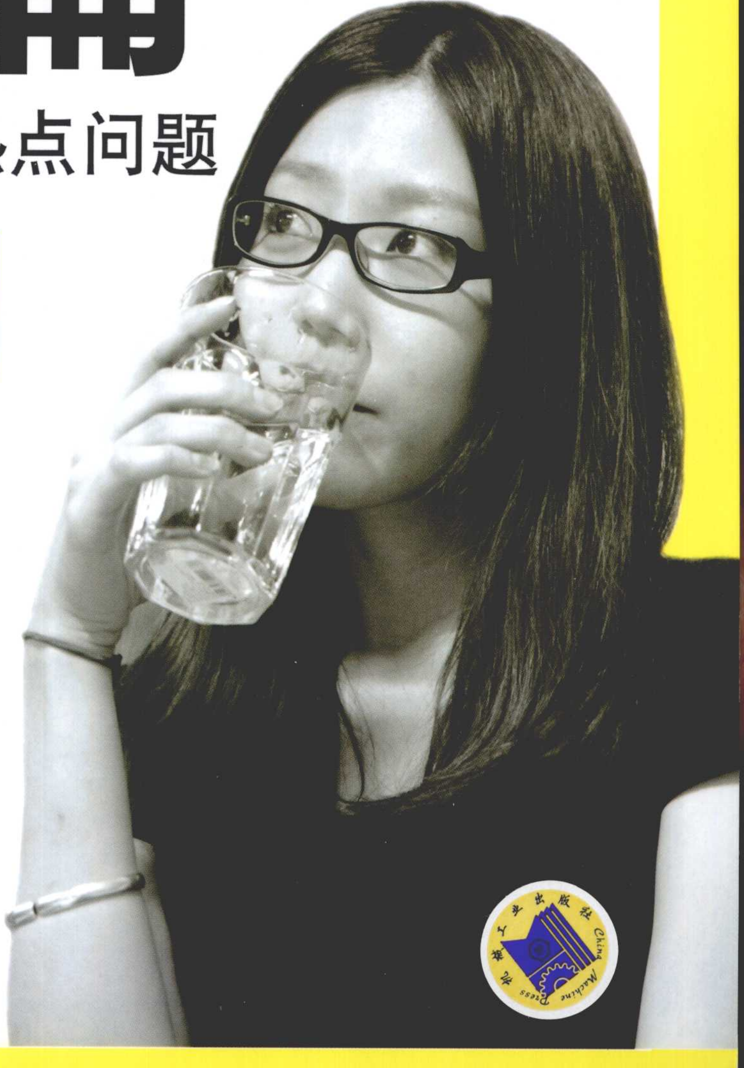
2014

考研数学真题篇

十年真题精解与热点问题

（数学一）

陈启浩　编著



真题都一样

解答不一样

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

考研数学复习指导系列丛书

2014 考研数学真题篇
（数学一）
十年真题精解与热点问题

陈启浩　编著

机　械　工　业　出　版　社

本书是考研数学辅导书．主要内容包括2004年到2013年十年的考研数学一的真题及其精解，以及对考试热点问题的讨论．

本书适合参加全国硕士研究生入学统一考试“数学一”的同学阅读，也可作为教师的参考书．

图书在版编目（CIP）数据

2014考研数学真题篇十年真题精解与热点问题．数学一/陈启浩编著．—北京：机械工业出版社，2013.4
（考研数学复习指导系列丛书）
ISBN 978-7-111-41927-3

Ⅰ.①2…　Ⅱ.①陈…　Ⅲ.①高等数学－研究生－入学考试－自学参考资料　Ⅳ.①013

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第058759号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
策划编辑：韩效杰　责任编辑：韩效杰
版式设计：霍永明　责任校对：张　媛
封面设计：路恩中　责任印制：乔　宇
北京机工印刷厂印刷（三河市南杨庄国丰装订厂装订）
2013年5月第1版第1次印刷
184mm×260mm·16印张·393千字
标准书号：ISBN 978-7-111-41927-3
定价：29.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社服务中心：（010）88361066	教材网：http：//www.cmpedu.com
销售一部：（010）68326294	机工官网：http：//www.cmpbook.com
销售二部：（010）88379649	机工官博：http：//weibo.com/cmp1952
读者购书热线：（010）88379203	**封面无防伪标均为盗版**

考研数学复习指导系列丛书介绍

为了帮助同学们在考研复习时，在较为紧张的时间安排下，有效加深对概念与理论的理解，熟练掌握常用的解题方法与技巧，针对考研同学的实际需要，我社特组织出版了由北京邮电大学陈启浩教授编写的“考研数学复习指导系列丛书”.

本套丛书分别针对参加数学一、数学二和数学三考试的同学，其中针对数学一考试的包括三本书，分别是：

《2014 考研数学真题篇（数学一）　十年真题精解与热点问题》

《2014 考研数学基础篇　常考知识点解析（数学一）》

《2014 考研数学提高篇　常考问题的快捷解法与综合题解析（数学一）》

本套系列丛书是在陈教授对全国硕士研究生入学统一考试大纲的深入研究和对历届考研真题的精细分析的基础上写成的，也是他长期大学数学教学，特别是近十几年来考研数学辅导的结晶.

本套系列丛书，无论是内容编写还是解题方法都比较精练、新颖，富有启迪性和前瞻性，实用性、针对性也很强，可以明显提高复习的效率. 这套书贴近考纲、考试，更贴近考生，是广大考生值得拥有的一套好书.

机械工业出版社

前　　言

参加考研的同学，一定要练习一下近十年的全国硕士研究生入学统一考试的真题．因为这样既可以评估复习的效果，找出不足，尽快补上，也可以获得试题形式、广度和难度等有价值的信息．

为了帮助同学们从考研真题的练习中发现更多不足，掌握更多方法，我们对 2004 年至 2013 年的考试试题，作了精心的解析，编成本套丛书的《2014 考研数学真题篇（数学一）十年真题精解与热点问题》一书．本书由三部分组成：

A. 十年真题（单独成册）

B. 十年真题精解

C. 热点问题

“十年真题精解”是对每一道真题通过“分析”、“精解”和“附注”三部分进行精细、完整的解析，特别在“精解”中大量采用了既普遍实用又富有技巧性的方法给出解答，十分贴近考生，**这是本书的一个亮点，也是本书与其他同类书籍的一个区别**．

“热点问题”是对最近十几年考研真题进行全面分析、研究后，提出的经常出现于试题中的、对考生来说较为困难或容易失分的问题，通过例题进行讲解，十分贴近考试．

希望同学们在使用真题进行练习时，不要轻易翻阅真题解答，只有当百思不得其解时才查阅解答，这样练习才能起作用．在练习结束之后，针对每一道真题，应回过头来仔细阅读书中有关这道题的分析、精解和附注的内容，进行比对和总结，内化为自己的能力．

希望同学们认真专注地进行复习，取得满意的成绩！

欢迎同学们对本书提出建议和意见，发邮件到 cqhshuxue@gmail.com，非常感谢！

编　者

目　录

B　十年真题精解

一、2013 年全国硕士研究生入学统一考试试题精解

一、选择题

（1）

分析 对 $k=2$，3 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}$，确定正确选项．

精解 由题中的选项知 $k=2$ 或 3，并且由

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^2}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2(1+x^2)}=0$$

知 $k=2$ 不合题意．

由于 $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^3}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3(1+x^2)}=\frac{1}{3},$$

所以，$k=3$，$c=\dfrac{1}{3}$.

因此本题选(D).

附注 由四个选项可知 $k=2$ 或 3，然后用洛必达法则计算对应的 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式极限，是本题获解的关键．

（2）

分析 算出所给曲面在点(0，1，－1)处的法向量，即得该点处的切平面方程．

精解 记 $F(x,y,z)=x^2+\cos(xy)+yz+x$，则

$$\begin{aligned}dF&=2x\mathrm{d}x-\sin(xy)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)+z\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z+\mathrm{d}x\\&=[2x-y\sin(xy)+1]\mathrm{d}x+[z-x\sin(xy)]\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

所以
$$F'_x(0,1,-1)=[2x-y\sin(xy)+1]\big|_{(0,1,-1)}=1,$$
$$F'_y(0,1,-1)=[z-x\sin(xy)]\big|_{(0,1,-1)}=-1,$$
$$F'_z(0,1,-1)=y\big|_{(0,1,-1)}=1,$$

它们即为曲面 $F(x,y,z)=0$ 在点(0，1，－1)处的法向量的三个分量，所以在该点处的切平面方程为

$$1\cdot(x-0)+(-1)(y-1)+1\cdot(z+1)=0,\text{即 } x-y+z=-2.$$

因此本题选(A).

附注 由于需要计算 F'_x，F'_y，F'_z，所以从计算 dF 入手比较快捷．

（3）

分析 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$ 是函数 $f(x)(0\leqslant x\leqslant 1)$ 作奇延拓后的傅里叶级数，于是利用狄利克雷收敛定理计算 $S\left(-\dfrac{9}{4}\right)$.

精解 正弦级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$ 可以理解为函数 $f(x) = \left|x-\dfrac{1}{2}\right|(0 < x \leqslant 1)$ 的奇延拓
$F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & x = 0, \\ -f(-x), & -1 < x < 0 \end{cases}$ 的傅里叶级数,所以 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$ 是以 2 为周期的周期函数,从而由狄利克雷收敛定理得

$$S\left(-\frac{9}{4}\right) = S\left(-\frac{9}{4}+2\right) = S\left(-\frac{1}{4}\right)\left(x = -\frac{1}{4}\text{ 是 }F(x)\text{ 的连续点}\right)$$
$$= F\left(-\frac{1}{4}\right) = -f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}.$$

因此本题选(C).

附注 应记住狄利克雷收敛定理:

设 $f(x)$ 在 $[-l, l]$ 上只有有限个第一类间断点和有限个极值点，则 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数 $S(x)$ 是以 $2l$ 为周期的周期函数，其中在一个周期 $[-l, l]$ 上有

$$S(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)], x \in (-l,l), \\ \dfrac{1}{2}[f((-l)^+)+f(l^-)], x = -l, l. \end{cases}$$

(4)

分析 利用格林公式将 $I_i(i=1, 2, 3, 4)$ 转换成二重积分，然后比较这四个二重积分的大小，即可得到 $\max\{I_1, I_2, I_3, I_4\}$.

精解 对 $i=1, 2, 3, 4$，记由 L_i 围成的平面闭区域为 D_i，其第一象限部分为 D_i'，则由格林公式得

$$I_i = \oint_{L_i}\left(y+\frac{y^3}{6}\right)\mathrm{d}x + \left(2x-\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{d}y = \iint_{D_i}\left(1-x^2-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}\sigma$$
$$= 4\iint_{D_i'}\left(1-x^2-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}\sigma\text{（由于 }D_i\text{ 既关于 }x\text{ 轴对称,也关于 }y\text{ 轴对称,并且 }1-x^2-\frac{y^2}{2}\text{ 在对称点处的值彼此相等）}$$

由于 $1-x^2-\dfrac{y^2}{2}$ 在 D_4' 内部为正，且 $D_1' \subset D_4'$，所以 $\iint\limits_{D_1'}\left(1-x^2-\dfrac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}\sigma < \iint\limits_{D_4'}\left(1-x^2-\dfrac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}\sigma$,即 $I_1 < I_4$.

由于 $1-x^2-\dfrac{y^2}{2}$ 仅在 D_4' 内部为正，且 $D_4' \subset D_2'$，所以 $\iint\limits_{D_4'}\left(1-x^2-\dfrac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}\sigma > \iint\limits_{D_2'}\left(1-x^2-\dfrac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}\sigma$,即 $I_4 > I_2$.

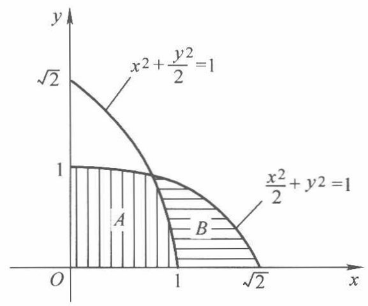


图　B-13-1

下面比较 I_4 与 I_3 的大小．由 D_4' 与 D_3' 的图形(图 B-13-1)

$$\iint\limits_{D_4'}\left(1-x^2-\frac{y^2}{2}\right)d\sigma > \iint\limits_{A}\left(1-x^2-\frac{y^2}{2}\right)d\sigma > \iint\limits_{A}\left(1-x^2-\frac{y^2}{2}\right)d\sigma + \iint\limits_{B}\left(1-x^2-\frac{y^2}{2}\right)d\sigma$$

(因为在 B 上 $1-x^2-\frac{y^2}{2}<0$)

$$=\iint\limits_{D_3'}\left(1-x^2-\frac{y^2}{2}\right)d\sigma,\text{即 } I_4 > I_3.$$

由以上计算知 $\max\{I_1, I_2, I_3, I_4\}=I_4$.

因此本题选(D).

附注　注意函数 $1-x^2-\frac{y^2}{2}$仅在 D_4' 内取正值，是本题不必通过计算二重积分的值即可确定 I_4 较 I_1，I_2，I_3 大的关键，学习和掌握这种比较二重积分的方法．

(5)

分析　利用两个向量组等价的定义确定正确的选项．

精解　记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$)其中 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组)，$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_n)$(其中 $\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_n$ 是 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组)，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{n\times n}$，则由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$ 得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n),$$

即

$$\boldsymbol{\gamma}_1=b_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n,$$
$$\boldsymbol{\gamma}_2=b_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n,$$
$$\vdots$$
$$\boldsymbol{\gamma}_n=b_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n.$$

由此可知，$\boldsymbol{C}$ 的列向量组可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示．

由 $\boldsymbol{B}$ 可逆得，$\boldsymbol{CB}^{-1}=\boldsymbol{A}$，因此同样可知 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组可由 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组线性表示．由此得到，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价．

因此本题选(B).

附注 两个向量组Ⅰ与Ⅱ等价的定义是：

如果Ⅰ与Ⅱ可相互线性表示，则称Ⅰ与Ⅱ等价.

(6)

分析 利用两个实对称矩阵相似的充分必要条件是它们有相同的特征多项式，即可得到正确选项.

精解

记 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵，则 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是三阶实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-a&-1\\-a&\lambda-b&-a\\-1&-a&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&-a&-1\\-a&\lambda-b&-a\\-\lambda&0&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&-a&-1\\-2a&\lambda-b&-a\\0&0&\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\lambda[\lambda^2-(2+b)\lambda+(2b-2a^2)],$$

而 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式为 $\lambda(\lambda-2)(\lambda-b)=\lambda[\lambda^2-(2+b)\lambda+2b]$.

显然 $\lambda[\lambda^2-(2+b)\lambda+(2b-2a^2)]=\lambda[\lambda^2-(2+b)\lambda+2b]$ 的充分必要条件是 $2b-2a^2=2b$，即 $a=0$，b 为任意常数.

从而 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 的充分必要条件是 $a=0$，b 为任意常数.

因此本题选(B).

附注 以下结论值得注意.

设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，则它们相似的必要而非充分条件是 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 具有相同的特征多项式；

设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶实对称矩阵，则它们相似的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 具有相同的特征多项式.

(7)

分析 将 X_2，X_3 标准化即可得到 P_1，P_2，P_3 的大小关系.

精解 记标准正态分布函数为 $\Phi(x)$，则

$$P_1=P(-2\leqslant X_1\leqslant 2)=\Phi(2)-\Phi(-2)=2\Phi(2)-1,$$

$$P_2=P(-2\leqslant X_2\leqslant 2)=P\left(\frac{-2}{2}\leqslant\frac{X_2}{2}\leqslant\frac{2}{2}\right)=\Phi(1)-\Phi(-1)$$

$$=2\Phi(1)-1<2\Phi(2)-1=P_1,$$

$$P_3=P(-2\leqslant X_3\leqslant 2)=P\left(\frac{-2-5}{3}\leqslant\frac{X_3-5}{3}\leqslant\frac{2-5}{3}\right)$$

$$=\Phi(-1)-\Phi\left(-\frac{7}{3}\right)$$

$$<\Phi(-1)<\Phi(1)-\Phi(-1)\text{（由图 B-13-2 可得）}$$

$$=P_2.$$

由此得到 $$P_1>P_2>P_3.$$

因此本题选(A).

附注　计算服从正态分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$ 的随机变量 X 的概率等问题时，总是将 X 标准化：$X^0=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$，则 $X^0\sim N(0,\ 1)$.

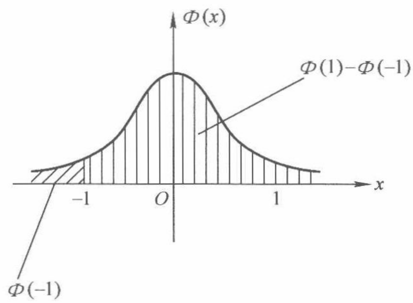


图　B-13-2

(8)

分析　利用 $Y=X^2$ 即可得到 $P(Y>c^2)$ 的值.

精解　由 $X\sim t(n)$ 知，当 $a\in(0,\ 0.5)$ 时满足 $P(X>c)=a$ 的 $c>0$.

由于 $Y=X^2$，所以

$$P(Y>c^2)=P(X^2>c^2)=P(X>c)+P(X<-c)$$
$$=2P(X>c)=2a.$$

因此本题选(C).

附注　$Y=X^2$ 的证明.

由于 $Y\sim F(1,\ n)$，所以存在相互独立的随机变量 ξ 与 η，其中 $\xi\sim N(0,\ 1)$，$\eta\in\chi^2(n)$，使得 $Y=\dfrac{\xi^2}{\eta/n}=\left(\dfrac{\xi}{\sqrt{\eta/n}}\right)^2$. 显然$\dfrac{\xi}{\sqrt{\eta/n}}\sim t(n)$. 它即为 X，所以 $Y=X^2$.

二、填空题

(9)

分析　利用隐函数求导方法算出 $f'(0)$，由此即可由 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right]=f'(0)$ 得到要求的极限值.

精解　由所给方程得 $f(0)=1$，即 $x=0$ 时，$y=1$. 所给方程两边对 x 求导得

$$y'-1=e^{x(1-y)}[(1-y)-xy'].$$

将 $x=0$，$y=1$ 代入上式得

$$f'(0)=y'(0)=1.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(\dfrac{1}{n}\right)-f(0)}{\dfrac{1}{n}}=f'(0)=1.$

附注　由于由导数定义知，所给极限为 $f'(0)$，所以在隐函数求导时，不必算出 $f'(x)$ 的表达式，只需算出 $f'(0)$ 即可. 这样可使计算快捷些.

(10)

分析　只要确定对应的二阶常系数齐次线性微分方程的通解即可.

精解　由于 y_1，y_2，y_3 是所给的二阶常系数非齐次线性微分方程的解，所以 $y_1-y_3=e^{3x}$，$y_2-y_3=e^x$ 是对应的齐次线性微分方程的两个线性无关的特解，从而它的通解为 $Y=C_1e^{3x}+C_2e^x$. 因此所给的二阶常系数非齐次线性微分方程的通解为

$$y=Y+y_3=C_1e^{3x}+C_2e^x-xe^{2x}.$$

附注　顺便算出题中的二阶常系数非齐次线性微分方程.

显然对应的齐次线性微分方程的特征方程有根 1，3，所以特征方程为 $\lambda^2-4\lambda+3=0$. 从而二阶常系数非齐次线性微分方程为

$$y''-4y'+3y=f(x).$$

将它的特解 $-xe^{2x}$ 代入式(1)得 $f(x)=xe^{2x}$.

所以，所求的二阶常系数非齐次线性微分方程为

$$y''-4y'+3y=xe^{2x}.$$

(11)

分析 先用参数方程求导方法算出 $\frac{d^2y}{dx^2}$，然后将 $t=\frac{\pi}{4}$ 代入即可.

精解 由于 $\frac{dy}{dx}=\frac{(t\sin t+\cos t)'}{(\sin t)'}=t$，所以

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{t'}{(\sin t)'}=\frac{1}{\cos t}.$$

从而 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{1}{\cos t}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$.

附注 由参数方程 $\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t)\end{cases}$ 表示的函数 $y=y(x)$ 的二阶导数应按公式

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}\text{或}\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$$

计算.

(12)

分析 由于所给的无穷区间上的反常积分收敛，所以可按分部积分法计算.

精解
$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx&=-\int_1^{+\infty}\ln x\,d\frac{1}{1+x}\\&=-\left[\left.\frac{\ln x}{1+x}\right|_1^{+\infty}-\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}dx\right]=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}dx\\&=\left.\ln\frac{x}{1+x}\right|_1^{+\infty}=\ln 2.\end{aligned}$$

附注 以上计算中，将 $+\infty$ 代入 x 中应理解为 $x\to+\infty$ 取极限，例如，$\left.\frac{\ln x}{1+x}\right|_1^{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{1+x}-\left.\frac{\ln x}{1+x}\right|_{x=1}=0-0=0$.

(13)

分析 由题设 $A_{ij}=-a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 知 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. 由此可算得 $|\boldsymbol{A}|$.

精解 由题设 $A_{ij}+a_{ij}=0$ 得 $A_{ij}=-a_{ij}(i,j=1,2,3)$，所以

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}-a_{11}&-a_{21}&-a_{31}\\-a_{12}&-a_{22}&-a_{32}\\-a_{13}&-a_{23}&-a_{33}\end{pmatrix}=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}.$$

从而由 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{3-1}=|\boldsymbol{A}|^2$ 得

$$|-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}|^2, 即(-1)^3|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}|^2.$$

由此得到 $|\boldsymbol{A}|=0$ 或 -1.

若 $|A|=0$，则 $-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，则有 $A=\boldsymbol{O}$，与题设矛盾，故 $|A|=-1$.

附注　对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$，应记住以下常用的性质：

(i) $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_n$($\boldsymbol{E}_n$ 是 n 阶单位矩阵)；

(ii) $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$(当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时)；

(iii) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}(n>1)$；

(iv) $(\lambda\boldsymbol{A})^*=\lambda^{n-1}\boldsymbol{A}^*$($\lambda$ 是常数)；

(v) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*=(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}$；

(vi) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$($\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵).

(14)

分析　利用条件概率公式计算 $P(Y\leqslant a+1\mid Y>a)$.

精解　
$$P(Y\leqslant a+1\mid Y>a)=\frac{P(Y\leqslant a+1,\ Y>a)}{P(Y>a)}$$
$$=\frac{P(a<Y\leqslant a+1)}{P(Y>a)}$$
$$=\frac{\int_a^{a+1}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y}{\int_a^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y}\left(由于 y 的概率密度为 f(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}\right)$$
$$=\frac{\mathrm{e}^{-a}-\mathrm{e}^{-a-1}}{\mathrm{e}^{-a}}=1-\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

附注　应记住六种常用随机变量的概率分布或概率密度以及数学期望与方差.

三、解答题

(15)

分析　由于 $f(x)$ 是积分上限函数，所以应使用分部积分法计算所给的定积分(必要时需结合使用换元积分法).

精解　
$$\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}2\sqrt{x}$$
$$=2\sqrt{x}f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 2\sqrt{x}f'(x)\mathrm{d}x$$
$$=-\int_0^1 2\sqrt{x}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x$$
$$=-2\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=-4\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}\sqrt{x}$$
$$\xlongequal{令 t=\sqrt{x}}-4\int_0^1\ln(1+t^2)\mathrm{d}t$$
$$=-4\left[t\ln(1+t^2)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{2t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t\right]$$
$$=-4\ln 2+8\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$= -4\ln 2 + 8 - 8\arctan t \Big|_0^1$$
$$= -4\ln 2 + 8 - 2\pi.$$

附注 当定积分的被积函数中有积分上限函数的因子时，总是先用分部积分法，去掉被积函数中的积分运算.

(16)

分析 (Ⅰ) 先确定幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域,然后在收敛域内对 $S(x)$ 求二阶导数,证明 $S''(x) - S(x) = 0$.

(Ⅱ) 确定 $S(0)$，$S'(0)$，然后求解(Ⅰ)中得到的微分方程，即得 $S(x)$的表达式.

精解 (Ⅰ) 由题设得到

$$a_0 = 3, a_2 = \frac{3}{2!}, \cdots, a_{2n} = \frac{3}{(2n)!}, \cdots,$$
$$a_1 = 1, a_3 = \frac{1}{3!}, \cdots, a_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)!}, \cdots,$$

所以, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3}{(2n)!} x^{2n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$,

由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3}{(2n)!} x^{2n}$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ 对任意实数 x 都收敛,所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$,即

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n (x \in (-\infty, +\infty)) \tag{1}$$

对 $x \in (-\infty, +\infty)$ 有

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \tag{2}$$

$$S''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n,$$

于是, $S''(x) - S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} - a_n] x^n$

$= 0$(利用 $a_{n-2} - n(n-1)a_n = 0 (n \geqslant 2)$,即 $a_n - (n+2)(n+1)a_{n+2} = 0 (n \geqslant 0)$).

(Ⅱ) 由(Ⅰ)得到，$S(x)$满足二阶常系数齐次线性微分方程

$$S''(x) - S(x) = 0,$$

它的通解为

$$S(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x, \tag{3}$$

且

$$S'(x) = -C_1 e^{-x} + C_2 e^x. \tag{4}$$

由式(1)、式(2)得 $S(0) = a_0 = 3$，$S'(0) = a_1 = 1$. 将它们代入式(3)、式(4)得

$$\begin{cases} 3 = C_1 + C_2, \\ 1 = -C_1 + C_2, \end{cases}$$

即 $C_1 = 1$，$C_2 = 2$.

将它们代入式(3)得 $S(x)=e^{-x}+2e^{x}(x\in(-\infty,+\infty))$.

附注　$S(x)$ 也可以按以下方法快捷计算：

$$\begin{aligned}S(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{(2n)!}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}\\&=\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n!}x^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n!}x^n\\&=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}x^n\\&=2e^x+e^{-x}(x\in(-\infty,+\infty)).\end{aligned}$$

(17)

分析　先算函数 $f(x,y)$ 的所有驻点，然后判断它们是否为极值点，由此即可得到 $f(x,y)$ 的极值.

精解　$f(x,y)$ 的定义域为 xOy 平面，在其上具有二阶连续偏导数，且

$$f_x'=\left(x^2+y+\frac{x^3}{3}\right)e^{x+y},\quad f_y'=\left(1+y+\frac{x^3}{3}\right)e^{x+y},$$

由 $\begin{cases}f_x'=0,\\f_y'=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x^2+y+\dfrac{x^3}{3}=0,\\1+y+\dfrac{x^3}{3}=0\end{cases}$ 得驻点 $\left(-1,-\dfrac{2}{3}\right)$ 和 $\left(1,-\dfrac{4}{3}\right)$.

由 $f''_{xx}=\left(2x+2x^2+y+\dfrac{x^3}{3}\right)e^{x+y}$，$f''_{yy}=\left(2+y+\dfrac{x^3}{3}\right)e^{x+y}$，$f''_{xy}=\left(x^2+1+y+\dfrac{x^3}{3}\right)e^{x+y}$，

$$\begin{aligned}\Delta&=f''_{xx}\cdot f''_{yy}-(f''_{xy})^2\\&=\left[\left(2x+2x^2+y+\frac{x^3}{3}\right)\cdot\left(2+y+\frac{x^3}{3}\right)-\left(x^2+1+y+\frac{x^3}{3}\right)^2\right]e^{2(x+y)}\end{aligned}$$

得 $\Delta\left(-1,-\dfrac{2}{3}\right)=-2e^{-\frac{10}{3}}<0$，以及

$$f''_{xx}\left(1,-\frac{4}{3}\right)=3e^{-\frac{1}{3}}>0,\Delta\left(1,-\frac{4}{3}\right)=2e^{-\frac{2}{3}}>0,$$

所以，$f(x,y)$ 仅有极小值 $f\left(1,-\dfrac{4}{3}\right)=-e^{-\frac{1}{3}}$，无极大值（注意：点 $\left(-1,-\dfrac{2}{3}\right)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点）.

附注　应熟练掌握二元函数的极值计算方法.

(18)

分析　（Ⅰ）由于 $f(0)=0$，$f(1)=1$，所以可利用拉格朗日中值定理证明本小题.

（Ⅱ）由（Ⅰ）及 $f'(x)$ 是偶函数知，$f'(\xi)=f'(-\xi)=1$，于是对辅助函数

$F(x)=e^x[f'(x)-1]$ 在 $[-1,1]$ 上应用罗尔定理即可证明本小题.

精解　（Ⅰ）由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足拉格朗日中值定理条件，所以存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)(1-0)=f(1)-f(0)$，即

$$f'(\xi)=1-f(0).\tag{1}$$

由于 $f(x)$ 是奇函数，所以有 $f(0)=-f(0)$，由此得到 $f(0)=0$. 将它代入式(1)得证，